Quelques outils pour une réflexion critique sur l'enseignement de la logique en classe de mathématiques

ZOÉ MESNIL

UNIVERSITÉ PARIS EST CRÉTEIL

LABORATOIRE DE DIDACTIQUE ANDRÉ REVUZ

IREM DE PARIS

zoe.mesnil@u-pec.fr

Séminaire du CREM
Nivelles, 24/02/2017

n est impair ET n est premier

n est impair OU n est premier

n est impair => n est premier

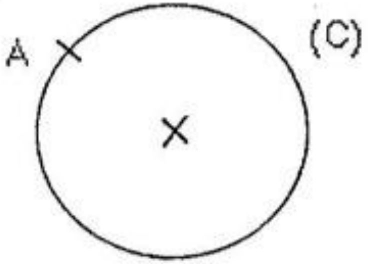
Si n est impair alors n est premier

n est impair ET n est premier

n est impair OU n est premier

n est impair => n est premier

Si n est impair alors n est premier

		VRAI	FAUX	AUTRE
1)	Si (x – 1) (x – 2) = 0 alors x = 1	☐	☐	☐
2)	Si x = 1 alors (x – 1) (x – 2) = 0	☐	☐	☐
3)	Si la droite (D) a pour équation y = 2x – 7 alors (D) passe par le point A(5 ; 3)	☐	☐	☐
4)	Puisque la droite (D) passe par le point A(5 ; 3) alors (D) a pour équation y = 2x – 7	☐	☐	☐
5)	La condition $x^2 = 4$ entraîne x = 2	☐	☐	☐
6)	Si x = 2 alors $x^2 = 4$	☐	☐	☐
7)	Si x < 2 alors $x^2 < 4$	☐	☐	☐
8)	La condition $x^2 < 4$ entraîne la condition x < 2	☐	☐	☐
9)	MA = MB entraîne que M est le milieu de [AB]	☐	☐	☐
10)	Si A, B et C sont alignés alors AC + CB = AB	☐	☐	☐
	On considère la figure suivante où A est un point du cercle C de rayon r. 			
11)	Si AM = 2r alors M appartient au cercle (C)	☐	☐	☐
12)	Si AM = 2r alors M n'appartient pas au cercle (C)	☐	☐	☐

Apprentissage des structures logiques
Brochure IREM de Rennes, 2000

Expérimentation menée par
E. Forgeoux et C. Hache
Dans une classe de 1ère S
(élèves de 16/17 ans)
Présentée aux Journées APMEP 2012

	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)	11)	12)
VRAI	11	20	24	5	13	29	16	21	14	12	17	10
FAUX	6	8	3	14	7	1	13	9	16	16	10	14
AUTRE	19	2	3	15	12	0	1	2	3	3	15	15
Total	*36*	*30*	*30*	*34*	*32*	*30*	*30*	*32*	*33*	*31*	*42*	*39*

Nombre total de copies : 30

1er paquet de questions : 2), 3), 6) et 8)

2ème paquet : 7), 9) et 10)

3ème paquet : 1), 4), 5), 11) et 12)

Extrait 1 [Question 5 du questionnaire] 1803

[« La condition $x^2=4$ entraine $x=2$ »]

(...)

- Lucille : oui mais ça montre quand-même que c'est pas vrai ou faux, c'est pas blanc ou noir. C'est un peu entre les deux. Il manque quelque chose mais dans le fond c'est un peu vrai. C'est pas complètement faux (...)
- Hugo : En fait, moi ça me fait penser : qu'est-ce que c'est que ce soit vrai, qu'est-ce que c'est que ce soit faux ? Est-ce que c'est vrai parce que c'est pas faux ? ou est-ce que c'est faux parce que c'est pas vrai ? ou est ce que c'est vrai parce que y'a rien où c'est faux ?
- Élèves : Oh là là !...
- Hugo : parce que ceux qui disent que c'est vrai parce que c'est pas toujours faux, ben j'suis désolé mais là, euh ... ça marche pas parce que y'a quelque chose qu'est faux donc c'est pas toujours vrai. Je sais pas (...)

Extrait 2 [Débat général en fin de séance] 1958

- Christophe à Hugo : il y a quelque chose qui a été dit tout à l'heure, il suffisait d'un contre-exemple pour montrer que quelque chose était faux, c'est que…

- Hugo : donc c'est faux parce que c'est pas toujours vrai. Est-ce que cette phrase c'est vrai ?

