Séminaire du CREM
Nivelles- Vendredi 26 avril 2024

La résolution des contradictions.

Un levier pour développer les compétences logiques

Viviane Durand-Guerrier

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck,
CNRS, Univ. Montpellier

viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

Cette conférence (à l’exception du 4ème exemple) a été présentée une première fois en décembre 2022 à Cotonou (Bénin) au Colloque Espace Mathématique Francophone et sera publié dans les actes du colloque.

Introduction

Enoncés contradictoires

On dit que deux énoncés sont ***contradictoires*** s'ils échangent leurs valeurs de vérité, c'est-à-dire que si l'un est ***vrai***, alors l'autre est ***faux*** et vice-versa. Autrement dit, l'un est ***la négation*** de l'autre.

Exemples :

- 3 est un nombre pair / 3 n'est pas un nombre pair.
- Tout nombre se terminant par 7 est un nombre premier / Il existe un nombre se terminant par 7 qui n'est pas un nombre premier.
- Il existe un nombre entier dont le carré est 2 / Aucun nombre entier n'a pour carré 2.

Deux énoncés contradictoires ne peuvent pas être vrais en même temps, ni être faux en même temps (***sémantique***).

Dans une langue donnée, les énoncés contradictoires suivent des règles de grammaires (***syntaxe***).

Qu'est-ce qu'une contradiction ?

La conjonction de deux énoncés contradictoires est un énoncé qui est nécessairement faux. C'est une contradiction au sens logique : un énoncé de la forme $P \wedge \neg P$. *(P et non P).* Un tel énoncé est faux en raison de sa forme (***sa syntaxe***).

On dira qu'on est en présence d'une ***contradiction*** lorsque dans une situation donnée on est en présence de deux énoncés qui ***devraient être contradictoires (****en raison de leur grammaire, leur syntaxe****)***, mais qui sont ***interprétés*** dans cette situation comme étant ***tous les deux vrais (****leur sémantique****)***.

Cette définition prend en compte ***le contexte, la situation*** dans lesquels les énoncés sont produits et interprétés, ce qu'on appelle ***la dimension pragmatique.***

Qu’est-ce que résoudre une contradiction ?

Dans le monde réel ordinaire, comme en mathématiques, il n’est pas possible que deux énoncés contradictoires (*en raison de leur syntaxe*) soient simultanément vrais (*point de vue sémantique*).

Dans le cas où cela se produit, ***résoudre la contradiction***, c’est

- soit être capable de décider lequel des deux énoncés contradictoires est vrai (et par suite lequel est faux) ;

- soit remettre en cause des énoncés tenus pour vrais (implicites ou explicites) qui ont conduit à émettre les deux énoncés contradictoires, et faire des hypothèses alternatives ;

- soit montrer que d’autres interprétations des énoncés sont possibles (*point de vue sémantique*) et montrer que c’est bien le cas dans la situation (*point de vue pragmatique*).

- soit adopter un point de vue théorique alternatif.

Une situation ordinaire fictive mais réaliste

Un matin, Manuel arrive au travail et se rend compte qu'il n'a pas ses clés avec lui. Il est pourtant sûr d'avoir fermé la porte à clé. Il téléphone à un voisin qui habite dans le même immeuble. Il lui dit :

Quand je suis parti ce matin, j'ai fermé la porte à clé et ***les clés sont restées sur la porte***.

Et il lui demande s'il veut bien aller récupérer les clés et les garder jusqu'à ce qu'il rentre du travail.

5 minutes plus tard, son voisin le rappelle et lui dit :

Les clés ne sont pas restées sur la porte.

Ces deux énoncés sont ***contradictoires***. En effet, le second est la négation du premier.

Par suite, nécessairement, l'un est *vrai* et l'autre *faux*. Mais lequel ?

Une hypothèse explicite : Manuel a fermé la porte à clé.

Une hypothèse implicite : le voisin de palier ne ment pas.

Comment résoudre la contradiction :

Le voisin peut vérifier que la porte est fermée à clé.

Si ce n’est pas le cas – il y plusieurs possibilités, par exemple :

A1) ***Les clés sont à l’intérieur*** – Manuel a oublié de fermer la porte en partant - le premier énoncé est faux – la contradiction est résolue.

