Mathématiques, théorie des jeux et prix Nobel

Thomas BRIHAYE

Service de Mathématiques Effectives
Département de Mathématique
UMONS

Séminaire du CREM – 7 novembre 2014

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Le jeu de Nim

Les règles du jeu

- Il s'agit d'un jeu à deux joueurs.
- Les joueurs jouent à tour de rôle.
- Une pile de n pièces est posée sur une table.
- A chaque étape, le joueur qui a la main retire 1 ou 2 pièces.
- Le joueur qui retire la dernière pièce **perd** la partie.

Modélisation d’une partie

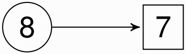
Au départ: **8** pièces dans la pile. Joueur 1: Adam ; joueur 2: Eve.

8

Modélisation d'une partie

Au départ: **8** pièces dans la pile. Joueur 1: Adam ; joueur 2: Eve.

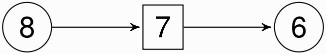
- Adam retire **1** pièce.



Modélisation d'une partie

Au départ: **8** pièces dans la pile. Joueur 1: Adam ; joueur 2: $\boxed{\text{Eve}}$.

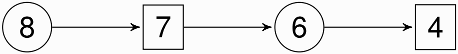
- Adam retire **1** pièce.
- $\boxed{\text{Eve}}$ retire **1** pièce.



Modélisation d'une partie

Au départ: **8** pièces dans la pile. Joueur 1: Adam ; joueur 2: Eve.

- Adam retire **1** pièce.
- Eve retire **1** pièce.
- Adam retire **2** pièces.



Modélisation d’une partie

Au départ: **8** pièces dans la pile. Joueur 1: Adam ; joueur 2: Eve.

- Adam retire **1** pièce.
- Eve retire **1** pièce.
- Adam retire **2** pièces.
- Eve retire **2** pièces.

Modélisation d’une partie

Au départ: **8** pièces dans la pile. Joueur 1: Adam ; joueur 2: $\boxed{\text{Eve}}$.

- Adam retire **1** pièce.
- $\boxed{\text{Eve}}$ retire **1** pièce.
- Adam retire **2** pièces.
- $\boxed{\text{Eve}}$ retire **2** pièces.
- Adam retire **1** pièce.

$$8 \longrightarrow \boxed{7} \longrightarrow 6 \longrightarrow \boxed{4} \longrightarrow 2 \longrightarrow \boxed{1}$$

Modélisation d’une partie

Au départ: **8** pièces dans la pile. Joueur 1: Adam ; joueur 2: Eve.

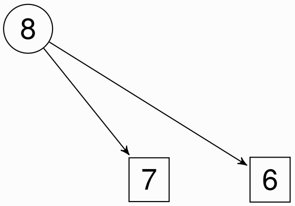
- Adam retire **1** pièce.
- Eve retire **1** pièce.
- Adam retire **2** pièces.
- Eve retire **2** pièces.
- Adam retire **1** pièce.
- Eve retire **1** pièce.

$$8 \to 7 \to 6 \to 4 \to 2 \to 1 \to 0$$

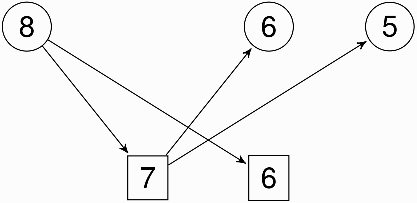
Adam remporte la partie!