- Emmanuelle : si je vous dis (...) que tout rectangle est un carré, vous me dites quoi ?

- Élèves : non . Faux (...)

- Emmanuelle : tout nombre réel est pair

- Élèves : faux / C'est vrai / des fois mais c'est faux /

- Christophe / Emmanuelle : pourtant il y a des nombres réels qui sont pairs / il faut bien décider / C'est faux

- Jeanne : vous dites tout, alors que eux à aucun moment ils ont dit tout

- Christophe : ça c'est vrai

- <u>Lucille :</u> Vous avez dit (...) Vous dites tous, enfin, vous dites clairement que c'est tous, tous les réels, du coup c'est faux parce que tous les réels ne sont pas pairs, mais eux ils disent jamais...

- <u>Hugo :</u> mais en maths on sait bien que ça veut dire tout

- <u>Lucille :</u> mais là, ils disent pas tous tout le temps, c'est pas clair.

- <u>Xxx :</u> il manque des conditions (...)

- <u>Emmanuelle :</u> D'où l'importance ? d'écrire si c'est pour tout machin ou pas, c'est ça ?

- <u>Christophe :</u> et si on écrivait pour tout devant les phrases (...)

- <u>Xxx :</u> Mais du coup si on met pour tous ça va être faux.

- <u>Christophe :</u> si on dit pour tout x la condition $x^2=4$ entraine $x=2$

- <u>Élèves :</u> c'est faux !

- <u>Lucille :</u> du coup ce sera faux mais c'est parce qu'on a mis pour tout, si on ne met pas le pour tout c'est pas faux

- <u>Christophe :</u> et pour tout point *M*, *MA*=*MB* entraine que *M* milieu de [*AB*]

- <u>Élèves :</u> c'est faux / là c'est faux / parce que là, voilà, c'est une certitude

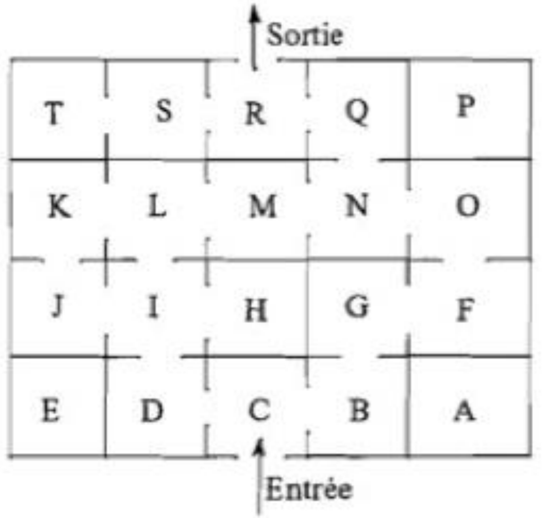
Exercice 1

Voici un labyrinthe

Lire attentivement les lignes ci-dessous avant de répondre aux questions.

Une personne que nous appellerons X, a traversé ce labyrinthe, de l'entrée la sortie, *sans jamais être passée* deux fois par la même porte.

Les pièces sont nommées A, B, C… comme il est indiqué sur la figure.



Il est possible d'énoncer des phrases qui aient un sens par rapport à la situation proposée et sur la vérité desquelles on puisse se prononcer (VRAI ou FAUX), ou qui peuvent être telles que les informations que l'on possède ne suffisent pas pour décider si elles sont vraies ou fausses (ON NE PEUT PAS SAVOIR).

Par exemple, la phrase « X est passée par C » est une phrase VRAIE.

En effet, on affirme que X a traversé le labyrinthe, et C est la seule pièce d'entrée.

Pour chacune des six phrases suivantes, dire si elle est VRAIE, si elle est FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS SAVOIR, et, dans chaque cas, expliquez votre réponse.