A2) ***L’appartement a été cambriolé*** – quelqu’un a vu les clés sur la porte et en a profité pour rentrer et voler quelques objets. La contradiction n’était qu’apparente. Il faut introduire ici le paramètre temps.

Autres hypothèses…

Un exemple tiré de Sparkling Cyanide (Agatha Christie, 1944)

Cet exemple est analysé dans Durand-Guerrier (2006)

On trouve dans ce roman d'Agatha Christie, traduit en français sous le titre *Meurtre au champagne* un exemple de la résolution ingénieuse d’une contradiction.

A ce moment du roman, un des personnages, George Barton, a été assassiné.

Tony, qui était présent le jour du meurtre expose avec brio à Iris, elle aussi présente le jour du meurtre, sa solution au problème insoluble a priori qui s’est posé suite à l’assassinat de George, solution qu'il qualifie de *géniale*.

En effet, il apparaît que

George n’a pas pu être empoisonné

et pourtant

George a été empoisonné.

De ces deux énoncés, dérive la contradiction

George n'a pas été empoisonné.

et

George a été empoisonné.

En considérant l’énoncé implicite suivant

« *on ne peut pas avoir mis du poison dans la coupe de George sans l'avoir touchée.* »,

un autre énoncé contradictoire est relevé par Tony :

Personne n’a touché à la coupe de George

et *quelqu’un a touché la coupe de George*

qui est de la forme $P \wedge \neg P$.

« L’affaire, grosso modo, *paraissait* simple comme bonjour. Ce que j’entends par là, c’est que les relations de cause à effet s’imposaient […]. L’enchainement logique, si je peux m’exprimer ainsi, semblait évident. Seulement quelques contradictions évidentes sont presque aussitôt apparues. Telles que :

a) Personne n’a *pu* être empoisonné
b) George a *été* empoisonné.
c) *Personne* n’a touché à la coupe de George
d) *Quelqu’un* a mis du poison dans la coupe de George. »

Tony poursuit

« En réalité, je négligeais un élément capital, à savoir les différents degrés d'appartenance.

« L' oreille de George » est incontestablement l'oreille de George. […] Mais par « la montre de George », je me borne à désigner la montre que porte George. […] Et quand j'en arrive à la « coupe de George » […] je commence à me rendre compte que l'appartenance évoquée recouvre une réalité des plus vagues (pp. 432-433)

Tony propose ainsi de se placer sur le niveau ***sémantique*** en considérant les différents degrés d'appartenance selon les objets considérés : *l'oreille de Georges / la coupe de Georges / la montre de Georges*.

Bien que les structures syntaxiques soient identiques, la « force » de relation d'appartenance dépend des objets dont on parle.

La reconnaissance de la faiblesse de la relation concernant la coupe laisse entrevoir une possibilité de résolution : *on pourrait imaginer qu'il y ait eu un changement dans les coupes, ce qui invaliderait le raisonnement conduisant à la contradiction*. Mais, à ce stade, rien ne permet de l'affirmer.

Pour montrer la possibilité de l’échange, Tony se livre alors à une petite expérience.

Il construit *une situation artificielle* dans laquelle l’énoncé implicite « *on ne peut pas avoir mis du poison dans la coupe de quelqu’un sans l'avoir touché* » est mis en défaut.

Pour cela, il s’installe avec deux personnes autour d’un guéridon, chacun ayant une tasse de thé devant lui contenant des boissons différentes mais semblant identiques ; l’un des personnages (Kemp) a une pipe posée à côté de sa tasse.

Sous un prétexte, Tony fait sortir à la hâte ses amis, et il profite de la bousculade pour changer la place de la pipe.

Lorsqu’ils rentrent à nouveau, le possesseur de la pipe s’assied à la place où se trouve sa pipe.

Tony s’exclame alors

« Oui, mais notez bien sur quoi débouche mon subterfuge : sur une nouvelle contradiction entre a) et b) !

En effet, a) la tasse de Kemp contenait du thé sucré –

b) la tasse de Kempf contenait du café.