Un modèle pour le jeu de Nim

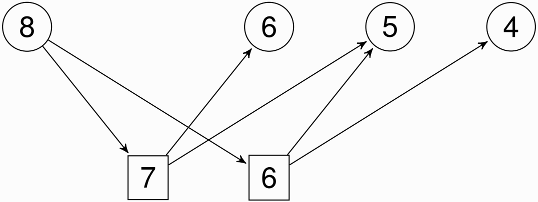
Un modèle pour le jeu de Nim



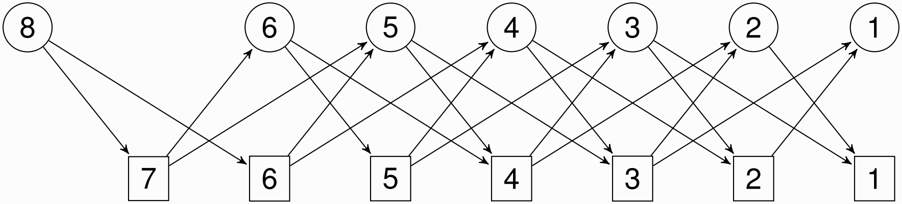
Un modèle pour le jeu de Nim



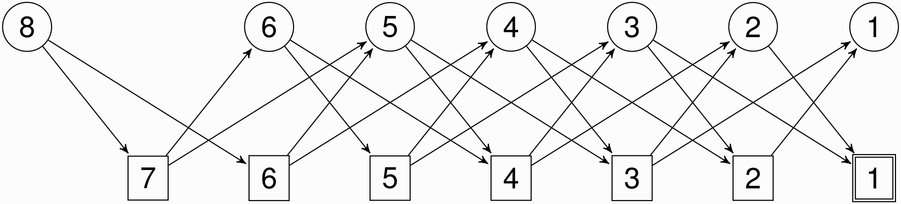
Un modèle pour le jeu de Nim



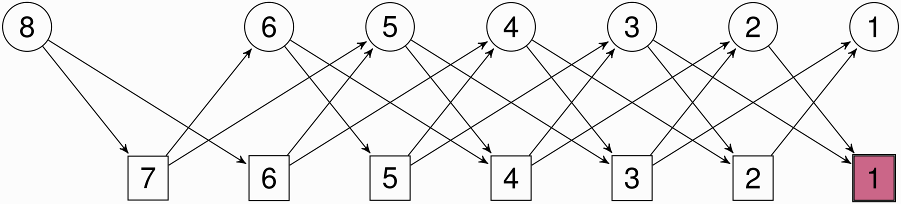
Un modèle pour le jeu de Nim



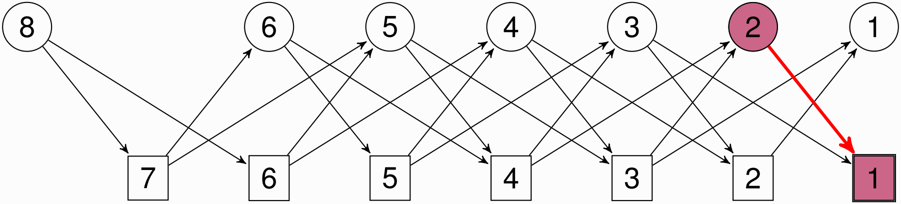
Un modèle pour le jeu de Nim



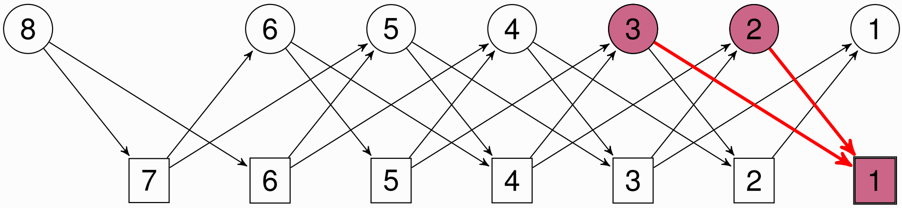
Pourquoi Adam a battu Eve ?



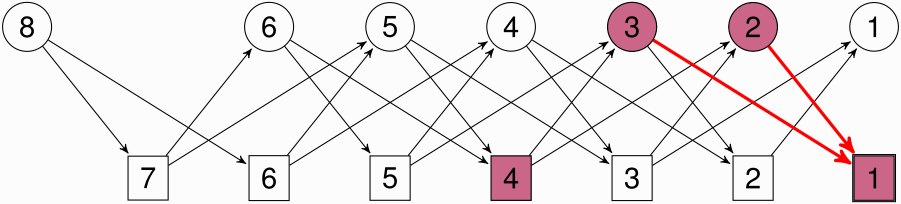
Pourquoi Adam a battu Eve ?