Phrase n°1 : « X est passé par P »
Phrase n°2 : « X est passé par N »
Phrase n°3 : « X est passé par M »
Phrase n°4 : « Si X est passé par O, alors X est passé par F »
Phrase n°5 : « Si X est passé par K, alors X est passé par L »
Phrase n°6 : « Si X est passé par L, alors X est passé par K »

Durand-Guerrier, V. (1999)
L'élève, le professeur et le labyrinthe.
Petit x n°*50*

Adda, J. (1975).
L'importance des quantifications dans la compréhension des mathématiques.
Nico, Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique

Rapide historique de la place de la logique dans les programmes (du lycée, en France)

- **1960** : une entrée prudente dans les textes, une préparation sur le terrain
- **1969** : la réforme des maths modernes : logique et théorie des ensembles fournissent un cadre (et notamment un langage) pour la mathématique.
- **1981** : la contre-réforme : la logique bannie
- **1999** : un retour timide : *A l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à détacher les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant*

Mesnil, Z.(2014) La logique, d’un outil pour le langage et le raisonnement mathématiques vers un objet d’enseignement

Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques
Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.
Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples : • à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ; • à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ; • à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ; • à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ; • à formuler la négation d'une proposition ; • à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ; • à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

BO du 12 juillet 2009. Mathématiques. Classe de Seconde.

1.2. Explicitation des quantifications

Les élèves ont fréquemment rencontré au collège des énoncés comportant des quantifications implicites. C'est le cas, par exemple :

- dans l'énoncé de règles de calcul dans le programme de 5^e
- dans la présentation des identités remarquables

En classe de seconde, l'explicitation des quantifications doit être faite dans l'optique d'aider les élèves à mieux comprendre les énoncés. Elle ne doit pas être systématique mais doit être faite dès qu'il peut y avoir ambiguïté de la situation proposée. Il est inutile de compliquer les notations lorsque ce n'est pas utile à la compréhension.

Les quantificateurs seront introduits en situation progressivement tout au long de l'année, la langue naturelle et le langage symbolique devant coexister pendant toute l'année.

Les étapes « comprendre la nécessité de quantifier », « être capable d'expliciter les quantifications » et « être capable de rédiger avec des quantificateurs » sont des étapes différentes ; la dernière étant un objectif de fin de lycée et non de la classe de seconde.

Il convient d'amener progressivement les élèves à prendre l'habitude de faire apparaître les quantifications dans leurs productions écrites, quand la compréhension le demande.

Ressources pour la classe de Seconde. Notations et raisonnement mathématiques (2009)

Exemple 3

- Reformuler les énoncés suivants en faisant apparaître les quantifications.
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 5$.
- (*Pour tout nombre réel x, l'image de x par la fonction f est égale à* $2x + 5$)
- L'équation $f(x) = 2x + 5$ a-t-elle des solutions ?
- (*Existe-t-il des nombres réels x pour lesquels* $f(x)$ *et* $2x + 5$ *sont égaux ?*)
- Résoudre l'équation $f(x) = 2x + 5$.
- (*Trouver l'ensemble de tous les réels x pour lesquels* $f(x)$ *et* $2x + 5$ *sont égaux*)

Dans les deux énoncés, la trace écrite (au tableau ou sur le cahier) est souvent la même :

$$f(x) = 2x + 5.$$

Cependant les deux énoncés n'ont bien sûr pas le même statut : le premier énoncé définit une fonction, le second conduit à résoudre (graphiquement ou par calcul) une équation. Il est important de clarifier par oral ces différents statuts dès que l'occasion se rencontre, et dans certains cas, de faire noter les quantifications par écrit, sans formalisme excessif.

1.3. Implication et équivalence

Exemple 6[1]

A. Voici deux propositions où a et b désignent des nombres réels :

$\boxed{1}$ $(a+b)^2 = 0$ $\boxed{2}$ $a = 0$ et $b = 0$

Si a et b sont des nombres réels tels que la proposition $\boxed{2}$ est vraie, alors la proposition $\boxed{1}$ est vraie. On note : pour a et b réels, $\boxed{2} \Rightarrow \boxed{1}$ et on dit que, pour a et b réels la proposition $\boxed{2}$ implique la proposition $\boxed{1}$.

Est-il vrai que pour a et b réels, la proposition $\boxed{1}$ implique la proposition $\boxed{2}$?

B. Voici quelques propositions où a et b désignent des nombres réels :

$\boxed{1}$ $a^2 = b^2$	$\boxed{2}$ $a = b$	$\boxed{3}$ $a = -b$
$\boxed{4}$ $(a+b)(a-b) = 0$	$\boxed{5}$ $a = b$ ou $a = -b$	$\boxed{6}$ $a = 0$ ou $b = 0$

a. Quelles sont les implications du type $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{..}$, vraies pour a et b réels ?

b. Quelles sont les implications du type $\boxed{..} \Rightarrow \boxed{1}$, vraies pour a et b réels ?

c. Quelles sont les propositions équivalentes pour a et b réels ?

d. Application : résoudre l'équation $(2x-3)^2 = (2x+9)^2$.