Deux propositions antagonistes qui ne *pouvaient* être vraies toutes les deux…. Et qui pourtant l’étaient bien. »

Retour à la situation fictive initiale.

Cette expérience montre que l'on ne peut pas déduire de l'énoncé

« quelqu'un a *fourré* du poison dans la coupe de George » (1)

l'énoncé

« Quelqu'un a *touché* la coupe de George » (2)

Ceci ouvre la possibilité que l'énoncé (2) soit faux, bien qu'il soit établi que l'énoncé (1) soit vrai (*puisque Georges a été empoisonné*).

Autrement dit, il se peut que le contenu de la coupe de George ait été modifié sans que personne n'ait touché à la coupe de George.

A ce stade, c'est seulement une possibilité.

Pour poursuivre le raisonnement, il faut prendre en compte la dimension pragmatique : *examiner ce qui s'est réellement passé ce jour là, dans cette situation, dans ce lieu avec ces personnes.*

Ce que fait Tony après avoir décrit son expérimentation à Iris.

« Et ça Iris, <u>c’est ce qui s’est passé au Luxembourg le jour ou George Barton est mort</u>. A la fin des attractions, quand nous sommes tous allés danser, vous avez laissé tomber votre sac. Un garçon l’a ramassé, non pas *le* garçon qui connaissait votre place, mais *un* garçon, un petit serveur anxieux, pressé [...] Il a ramassé le sac et l’a placé près de l’assiette qui se trouvait à gauche de la vôtre, et vous êtes allée tout droit à la place indiquée par votre sac. »

Ce retour minutieux au fait renvoie à la dimension *pragmatique* de l’analyse logique.

Ceci ne clôt pas l’analyse de l’intrigue. A ce stade, il n’y a pas de certitude absolue de ce que les places ont été changées.

Mais le raisonnement de Tony oriente les recherches pour résoudre l’intrigue : en effet ceci conduit Tony à envisager que la personne visée était Iris. Ce qui se révèle être le cas dans la suite du roman.

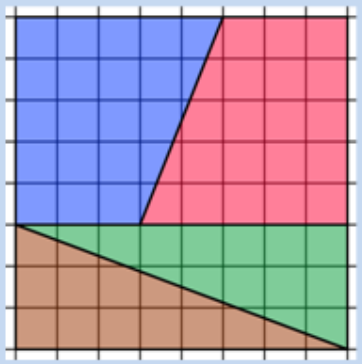
Un exemple classique en mathématiques
Le Puzzle de Lewis Carrol

Paradoxe de Lewis Carroll

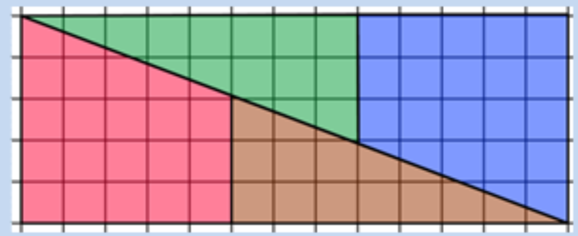
Problème

L'unité d'aire est un carreau.

1. Exprimer l'aire du carré ci-dessous en unités d'aire.



2. On découpe le carré comme indiqué et on reconstitue le rectangle ci-dessous.



Exprimer l'aire du rectangle en unités d'aire.

3. Quel est le problème ?

4. Expliquer ce paradoxe.

http://mathaulogis.wifeo.com/paradoxe-de-lewis-carroll.php

Pourquoi y-a-t-il une contradiction ?

1. Le rectangle est composé des quatre figures découpées qui composaient le carré. Donc, ***les deux quadrilatères ont la même aire*** (propriété d'équi-décomposabilité des aires).

2. a) Le carré est composé de 8 lignes comportant chacune 8 carreaux. Il contient donc 64 petits carreaux. L'unité d'aire est le petit carreau. Son aire est donc égale à 64 ;

2. b) Le rectangle est composé de cinq lignes comportant chacune 13 carreaux. L'unité d'aire est le petit carreau. Son aire est donc égale à 65.

Donc, ***les deux quadrilatères n'ont pas la même aire.***

Comment résoudre la contradiction ?

Les deux énoncés ne peuvent pas être simultanément vrais. Un seul des deux énoncés est vrai ; l’autre est faux.

