Quelques réflexions supplémentaires

Yvik Swan

Université de Liège, Belgium

1 De la forme de la stratégie optimale

2 Quelques variantes

3 Le CSP avec information

4 Autres variantes et un problème ouvert

La stratégie optimale est de choisir le premier record après un certain indice.

- Lindley (1961) fut le premier à prouver ce résultat, via un principe appelé “programmation dynamique”.
- Dynkin (1963) adapte au cadre plus général Markovien.

Nous présentons une preuve élémentaire due à Gilbert et Mosteller (JASA, 1966) ; cette preuve repose sur le principe d'optimalité selon lequel une action est optimale si elle est optimale.

Dans le cadre du problème de secrétaires, on observe n candidats

$$(C_1 \quad \dots \quad C_i \quad C_{i+1} \quad \dots \quad C_n)$$

et il est optimal de choisir le $i$ème si

$$P(\text{gagner avec } C_i) \geq P(\text{gagner en appliquant la meilleure stratégie àpd } C_{i+1})$$

Nous allons montrer que

$$P(\text{gagner avec } C_i) = \frac{i}{n}$$

Pour cela remarquons d'abord qu'on ne va pas choisir un candidat à l'étape i s'il n'est pas le meilleur des i premiers.

Nous allons montrer que

$$P(\text{gagner avec } C_i) = \frac{i}{n}$$

Pour cela remarquons d'abord qu'on ne va pas choisir un candidat à l'étape i s'il n'est pas le meilleur des i premiers.

On ne va donc considérer que des "records" R_i.

Nous allons montrer que

$$P(\text{gagner avec } C_i) = \frac{i}{n}$$

Pour cela remarquons d'abord qu'on ne va pas choisir un candidat à l'étape i s'il n'est pas le meilleur des i premiers.

On ne va donc considérer que des "records" R_i.

On a alors

$P(\text{gagner avec } R_i)$

Nous allons montrer que

$$P(\text{gagner avec } C_i) = \frac{i}{n}$$

Pour cela remarquons d'abord qu'on ne va pas choisir un candidat à l'étape i s'il n'est pas le meilleur des i premiers.

On ne va donc considérer que des "records" R_i.

On a alors

$P(\text{gagner avec } R_i)$
$= P(i\text{ème soit le meilleur au total} \,|\, i\text{ème est le meilleur à ce stade})$

Nous allons montrer que

$$P(\text{gagner avec } C_i) = \frac{i}{n}$$

Pour cela remarquons d'abord qu'on ne va pas choisir un candidat à l'étape i s'il n'est pas le meilleur des i premiers.

On ne va donc considérer que des "records" R_i.

On a alors

$$\begin{aligned} &P(\text{gagner avec } R_i) \\ &= P(i\text{ème soit le meilleur au total} \,|\, i\text{ème est le meilleur à ce stade}) \\ &= \frac{1/n}{1/i}. \end{aligned}$$

Pour rappel, il est optimal de choisir le $i$ème si

$$P(\text{gagner avec } C_i) \geq P(\text{gagner en appliquant la meilleure stratégie àpd } C_{i+1})$$

- Le membre de gauche est croissant ;
- le membre de droite est décroissant : on a plus de choix au début qu'à la fin de la partie.

Pour rappel, il est optimal de choisir le $i$ème si

$$P(\text{gagner avec } C_i) \geq P(\text{gagner en appliquant la meilleure stratégie àpd } C_{i+1})$$

- Le membre de gauche est croissant ;
- le membre de droite est décroissant : on a plus de choix au début qu'à la fin de la partie.

Pour rappel, il est optimal de choisir le $i$ème si

$$P(\text{gagner avec } C_i) \geq P(\text{gagner en appliquant la meilleure stratégie àpd } C_{i+1})$$

- Le membre de gauche est croissant ;
- le membre de droite est décroissant : on a plus de choix au début qu'à la fin de la partie.

Une conséquence de la croissance/décroissance est que dans une stratégie optimale, si on est prêt à s'arrêter sur le record i, on sera encore satisfait de tout record subséquent.