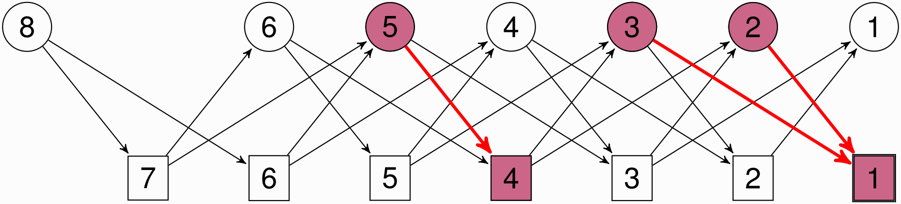
Pourquoi Adam a battu Eve ?



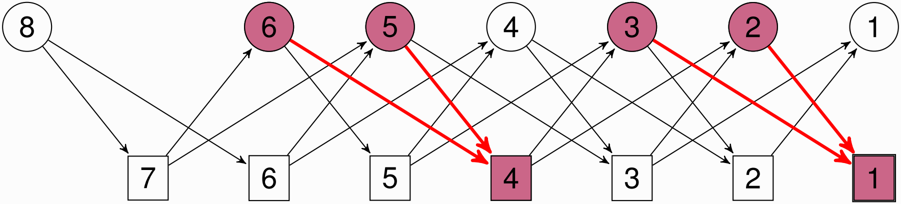
Pourquoi Adam a battu Eve ?



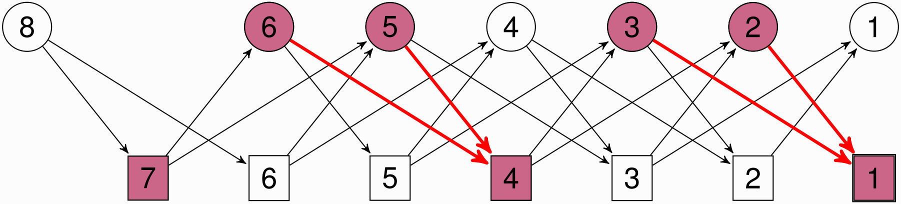
Pourquoi Adam a battu Eve ?



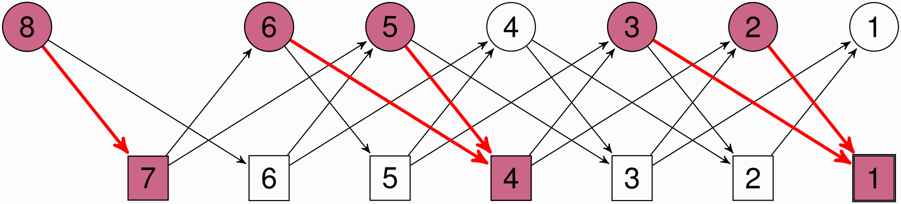
Pourquoi Adam a battu Eve ?



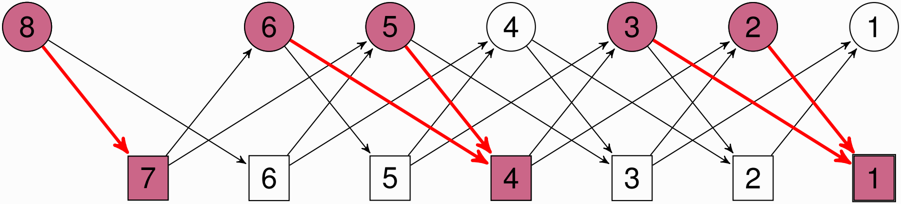
Pourquoi Adam a battu Eve ?



Pourquoi Adam a battu Eve ?



Pourquoi Adam a battu Eve ?



Remarque importante

Cette technique (appelée **backward induction**) permet de calculer des stratégies gagnantes dans les **jeux combinatoires.**

Un peu d'arithmétique…

Division Euclidienne

Soit $a \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}_0$, il existe deux uniques naturels q, $r \in \mathbb{N}$ tels que:

$$a = d \cdot q + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < d.$$

- On appelle a le dividende, d le diviseur, q le quotient et r le reste.
- Le reste r (de la division de a par d) est noté $a \bmod d$.