1) On peut se convaincre facilement que le deuxième énoncé est vrai car le calcul de l’aire du carré et celui de l’aire du rectangle ne comportent pas d’erreur.

2) Par suite, le premier énoncé doit être faux. Pourtant, il semble également être vrai.

Examinons le raisonnement qui conduit au premier énoncé :

1) Le rectangle est composé de quatre figures identiques à celles qui composent le carré (découpage et recomposition).

2) La somme des aires des quatre figures qui composent le carré est égal à l'aire du carré (par construction).

3) On applique le théorème d'équi-décomposabilité des aires:

Si deux figures planes sont composés des mêmes sous figures, alors elles ont la même aire.

4) Conclusion : le rectangle a la même aire que le carré.

Pourtant le calcul montre que l'aire du rectangle est différente de celle du carré, et donc ***la conclusion est un énoncé faux***.

Reprenons le raisonnement

Comme le théorème est un énoncé vrai, le fait que la conclusion soit fausse conduit à déduire que les conditions d'application du théorème ne sont pas vérifiées. En effet :

Si le rectangle était recomposé avec quatre figures identiques à celles qui composaient le carré, il devrait avoir la même aire que le carré.

Or l'aire du rectangle est différente de l'aire du carré.

Donc ***le rectangle n'est pas obtenu par recomposition de quatre figures identiques à celles qui composent le carré.***

une *nouvelle contradiction*

Le rectangle est composé de quatre figures identiques à celles qui composent le carré,

Et ***le rectangle n'est pas composé de quatre figures identiques à celles qui composent le carré.***

Pour résoudre cette nouvelle contradiction, on va se tourner vers la géométrie et montrer que les deux segments qui semblent former la diagonale du rectangle ne sont pas portés par la même droite.

On peut par exemple utiliser le théorème de Thalès ou déterminer les coefficients directeurs des droites correspondantes et montrer qu'ils sont différents.

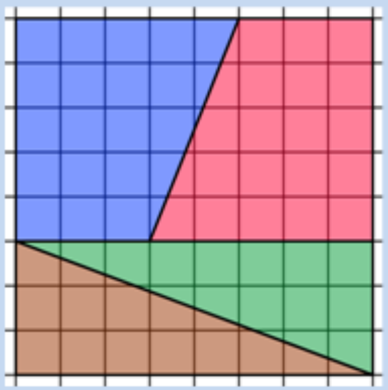
Le puzzle de Lewis Carroll (7)

Paradoxe de Lewis Carroll

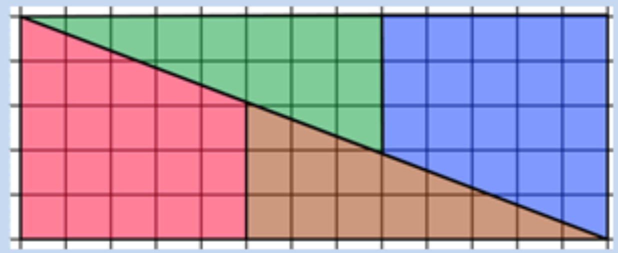
Problème

L'unité d'aire est un carreau.

1. Exprimer l'aire du carré ci-dessous en unités d'aire.



2. On découpe le carré comme indiqué et on reconstitue le rectangle ci-dessous.



Exprimer l'aire du rectangle en unités d'aire.

3. Quel est le problème ?
4. Expliquer ce paradoxe.

http://mathaulogis.wifeo.com/paradoxe-de-lewis-carroll.php

Une preuve par contradiction adaptée d'une preuve présente dans les éléments d'Euclide

Une question non triviale (pour quelqu'un qui ne connaîtrait pas la réponse) concerne l'existence ou non d'un plus grand nombre premier.

Cette question est d'autant moins triviale qu'on ne dispose pas d'un processus d'engendrement simple des nombres premiers et que ceux-ci se font de plus en plus rares à mesure que l'on avance dans la suite des nombres entiers.

Dans la mesure où l'on ne sait pas ce qu'il en est, on a deux choix possibles : supposer qu'un tel nombre existe et essayer de le prouver ; ou supposer qu'il n'existe pas et essayer de le prouver.