Par conséquent la stratégie optimale est bien de la forme proposée.

1 De la forme de la stratégie optimale

2 Quelques variantes

3 Le CSP avec information

4 Autres variantes et un problème ouvert

De nombreux auteurs ont considéré des variantes du CSP.

De nombreux auteurs ont considéré des variantes du CSP.

Dans un des papiers fondateurs, Gilbert et Mosteller (1966) explorent – avec des outils élémentaires – le même problème mais lorsque

- on admet k choix
  La forme de la stratégie optimale est facile à deviner ; la probabilité optimale monte à 59% pour $k = 2$ et au dessus de 90% dès $k \geq 6$.

De nombreux auteurs ont considéré des variantes du CSP.

Dans un des papiers fondateurs, Gilbert et Mosteller (1966) explorent – avec des outils élémentaires – le même problème mais lorsque

- on admet k choix
  La forme de la stratégie optimale est facile à deviner ; la probabilité optimale monte à 59% pour $k = 2$ et au dessus de 90% dès $k \geq 6$.
- on se satisfait du top 2
  La forme de la stratégie optimale est facile à deviner ; la probabilité optimale monte à 57%

1 De la forme de la stratégie optimale

2 Quelques variantes

3 Le CSP avec information

4 Autres variantes et un problème ouvert

Dans le problème classique, l'observateur dispose de très peu d'informations car il ne peut, à tout moment, que *classer* les observations sans jamais pouvoir leur attribuer une *valeur*.

On appelle ce problème non informatif ; asymptotiquement la probabilité de gagner est $1/e = 36\%$.

Dans le problème classique, l'observateur dispose de très peu d'informations car il ne peut, à tout moment, que *classer* les observations sans jamais pouvoir leur attribuer une *valeur*.

On appelle ce problème non informatif ; asymptotiquement la probabilité de gagner est $1/e = 36\%$.

Une variante informative est la suivante :

- on observe séquentiellement $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires uniformément distribuées sur $[0, 1]$.

Dans le problème classique, l'observateur dispose de très peu d'informations car il ne peut, à tout moment, que *classer* les observations sans jamais pouvoir leur attribuer une *valeur*.

On appelle ce problème non informatif ; asymptotiquement la probabilité de gagner est $1/e = 36\%$.

Une variante informative est la suivante :

- on observe séquentiellement $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires uniformément distribuées sur $[0, 1]$.
- A chaque étape il faut décider si on choisit la valeur X_i ou si on la refuse ; tout choix est définitif.

Dans le problème classique, l'observateur dispose de très peu d'informations car il ne peut, à tout moment, que *classer* les observations sans jamais pouvoir leur attribuer une *valeur*.

On appelle ce problème non informatif ; asymptotiquement la probabilité de gagner est $1/e = 36\%$.

Une variante informative est la suivante :

- on observe séquentiellement $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires uniformément distribuées sur $[0, 1]$.
- A chaque étape il faut décider si on choisit la valeur X_i ou si on la refuse ; tout choix est définitif.

Question : existe-t-il une stratégie permettant de maximiser la probabilité d'obtenir le meilleur candidat au total ?

Commençons par le cas $n = 2$: on reçoit deux nombres X_1, X_2 distribués uniformément sur $[0, 1]$.

Le but est de choisir le plus petit.

- Sans stratégie, la probabilité de gagner est de $1/2$.

Commençons par le cas $n = 2$: on reçoit deux nombres X_1, X_2 distribués uniformément sur $[0, 1]$.

Le but est de choisir le plus petit.

- Sans stratégie, la probabilité de gagner est de $1/2$.
- Sans information supplémentaire, ceci est la meilleure probabilité.

Commençons par le cas $n = 2$: on reçoit deux nombres X_1, X_2 distribués uniformément sur $[0, 1]$.

Le but est de choisir le plus petit.

- Sans stratégie, la probabilité de gagner est de $1/2$.
- Sans information supplémentaire, ceci est la meilleure probabilité.
- En utilisant l'information,

Commençons par le cas $n = 2$: on reçoit deux nombres X_1, X_2 distribués uniformément sur $[0, 1]$.