Cet exemple peut être traité en utilisant la représentation de la fonction carré et des fonctions polynômes de degré 2. Un débat oral, par groupes ou collectivement, permet de faire prendre conscience de la signification des termes « et » et « ou ».

Le plus important est de faire émerger les conceptions des élèves sur l'implication, terme utilisé fréquemment dans la langue naturelle (s'impliquer dans une démarche, impliquer les autres membres d'un groupe dans un travail, par exemple). Une fois assimilé, cet exemple peut devenir un exemple de référence pour les résolutions d'équations.

S'initier à la logique

51 Implication et équivalence

a et b désignent deux nombres réels.

1 $(a+b)^2 = 0$ 2 $a = 0$ **et** $b = 0$

Si la proposition 2 est vraie, alors la proposition 1 est vraie. On dit que la proposition 2 **implique** la proposition 1.

a) La proposition 1 implique-t-elle la proposition 2 ?

b) Voici six propositions :

A $a^2 = b^2$	B $a = b$
C $a = -b$	D $(a+b)(a-b) = 0$
E $a = b$ **ou** $a = -b$	F $a = 0$ **ou** $b = 0$

Dans chaque cas, recopier et compléter par le nom de l'une de ces propositions :

- la proposition A implique la proposition … ;
- la proposition … implique la proposition A ;
- les propositions … et … sont équivalentes.

D'après Pour les mathématiques vivantes en 2nde, APMEP

Calculs algébriques - Logique : les quantificateurs.

Exercices proposés par
F. Bergeault
(groupe Logique de l'IREM de Paris)
en seconde (élèves de 15/16 ans)

Exercice 1 (Les quantificateurs) - x est un nombre réel. On définit les expressions : $A = -6x^2 + 4x - 5$ et $B = -26x + 31$

1. Pour $x = 2$, calculer A puis B.

2. Pour $x = 3$, calculer A puis B.

3. La phrase : « pour tout réel x, on a $A = B$ » est-elle vraie ou fausse ?

4. La phrase : « il existe au moins un réel x tel que $A = B$ » est-elle vraie ou fausse ?

Exercice 2 - **1.** Pour tout réel x, les expressions suivantes sont-elles égales ? Justifier les réponses.

a. $A = (12x + 3)(2x - 4)$ et $B = (4x - 6)(6x + 2)$

b. $A = (6x + 4)^2$ et $B = (3x + 2)(12x + 8)$

c. $A = 2(2x - 3)^2 + 5$ et $B = 8x^2 - 24x + 23$

2. Existe-t-il au moins un réel x tel que $A = B$? Justifier les réponses.

a. $A = (12x + 3)(2x - 4)$ et $B = (4x - 6)(6x + 2)$

b. $A = (6x + 4)^2$ et $B = (3x + 2)(12x + 8)$

c. $A = x^2 + 3x + 5$ et $B = 3x + 4$

Exercice 3 - **1.** Montrer que, pour tout réel x, on a : $2(x - 3)(x + 5) = 2x^2 + 4x - 30$.

2. Montrer qu'il existe un réel x tel que : $(x + 1)^2 = x^2 + 1$

3. Montrer que, pour tout réel x, on a : $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.

4. La phrase : « pour tout réel x, on a : $5(2x + 4)(3x - 2) = 30x^2 + 40x - 40$ » est-elle vraie ou fausse ?

Type de phrase	Pour prouver qu'elle est vraie	Pour prouver qu'elle est fausse
Pour tout x , $\underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots}_{\textit{quelque chose qui parle de } x}$	Un exemple où c'est vrai ne suffit pas. **Garder *x* !**	Un exemple où c'est faux suffit.
Il existe x , $\underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots}_{\textit{quelque chose qui parle de } x}$	Un exemple où c'est vrai suffit.	Un exemple où c'est faux ne suffit pas. **Garder *x* !**

L'utilisation de « quelque chose qui parle de x » permet d'éviter la notation $P[x]$ si elle est jugée trop formelle.