La preuve d'Euclide consiste à montrer que si on prend trois nombres premiers, on peut en construire un quatrième différent des trois autres. Il utilise pour cela le fait que tout nombre entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier (Lemme d'Euclide)..

Une adaptation de la preuve d'Euclide

On suppose qu'il existe un plus grand nombre premier, ou ce qui revient au même que la suite ordonnée des nombres premier est finie. On note n le rang du dernier terme de la suite et on note p_k le terme de rang k pour k compris entre 1 et n.

En utilisant le lemme d'Euclide, on établit l'énoncé ci-dessous

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{N}\ \exists \boldsymbol{k} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}\}, \boldsymbol{p_k}\ \boldsymbol{divise}\ \boldsymbol{x}\ \mathbf{(1)}$$

On considère alors le nombre :

$$P = 1 + \prod_{k=1}^{k=n} p_k$$

P est un entier naturel et il n'est divisible par aucun des nombres premiers $\boldsymbol{p_k}$. D'où

$$\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{N}\ \forall \boldsymbol{k} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}\}, \boldsymbol{p_k}\ \textbf{ne divise}\ \boldsymbol{pas}\ \ \boldsymbol{x}\ \mathbf{(2)}$$

L'énoncé (2) est la négation de l'énoncé (1). Ils ne peuvent pas être tous les deux vrais.

La vérité de l’énoncé énoncé (2) est assurée par la construction effective de l’élément *P* à partir des nombres premiers de la suite finie.

On en conclut que l’énoncé (1) est faux. Cet énoncé est une conséquence logique de l’hypothèse qu’il y a un plus grand nombre premier et du lemme d’Euclide.

Le lemme d’Euclide est un théorème de l’arithmétique des entiers ; on doit donc rejeter l’hypothèse qu’il y a un plus grand nombre premier ; autrement dit la suite des nombres premier est *potentiellement infinie*.

On a donc prouvé ***par contradiction*** qu’aucune suite finie (*aucune collection finie*) n’épuise la totalité des nombres premiers.

Ceci correspond à ce qu’il est habituel de nommer un ***raisonnement par l’absurde*.**

Une contradiction résolue par une définition théorique

La contradiction que nous examinons est discutée dans un texte célèbre de Galilée, traduit en français dans Galilée (1966).

Elle apparaît en lien avec un questionnement sur la possibilité de comparer les infinis.

Au cours du dialogue entre les personnages la contradiction suivante va émerger :

il y a autant de nombres carrés que de nombres entiers et ***il y a plus de nombres entiers que de nombres carrés***.

Le premier énoncé est vrai car à chaque entier correspond son carré et étant donné un nombre carré, il existe exactement un entier naturel dont ce nombre est le carré.

Le second énoncé est vrai car il y a de nombreux nombres entiers qui ne sont pas des nombres carrés.

Une première étape pour résoudre la contradiction consiste à remarquer que si on considère que

le tout est formé de tous les entiers inférieurs à un entier donné,

et

la partie est formée des éléments de ce tout qui sont des carrés d'entiers,

alors le premier énoncé est faux : il n'y a pas autant de carré d'entiers que d'entiers.

Nous sommes dans le fini, ***il n'y a pas de contradiction***.

Une deuxième étape consiste à considérer ***l'énumération simultanée des nombres entiers et de leurs carrés***.

On construit ainsi deux suites en correspondance biunivoque. Étant donné un rang *k*, on peut considérer les deux ensembles comportant les valeurs de chacune des deux suites jusqu'au rang k.

Ces deux ensembles ont la même taille, mais aucun n'est inclus dans l'autre.

Dans ce contexte, l'énoncé : ***il y a plus de nombres entiers que de nombres carrés est faux***. Il n'y a donc pas de contradiction, et ce même si on considère que l'énumération ne s'arrête pas, autrement dit même si on se place dans le point de vue de l'infini potentiel , associé à la suite illimitée des nombres entiers.

Comme le savait bien Galilée, la contradiction apparaît lorsque l'on envisage de considérer la ***collection achevée*** de tous les entiers et celle de tous les nombres carrés.