Le but est de choisir le plus petit.

- Sans stratégie, la probabilité de gagner est de $1/2$.
- Sans information supplémentaire, ceci est la meilleure probabilité.
- En utilisant l'information, peut-on trouver une stratégie optimale qui nous permet de gagner "plus souvent" ?

Choisissons un nombre a et décidons de prendre X_1 si $X_1 \leq a$ et X_2 sinon.

On calcule alors

$$P(\text{gagner}) = \int_0^1 P(\text{gagner} \,|\, X_1 = x)dx$$

Choisissons un nombre a et décidons de prendre X_1 si $X_1 \leq a$ et X_2 sinon.

On calcule alors

$$P(\text{gagner}) = \int_0^1 P(\text{gagner} \,|\, X_1 = x)dx$$

$$= \int_0^a P(X_2 \geq X_1 \,|\, X_1 = x)dx + \int_a^1 P(X_2 \leq X_1 \,|\, X_1 = x)dx$$

Choisissons un nombre a et décidons de prendre X_1 si $X_1 \leq a$ et X_2 sinon.

On calcule alors

$$P(\text{gagner}) = \int_0^1 P(\text{gagner} \,|\, X_1 = x)dx$$

$$= \int_0^a P(X_2 \geq X_1 \,|\, X_1 = x)dx + \int_a^1 P(X_2 \leq X_1 \,|\, X_1 = x)dx$$

$$= \int_0^a P(X_2 \geq x)dx + \int_a^1 P(X_2 \leq x)dx$$

Choisissons un nombre a et décidons de prendre X_1 si $X_1 \leq a$ et X_2 sinon.

On calcule alors

$$
\begin{aligned}
P(\text{gagner}) &= \int_0^1 P(\text{gagner} \,|\, X_1 = x)dx \\
&= \int_0^a P(X_2 \geq X_1 \,|\, X_1 = x)dx + \int_a^1 P(X_2 \leq X_1 \,|\, X_1 = x)dx \\
&= \int_0^a P(X_2 \geq x)dx + \int_a^1 P(X_2 \leq x)dx \\
&= \int_0^a (1-x)dx + \int_a^1 x dx
\end{aligned}
$$

Choisissons un nombre a et décidons de prendre X_1 si $X_1 \leq a$ et X_2 sinon.

On calcule alors

$$
\begin{aligned}
P(\text{gagner}) &= \int_0^1 P(\text{gagner} \,|\, X_1 = x)dx \\
&= \int_0^a P(X_2 \geq X_1 \,|\, X_1 = x)dx + \int_a^1 P(X_2 \leq X_1 \,|\, X_1 = x)dx \\
&= \int_0^a P(X_2 \geq x)dx + \int_a^1 P(X_2 \leq x)dx \\
&= \int_0^a (1-x)dx + \int_a^1 x dx \\
&= a - a^2 + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Nous venons de calculer