Un peu d'arithmétique…

Division Euclidienne

Soit $a \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}_0$, il existe deux uniques naturels $q, r \in \mathbb{N}$ tels que:

$$a = d \cdot q + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < d.$$

- On appelle a le dividende, d le diviseur, q le quotient et r le reste.
- Le reste r (de la division de a par d) est noté $a \bmod d$.

$$\begin{array}{r|l}
8\,5\,7 & \underline{\;\;7\;\;} \\
-7 & 1\,2\,2 \\
1\,5 & \\
-1\,4 & \\
1\,7 & \\
-1\,4 & \\
3 &
\end{array}$$

Quand on divise 857 par 7:

$$857 = 7 \cdot 122 + 3$$

$$857 \bmod 7 = 3$$

Résultats

Théorème

Dans le jeu de Nim avec n pièces,

- Le premier joueur a une **stratégie gagnante** ssi $n \bmod 3 \neq 1$.
- La **stratégie gagnante** consiste à

$$\text{laisser } k \text{ pièces tel que } k \bmod 3 = 1.$$

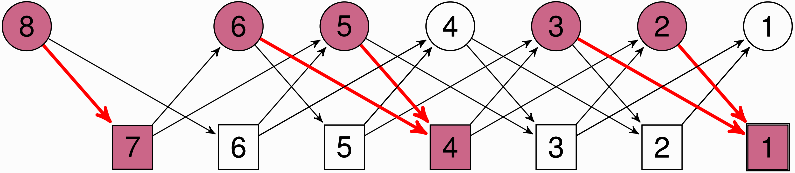
Résultats

Théorème

Dans le jeu de Nim avec n pièces,

- Le premier joueur a une **stratégie gagnante** ssi $n \bmod 3 \neq 1$.
- La **stratégie gagnante** consiste à

  laisser k pièces tel que $k \bmod 3 = 1$.



- $8 \bmod 3 = 2 \neq 1$ $\rightsquigarrow$ le premier joueur a une stratégie gagnante.
- $7 \bmod 3 = 4 \bmod 3 = 1 \bmod 3 = 1$.

Résultats (suite)

Théorème

Dans le jeu de Nim avec n pièces,

- Le second joueur a une **stratégie gagnante** ssi $n \bmod 3 = 1$.
- La **stratégie gagnante** consiste à

  laisser k pièces tel que $k \bmod 3 = 1$.

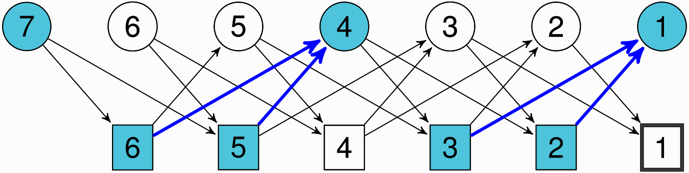
Résultats (suite)

Théorème

Dans le jeu de Nim avec n pièces,

- Le second joueur a une **stratégie gagnante** ssi $n \bmod 3 = 1$.
- La **stratégie gagnante** consiste à

  laisser k pièces tel que $k \bmod 3 = 1$.



- $7 \bmod 3 = 1 \quad \rightsquigarrow \quad$ le second joueur a une stratégie gagnante.
- $4 \bmod 3 = 1 \bmod 3 = 1$.

Plan de l'exposé

Jeux combinatoires

Un **jeu combinatoire** est un jeu

- à deux joueurs (pas le foot, ni le rugby),
- où les joueurs jouent à tour de rôle (pas *“Pierre-Papier-Ciseaux”*),
- fini (pas le tennis),
- à information parfaite (pas le poker, ni la bataille navale),
- sans intervention du hasard (pas le monopoly, ni le jeu de l’oie).

Jeux combinatoires

Un **jeu combinatoire** est un jeu

- à deux joueurs (pas le foot, ni le rugby),
- où les joueurs jouent à tour de rôle (pas *"Pierre-Papier-Ciseaux"*),
- fini (pas le tennis),
- à information parfaite (pas le poker, ni la bataille navale),
- sans intervention du hasard (pas le monopoly, ni le jeu de l'oie).

Exemples

Puissance 4, Dames, Echecs,...