On peut aussi proposer :

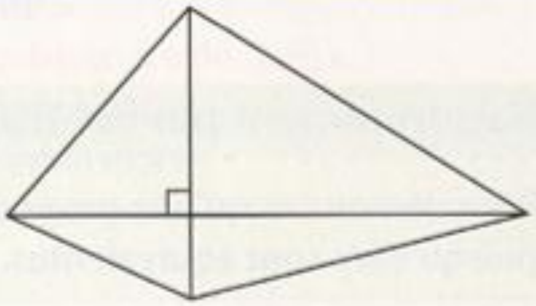
Type de phrase	Pour prouver qu'elle est vraie	Pour prouver qu'elle est fausse
Pour tout x , $P[x]$	Une valeur de x pour laquelle $P[x]$ est vraie ne suffit pas. **Garder *x* !**	Une valeur de x pour laquelle $P[x]$ est fausse suffit.
Il existe x , $P[x]$	Une valeur de x pour laquelle $P[x]$ est vraie suffit.	Une valeur de x pour laquelle $P[x]$ est fausse ne suffit pas. **Garder *x* !**

Tableau de « Pour prouver », Groupe Logique de l'IREM de Paris

Raisonnement par exemple (s) ou par contre-exemple

• Pour démontrer « il existe un … », il suffit d'en trouver un : produire un exemple suffit !
• Pour démontrer « pour tout … », il suffit d'envisager tous les cas ; mais s'ils sont en nombre infini, ce n'est plus possible. Des exemples ne suffisent pas.
• Pour démontrer que « pour tout, … » est faux, il suffit d'exhiber un contre-exemple.

• Démontrer que « il existe un quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires » : il suffit d'en construire un, comme ci-contre.



• Démontrer que « tout nombre multiple de 6 est aussi multiple de 2 ». Il faudrait tester tous les multiples de 6, mais il y en a une infinité ! Ce n'est donc pas possible. Il faut faire une démonstration dans le cas général.

• Démontrer que « pour tout nombre x, $(x+1)^2 = x^2 + 1$ » est faux. Il suffit de donner un contre-exemple : pour $x = 2$, $(x+1)^2 = 9$ et $x^2 + 1 = 5$ donc $(x+1)^2 \neq x^2 + 1$.

Extrait du manuel 2nd, collection Math'x, DIDER, 2010

1. Travail en groupe, chaque groupe sur une proposition.
Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses et le prouver :

1. "Il existe un nombre x tel que $(x+5)^2=x^2+5^2$"
2. "Pour tout nombre x, $(x+5)^2=x^2+5^2$"
3. "Pour tout nombre x, $(x-2)(x+4)-x^2=2x-8$"
4. "Il existe un nombre entier x tel que 3+2x est pair"

2. Quelle méthode avez vous utilisé pour prouver votre résultat ?

	Vrai	Faux	Méthode
"Il existe un nombre x tel que $(x+5)^2=x^2+5^2$"			
"Pour tout nombre x, $(x+5)^2=x^2+5^2$"			
"Pour tout nombre x, $(x-2)(x+4)-x^2=2x-8$"			
"Il existe un nombre entier x tel que 3+2x est pair"			

Activité proposée par C. Prouteau (groupe Logique de l'IREM de Paris) en quatrième (élèves de 13/14 ans)

3. Classez les 4 propositions dans un tableau et indiquer les méthodes employées (en bilan groupe classe) :

	Proposition Vraie	Proposition Fausse
Pour tout nombre x, "quelquechose qui dépend de x"	Proposition :	Proposition :
	Méthode(s) :	Méthode(s) :
Il existe un nombre x, "quelquechose qui dépend de x"	Proposition :	Proposition :
	Méthode(s) :	Méthode(s) :

	Pour prouver que la proposition est Vraie	Pour prouver que la proposition est Fausse
Pour tout nombre x, "quelquechose qui dépend de x"	Un exemple où c'est vrai ne suffit pas. **Garder x!**	Un exemple où c'est faux suffit.
Il existe un nombre x, "quelquechose qui dépend de x"	Un exemple où c'est vrai suffit.	Un exemple où c'est faux ne suffit pas. **Garder x!**