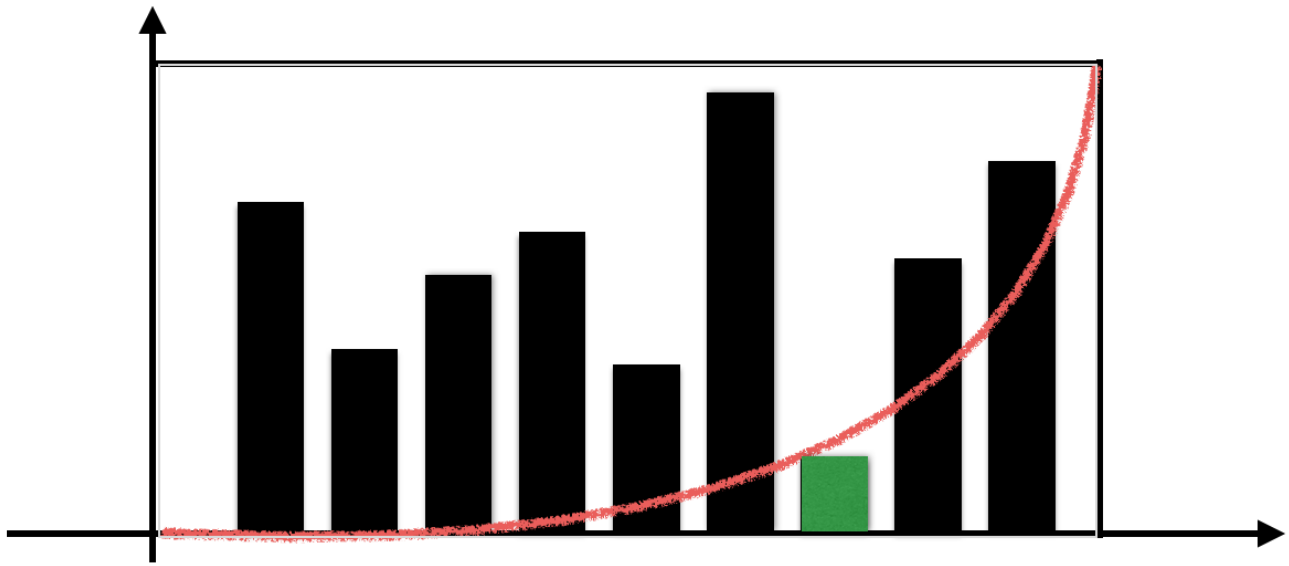
$$P(\text{gagner}) = a - a^2 + \frac{1}{2};$$

cette probabilité est maximale en $a = 1/2$, auquel cas la probabilité est de $3/4$!

Pour chaque n il existe une stratégie optimale qui consiste en une suite de seuils

$$a_{1,n} \leq a_{2,n} \leq \cdots \leq a_{n,n} = 1$$

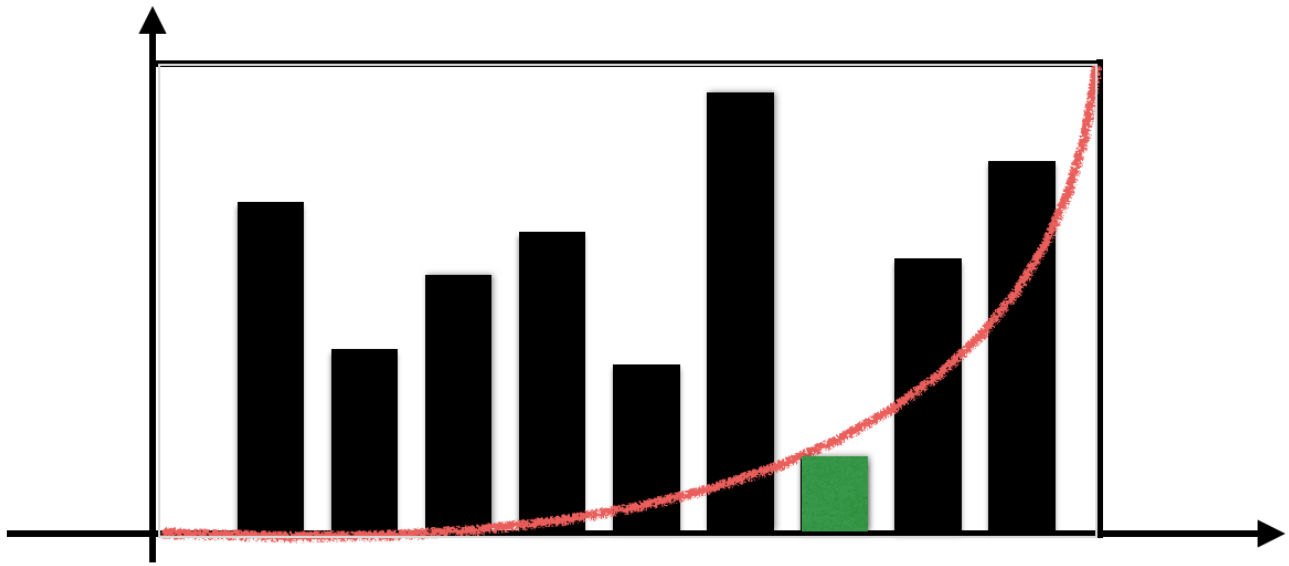
avec la règle : accepter X_i si $X_i \leq a_{i,n}$.