Théorème de Zermelo (1913)

Dans un jeu combinatoire fini, avant le début du jeu, on sait déjà que:

- soit exactement un des deux joueurs possède une stratégie gagnante (non perdante),
- soit les deux joueurs peuvent forcer un match nul.

Théorème de Zermelo (1913)

Dans un jeu combinatoire fini, avant le début du jeu, on sait déjà que:

- soit exactement un des deux joueurs possède une stratégie gagnante (non perdante),
- soit les deux joueurs peuvent forcer un match nul.

Preuve: Pour obtenir les stratégies gagnantes:

- On construit un modèle du jeu (le modèle est fini car le jeu est fini).
- On applique la **backward induction**.

$\square$

Théorème de Zermelo (1913)

Dans un jeu combinatoire fini, avant le début du jeu, on sait déjà que:

- soit exactement un des deux joueurs possède une stratégie gagnante (non perdante),
- soit les deux joueurs peuvent forcer un match nul.

Preuve: Pour obtenir les stratégies gagnantes:

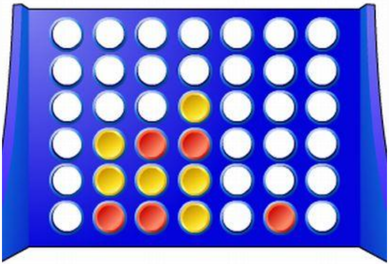
- On construit un modèle du jeu (le modèle est fini car le jeu est fini).
- On applique la **backward induction**.

□

Et en pratique ?

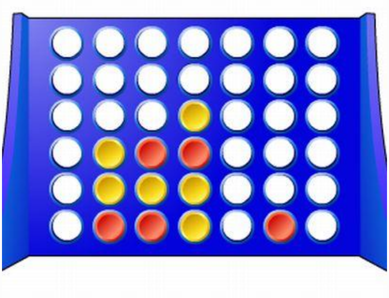
La taille du modèle peut être **gigantesque** et la stratégie gagnante incroyablement complexe (même pour un ordinateur)!!!

Puissance 4 (commercialisé depuis 1974)



Un modèle du jeu de Puissance 4 contient plus de **4.10^{12}** états.

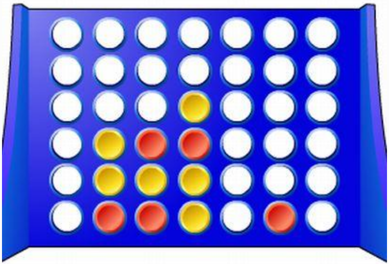
Puissance 4 (commercialisé depuis 1974)



Un modèle du jeu de Puissance 4 contient plus de **4.10^{12}** états.

Le nombre d'étoiles dans notre galaxie est de l'ordre de **3.10^{11}**.

Puissance 4 (commercialisé depuis 1974)



Un modèle du jeu de Puissance 4 contient plus de **4.10^{12}** états.

Le nombre d'étoiles dans notre galaxie est de l'ordre de **3.10^{11}**.

Résolution du Puissance 4

Une description complète d'une stratégie **gagnante** pour le joueur qui commence à jouer n'a été proposée qu'en **1988**.

Les échecs

Un modèle du jeu pour les échecs contient plus de $\mathbf{10^{43}}$ états.

Les échecs

Un modèle du jeu pour les échecs contient plus de $\mathbf{10^{43}}$ états.

Le **Sequoia** (IBM 2012) d'une puissance de 16,324 PFlops

$$16,324 \text{ PFlops } = 16,324 \cdot 10^{15} = 16\,324\,000\,000\,000\,000 \text{ op/sec}$$

a besoin de $\mathbf{10^{26}}$ sec. pour effectuer *naïvement* la backward induction.

Les échecs

Un modèle du jeu pour les échecs contient plus de $\mathbf{10^{43}}$ états.

Le **Sequoia** (IBM 2012) d'une puissance de 16,324 PFlops

$$16,324 \text{ PFlops} = 16,324 \cdot 10^{15} = 16\,324\,000\,000\,000\,000 \text{ op/sec}$$

a besoin de $\mathbf{10^{26}}$ sec. pour effectuer *naïvement* la backward induction.