QCM : Pour chacune des affirmations suivantes, dire si l'affirmation est vraie ou fausse et cocher la méthode adaptée pour le prouver (dans le cas où il faut trouver un exemple, le donner)

n°	Affirmation	Vraie/ Fausse	Trouver un exemple	Garder x et utiliser le calcul littéral
1	"Il existe un nombre x tel que $(x+4)^2=x^2-8x+16$"			
2	"Pour tout nombre x , $(x+4)^2=x^2-8x+16$"			
3	"Pour tout nombre x , $(x+4)^2=x^2+8x+16$"			
4	"Il existe un nombre x tel que $(x+4)^2=x^2+16$ "			
5	"Il existe un nombre x tel que $(x+2)(-x-2)=x^2-4$"			
6	"Pour tout nombre x, $(x+2)(-x-2)=x^2-4$"			
7	"Il existe un nombre entier x tel que 5x+26 est un multiple de 5"			
8	"Il existe un nombre entier x tel que 7x+14 est un multiple de 7"			
9	"Pour tout nombre entier x , 7x+14 est un multiple de 7"			
10	"Pour tout nombre entier a multiple de 2, pour tout nombre entier b multiple de 3, a+b est un multiple de 5 "			

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)^2 - 9$.

Compléter chaque phrase ci-dessous avec l'une des consignes suivantes qui convient : « Montrer que pour tout réel $x\ldots$ » ou « Résoudre l'équation d'inconnue réelle x », et répondre à la question ainsi obtenue.

1. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $f(x) = -9$

2. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$

3. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $f(x) = 4x^2$

4. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $f(x) = -10$

Exercice proposé par le groupe Logique et Raisonnement de la Comission Inter IREM Lycée

- On en peut pas faire des mathématiques sans user de logique, et donc on ne peut pas enseigner les mathématiques sans parler de logique ?

- Il est bien question d’enseigner la logique à l’œuvre dans l’activité mathématique (point de vue outil), mais quel point de vue adopter sur les notions de logique (point de vue objet) ?

- La logique mathématique peut être utilisée comme outil d’étude du langage mathématique, comme référence qui permet d’éclairer les significations parfois ambiguës, les implicites, qui existent dans les pratiques langagières des mathématiciens. Mais comment en parler aux élèves ? Aux enseignants ?

Déclinaison d’une même ? tâche

95 On donne le trinôme $f(x) = mx^2 + 4x + 2(m - 1)$.

1. Pour quelles valeurs de m l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle une seule solution ? Calculez alors cette solution.

2. a) Quel est l'ensemble des nombres m pour lesquels l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions distinctes ?

b) Quel est l'ensemble des nombres m pour lesquels $f(x) < 0$ pour tout nombre x ?

LOGIQUE

100 **Implication réciproque**

A. g est la fonction trinôme définie par :

$$g(x) = mx^2 + 4x + 4 \ (m \neq 0).$$

1. Parmi ces implications, lesquelles sont vraies ?

a) « $m = 2$ » $\Rightarrow$ « Pour tout x, $g(x) > 0$. »

b) « $m < 0$ » $\Rightarrow$ « L'équation $g(x) = 0$ a deux solutions distinctes. »

c) « Le trinôme $g(x)$ a deux racines distinctes. » $\Rightarrow$ « $m < 0$ »

2. L'implication c) est la réciproque de b). Ces propositions sont-elles équivalentes ?

B. On donne l'implication : « $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes » $\Rightarrow$ « a et c sont de signes contraires ».

Cette implication est-elle vraie ? Sa réciproque est-elle vraie ?

Donner une proposition synonyme de :

“L’équation $mx^2 + 4x + 4 = 0$

a deux solutions réelles distinctes”

Dans cet exercice a, b et c désignent des nombres réels.
On considère la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$

(1) Reformuler la proposition suivante :
$ac < 0 \Rightarrow \exists x_1 \in \mathbb{R}, \exists x_2 \in \mathbb{R}, \big(x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2) = 0\big)$

(2) Démontrer que l'implication précédente est vraie quels que soient les réels a, b et c.

(3) Parmi les trinômes suivants, pour lesquels pouvez-vous conclure à l'existence de deux racines grâce au résultat démontré dans la question 2 ?

   (a) $3x^2 + 2x - 5$
   (b) $x^2 - 2x + 1$
   (c) $x^2 - 4x$
   (d) $4x^2 + 2x + 1$

(4) La réciproque de l'implication de la question 1 est-elle vraie quels que soient les réels a, b et c ?