Pour chaque n il existe une stratégie optimale qui consiste en une suite de seuils

$$a_{1,n} \leq a_{2,n} \leq \cdots \leq a_{n,n} = 1$$

avec la règle : accepter X_i si $X_i \leq a_{i,n}$.



Même si la probabilité de gain diminue avec n, elle tend néanmoins vers 58% à $n \to \infty$!

1 De la forme de la stratégie optimale

2 Quelques variantes

3 Le CSP avec information

4 Autres variantes et un problème ouvert

Une variante intéressante est de ne plus souhaiter maximiser la probabilité d'obtenir le meilleur, mais simplement de chercher à minimiser le rang moyen obtenu.

Cette approche tolère beaucoup plus de marge : on est content si, sur un grand nombre d'essais, les candidats choisis sont bons en moyenne.

Le problème “sans information” a été résolu en 1964 par Chow, Moriguti, Robbins et Samuels. Ils ont montré que, pour n grand, le rang moyen minimal est

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j+2}{j} \right)^{1/(j+1)} \approx 3.869.$$

La stratégie optimale n'est pas du tout la même que pour le CSP ; elle consiste en une suite de rangs/seuils

$$s_{1,n}, s_{2,n}, \ldots, s_{n,n}$$

à partir desquels on prend ou pas.

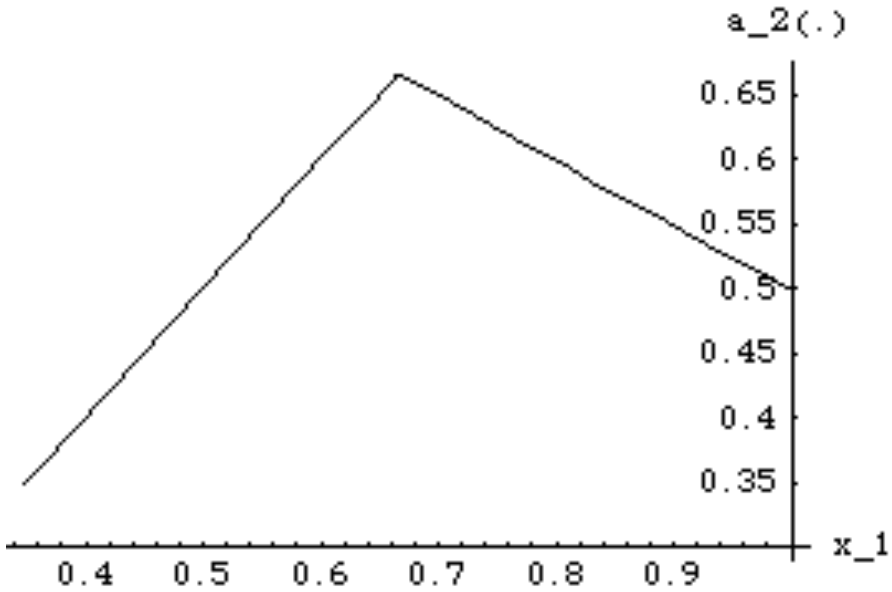
Par exemple si $n = 4$, on a $0, 1, 2, 4$: on ne prend pas le premier, on prend le second si c'est le meilleur, le troisième si il est au moins parmi les deux meilleurs et le 4ème quoi qu'il arrive.

Supposons maintenant observer également les valeurs ; quelle est la meilleure stratégie et quel sera le rang moyen associé ?