Dans ce cas la collection des nombres carrés est une partie propre de la collection des entiers.

Suivant l'axiome euclidien du tout et de la partie, l'ensemble des entiers est plus grand que l'ensemble des carrés d'entiers, mais d'après la correspondance biunivoque, les deux collections devraient avoir la même taille.

Pour résoudre la contradiction, il faut distinguer deux choses : ***l'inclusion comme ordre partiel sur les ensembles*** ;

l'ordre induit par la mise en correspondance biunivoque entre les éléments de deux ensembles. Cet ordre permet pour les collections finies de comparer leur taille, et ce indépendamment de la nature des objets qui composent ces collections.

Ce que montre l'exemple discuté par Galilée, c'est que dès lors que l'on considère des quantités infinies (au sens de collections d'objets) dont l'une est incluse dans l'autre les deux ordres (inclusion et comparaison de la taille) ne coïncident pas, au sens où il est possible qu'une partie propre ait la même taille que la collection totale (*par mise en correspondance biunivoque*) , ce qui est en contradiction avec l'axiome euclidien du tout et de la partie.

Ceci a conduit Galilée, et d'autres mathématiciens après lui, à refuser l'existence d'un infini actuel.

Deux siècles plus tard, Dedekind choisit de s'affranchir de l'axiome euclidien du tout et de la partie ***en définissant les ensembles infinis comme des ensembles pouvant être mis en bijection avec une de leur partie propre.***

Ce faisant, Dedekind donne ***un statut théorique à l'infini actuel*** dans le cas des ensembles.

Ceci permet de résoudre la contradiction initiale en considérant que l'expression : « ***plus*** …***que*** » dans la deuxième phrase s'interprète du point de vue de l'inclusion entre ensembles, tandis que l'expression « ***autan*****t** …**que** » dans la première phrase s'interprète en termes de correspondance biunivoque (bijection).

L'existence de cette bijection, entre l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des nombres qui sont des carrés d'entiers, permet de prouver que l'ensemble des entiers naturels est un ensemble infini au sens de Dedekind.

Conclusion

Les contradictions sont présentes en mathématiques et dans de nombreux domaines de l'activité humaine.

Leur résolution met en jeu les *aspects syntaxiques* (la grammaire des énoncés), les *aspects sémantiques* (ce à quoi renvoient les énoncés et leur valeur de vérité) et les *aspects pragmatiques* (l'interprétation et les usages des énoncés par les sujets humains dans une situation donnée).

Réfléchir à la manière de résoudre les contradictions permet de reconsidérer certaines hypothèses que l'on tenait pour vraies et d'envisager de nouvelles possibilités qui auraient pu nous échapper, en conduisant une analyse logique des raisonnements en jeu.

De ce fait, ce travail contribue au développement de compétences logiques.

En outre on peut faire l'hypothèse qu'un travail explicite en classe sur la résolution des contradictions pourrait servir de prolégomènes à l'étude du ***raisonnement par l'absurde*** dont le schéma peut s'interpréter dans cette perspective de la résolution des contradictions, comme on l'a vu dans le quatrième exemple:

Sous une hypothèse A (la négation de ce que l'on veut prouver), on établit ***une contradiction*** (un énoncé de la forme P et non P). Pour résoudre cette contradiction, on rejette l'hypothèse A, ce qui revient à accepter la négation de A, c'est-à-dire en logique classique l'énoncé de départ.

Références

CHRISTIE, A (1944) *Sparkling Cyanide*. Collins. Traduction française : *Meurtre au champagne*, 1983, Le Masque.

DEDEKIND, R. (2008). *La création des nombres*, traduction et notes par H. Sinaceur. Paris : Vrin.

DURAND-GUERRIER, V. (2006) La résolution des contradictions: apports de la sémantique logique. In V. Durand-Guerrier, J.L. Héraud, C. Tisseron (2006) Jeux et enjeux de langage dans l'élaboration des savoirs en classe. Lyon, Presses Universitaires de Lyon, 161-179..

DURAND-GUERRIER, V. La résolution de contradictions. Un levier pour développer les compétences logiques. A paraître dans les actes du colloque EMF 2022, Cotonou (Benin), décembre 2022.