ET/OU

1 et -1 sont des solutions réelles

de l’équation $x^4 - 1 = 0$

1 est une solution réelle
de l’équation $x^4 - 1 = 0$

ET

-1 est une solution réelle
de l’équation $x^4 - 1 = 0$

1 et -1 sont des solutions réelles

de l'équation $x^4 - 1 = 0$

1 et -1 sont les solutions réelles

de l’équation $x^4 - 1 = 0$

1 est une solution réelle
de l’équation $x^4 - 1 = 0$

ET

-1 est une solution réelle
de l’équation $x^4 - 1 = 0$

ET

il n’y en a pas d’autre.

Dans la proposition

“1 et -1 sont les solutions réelles

de l’équation $x^4 - 1 = 0$”

Le “et” n’est pas un connecteur logique entre deux propositions

Extrait des objectifs “Notations et raisonnement”

(nouveaux programmes pour le lycée)

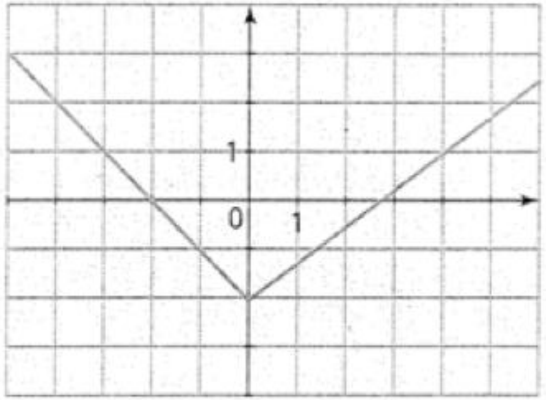
Les élèves sont entraînés, sur des exemples, à utiliser correctement les connecteurs logiques “et”, “ou” et à distinguer leur sens des sens courants de “et”, “ou” dans le langage usuel.

2 Et, ou et contraposée Logique

ÉNONCÉ

On donne la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{si } x < 0,\ f(x) = -x - 2\ ; \quad \text{si } x \geqslant 0,\ f(x) = \frac{3}{4}x - 2.$$



Pour chacune des affirmations proposées, dire si elle est vraie ou fausse.

1. a. « Les solutions de $f(x) = 1$ sont -3 ou 4. »

SOLUTION

1. Si l'on cherche **toutes** les valeurs de x telles que $f(x) = 1$, on trouve -3 et 4.

Les solutions de $f(x) = 1$ sont -3 **et** 4 ; l'affirmation a. est fausse.

Les affirmations :

« si $f(x) = 1$, alors $x = -3$ ou $x = 4$ »

et « si $x = -3$ ou si $x = 4$, alors $f(x) = 1$ »

sont vraies.

On peut alors écrire :

« $f(x) = 1$ si, et seulement si, $x = -3$ **ou** $x = 4$ »,

ou encore « $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = -3$ **ou** $x = 4$ ».

P[t] : t est une solution réelle de l'équation $x^4 - 1 = 0$

1 est une solution réelle
de l’équation $x^4 - 1 = 0$

ET

-1 est une solution réelle
de l’équation $x^4 - 1 = 0$

ET

il n’y en a pas d’autre.

P[1]

ET

-1 est une solution réelle de l’équation $x^4 - 1 = 0$

ET

il n’y en a pas d’autre.

P[1]

ET

P[-1]

ET

il n’y en a pas d’autre.

P[1]

ET

P[-1]

ET

Pour tout z, si P[z] alors (z=1 OU z=-1)

Une façon plus simple de le dire :

Pour tout z,

P[z] si et seulement si (z=1 OU z=-1)

Pour tout z, P[z] si et seulement si (z=1 OU z=-1)

P[1]

ET

P[-1]

ET

Pour tout z, si P[z] alors (z=1 OU z=-1)

Pour tout z, P[z] si et seulement si (z=1 OU z=-1)

Pour tout z, si z=1 alors P[z]

ET

Pour tout z, si z=-1 alors P[z]

ET

Pour tout z, si P[z] alors (z=1 OU z=-1)

(A=>C) ET (B=>C)

(A OU B)=>C

Les jetons

On dispose de trois jetons de formes différentes (rond, carré et triangle) et de trois couleurs différentes (bleu, vert et rouge). Chaque jeton a une seule couleur.