Si $n = 3$ on obtient un rang moyen optimal de 1.391 en appliquant une stratégie basée sur trois seuils

$$
\begin{aligned}
a_1 &= (5 - \sqrt{13})/4 = 0.3486... \\
a_2(x_1) &= \begin{cases} x_1 & \text{if} \quad a_1 \leq x_1 \leq \frac{2}{3} \\ 1 - x_1/2 & \text{if} \quad \frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1 \end{cases} \\
a_3 &= 1
\end{aligned}
$$

avec



Si $n = 4$ on obtient (après une quantité horrible de calculs) un rang moyen optimal de 1.4932 en appliquant une stratégie basée sur quatre seuils :

$$a_1 = 0.275...$$

$$a_2(x_1) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{1}{4}(x_1 + \sqrt{x_1^2 - 4x_1 + 16}) & \text{for } x_1 \in [\beta_5, 1] \\ \sqrt{12x_1 + 42} - 6 - x_1 & \text{for } x_1 \in [\beta_4, \beta_5] \\ -\frac{(4x_1^2 - 6x_1 + 5)}{2(x_1 - 4)} & \text{for } x_1 \in [\beta_3, \beta_4] \end{cases}$$

avec

$$\beta_3 = \frac{7 - \sqrt{19}}{6}, \quad \beta_4 = \frac{1}{2}(11 - 3\sqrt{11}), \quad \beta_5 = \frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{3}). \quad (1)$$

etc.

L'important est que les seuils dépendent de *toutes* les observations.

Conclusions et questions

Notons $v(n)$ le rang optimal qu'on peut obtenir avec la meilleure stratégie.

- Personne n'a calculé la stratégie optimale pour $n \geq 5$; on n'a pas d'idée de son comportement.

Conclusions et questions

Notons $v(n)$ le rang optimal qu'on peut obtenir avec la meilleure stratégie.

- Personne n'a calculé la stratégie optimale pour $n \geq 5$; on n'a pas d'idée de son comportement.
- On ne connait pas $v(n)$ pour $n \geq 10$.

Conclusions et questions

Notons $v(n)$ le rang optimal qu'on peut obtenir avec la meilleure stratégie.

- Personne n'a calculé la stratégie optimale pour $n \geq 5$; on n'a pas d'idée de son comportement.
- On ne connait pas $v(n)$ pour $n \geq 10$.
- On a calculé la valeur optimale $V(n)$ avec une stratégie "sans mémoire" ; on obtient $\lim_{n\to\infty} V(n) \approx 2.3$.

Conclusions et questions

Notons $v(n)$ le rang optimal qu'on peut obtenir avec la meilleure stratégie.

- Personne n'a calculé la stratégie optimale pour $n \geq 5$; on n'a pas d'idée de son comportement.
- On ne connait pas $v(n)$ pour $n \geq 10$.
- On a calculé la valeur optimale $V(n)$ avec une stratégie "sans mémoire" ; on obtient $\lim_{n\to\infty} V(n) \approx 2.3$.
- On sait que $v(n) < V(n)$ pour tout n.

Conclusions et questions

Notons $v(n)$ le rang optimal qu'on peut obtenir avec la meilleure stratégie.

- Personne n'a calculé la stratégie optimale pour $n \geq 5$; on n'a pas d'idée de son comportement.
- On ne connait pas $v(n)$ pour $n \geq 10$.
- On a calculé la valeur optimale $V(n)$ avec une stratégie "sans mémoire" ; on obtient $\lim_{n\to\infty} V(n) \approx 2.3$.
- On sait que $v(n) < V(n)$ pour tout n.
- On ne sait pas si $\lim_{n\to\infty} v(n) < \lim_{n\to\infty} V(n)$.

Conclusions et questions

Notons $v(n)$ le rang optimal qu'on peut obtenir avec la meilleure stratégie.

- Personne n'a calculé la stratégie optimale pour $n \geq 5$; on n'a pas d'idée de son comportement.
- On ne connait pas $v(n)$ pour $n \geq 10$.
- On a calculé la valeur optimale $V(n)$ avec une stratégie "sans mémoire" ; on obtient $\lim_{n\to\infty} V(n) \approx 2.3$.
- On sait que $v(n) < V(n)$ pour tout n.
- On ne sait pas si $\lim_{n\to\infty} v(n) < \lim_{n\to\infty} V(n)$.
- Il y a des indications selon lesquelles $\lim_{n\to\infty} v(n) \approx 2$. On ne dispose pas de preuve de ce résultat !
- On n'a pas encore réussi à *imaginer* une stratégie permettant mieux que $V(n)$!