Voici trois affirmations sur ces pièces:

1. Si le jeton rond est bleu, alors le jeton carré est vert
2. Si le jeton rond est vert, alors le jeton carré est rouge
3. Si le jeton carré n'est pas bleu, alors le jeton triangulaire est vert

Donner toutes les solutions (s'il y en a)

Nous lisons l'énoncé, et grâce aux affirmations, nous comprenons que :

1. Si BLEU alors $\boxed{\text{VERT}}$
2. Si VERT alors $\boxed{\text{ROUGE}}$
3. Si $\cancel{\boxed{\text{BLEU}}}$ alors VERT

En fonction de ces affirmations nous allons essayer différentes combinaisons :

BLEU $\boxed{\text{VERT}}$ ROUGE → Cette combinaison ne fonctionne pas à cause de l'affirmation 3.

ROUGE $\boxed{\text{BLEU}}$ VERT → Cette combinaison ne fonctionne pas à cause de l'affirmation 3.

VERT $\boxed{\text{BLEU}}$ ROUGE → Cette combinaison ne fonctionne pas à cause de l'affirmation 2.

VERT $\boxed{\text{ROUGE}}$ BLEU → Cette combinaison ne fonctionne pas à cause de l'affirmation 3.

En conclusion, avec toutes nos idées de combinaisons, nous n'avons pas trouver de solutions.

J'examine les 6 possibilités

○ □ △ Si ○ est bleu, alors le jeton □ est vert donc <u>Non</u>

○ □ △ Si □ n'est pas bleu, alors △ doit être vert donc <u>Non</u>

○ □ △ Si □ n'est pas bleu, alors △ doit être vert donc <u>faux</u>

○ □ △ *

○ □ △ Si □ n'est pas bleu, alors △ doit être vert donc <u>faux</u>.

○ □ △ Si ○ est vert, alors □ est rouge

* Aucune des affirmations ne contredit cette possibilité elle est donc juste ce qui n'est pas le cas des cinq autre possibilité.

1) Si le carré est bleu alors le disque est jaune (et le triangle rouge)

2) Si le carré est jaune alors le disque est rouge (et le triangle bleu)

3) Si le disque n'est pas bleu alors le triangle est jaune.

Donc le disque n'est jamain bleau alors le triangle est jaune.

Le carré n'est jamain rouge donc il est bleu. et le disque est

Rouge vue que le jaune et bleau sont deja pris.

Implication et déduction

n est divisible par 4 donc n est pair

8 est divisible par 4 donc 8 est pair

6 est divisible par 4 donc 6 est pair

9 est divisible par 4 donc 9 est pair

12 est pair donc 12 est divisible par 4

Proposition mathématique

Une proposition mathématique raconte un (des) fait(s) sur un (des) objet(s) mathématique(s).

Une proposition mathématique est *susceptible* d'être vraie ou fausse.

A donc B n’est pas une proposition !

9 est divisible par 4 donc 9 est pair

Un raisonnement correct appliqué à une prémisse fausse !

12 est pair donc 12 est divisible par 4

Prémisse et conclusion vraies, mais raisonnement pas correct car basé sur une implication qui n’est pas vraie pour tout entier.

2 théorèmes, 1 règle de déduction

Th 1 : Si A alors B

Si le triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2=AB^2+AC^2$

Th 2 (contraposée) : Si NON(B) alors NON(A)

Si $BC^2 \neq AB^2+AC^2$ alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A

Modus Ponens : si P alors Q, or P, donc Q

Appliqué au th 1 : Si le triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2=AB^2+AC^2$
or, le triangle ABC est rectangle en A,
donc $BC^2=AB^2+AC^2$

Appliqué au th 2 : Si $BC^2 \neq AB^2+AC^2$ alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A
or, $BC^2 \neq AB^2+AC^2$,
donc le triangle ABC n'est pas rectangle en A

1 théorème, 2 règles de déduction

Th : Si A alors B

Si le triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2=AB^2+AC^2$

Modus Ponens : si P alors Q, or P, donc Q

Appliqué au th : Si le triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2=AB^2+AC^2$
or, le triangle ABC est rectangle en A,
donc $BC^2=AB^2+AC^2$

Modus Tollens : si P alors Q, or NON(Q), donc NON(P)

Appliqué au th : Si le triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2=AB^2+AC^2$
or, $BC^2\neq AB^2+AC^2$,
donc le triangle ABC n'est pas rectangle en A

Avec une équivalence : 4 en 1

A si et seulement si B

A donc B

B donc A

NON(A) donc NON(B)

NON(B) donc NON(A)