Depuis le big bang, il s'est écoulé moins de $\mathbf{10^{17}}$ secondes...

C’est rigolo...

... mais ça sert à quoi ???

Application: pilote automatique d'un avion

- Le joueur 1 modélise le pilote automatique.
- Le joueur 2 modélise les conditions météorologiques.
- F_1 modélise la ville que l'avion souhaite atteindre (ex: New York).

Application: pilote automatique d'un avion

- Le joueur 1 modélise le pilote automatique.
- Le joueur 2 modélise les conditions météorologiques.
- F_1 modélise la ville que l'avion souhaite atteindre (ex: New York).

J_1 possède une stratégie gagnante face à J_2 pour atteindre F_1 signifie

Le pilote automatique peut amener l'avion à New York,
quelles que soient les conditions météorologiques.

Plan de l'exposé

Une opportunité en or !!!

Pour un court instant, faisons l'hypothèse (peu plausible) suivante:

> *Je suis un homme d'affaires brillant, honnête et totalement fiable.*

Une opportunité en or !!!

Pour un court instant, faisons l'hypothèse (peu plausible) suivante:

Je suis un homme d'affaires brillant, honnête et totalement fiable.

Je propose (à chacun d'entre vous) d'investir **100 €** dans ma société.

Une opportunité en or !!!

Pour un court instant, faisons l'hypothèse (peu plausible) suivante:

Je suis un homme d'affaires brillant, honnête et totalement fiable.

Je propose (à chacun d'entre vous) d'investir **100 €** dans ma société.

Offre d'investissement individuelle

Vous pouvez **I**nvestir ou **R**efuser.

Une opportunité en or !!!

Pour un court instant, faisons l'hypothèse (peu plausible) suivante:

Je suis un homme d'affaires brillant, honnête et totalement fiable.

Je propose (à chacun d'entre vous) d'investir **100 €** dans ma société.

Offre d'investissement individuelle

Vous pouvez **I**nvestir ou **R**efuser.

Si vous **R**efusez, vous ne gagnerez rien.

Une opportunité en or !!!

Pour un court instant, faisons l'hypothèse (peu plausible) suivante:

Je suis un homme d'affaires brillant, honnête et totalement fiable.

Je propose (à chacun d'entre vous) d'investir **100 €** dans ma société.

Offre d'investissement individuelle

Vous pouvez **I**nvestir ou **R**efuser.

Si vous **R**efusez, vous ne gagnerez rien.

Si vous **I**nvestissez,

vous **gagnerez 150 €** si plus de 51 % **I**nvestit.

vous **perdrez 100 €** si moins de 51 % **I**nvestit.

Jouons ensemble !

Règles du jeu

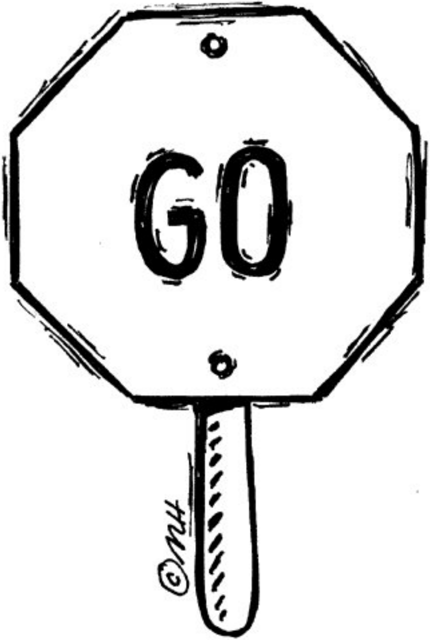
- Vous ne pouvez pas communiquer entre vous.
- Je vais compter **3, 2, 1, Go!**
  Ceux qui souhaitent **I**nvestir devront lever la main au moment du **Go**.
- Si vous **R**efusez, vous ne gagnerez rien.
- Si vous **I**nvestissez,
  - vous **gagnerez 150 €** si plus de 51 % de la salle **I**nvestit.
  - vous **perdrez 100 €** si moins de 51 % de la salle **I**nvestit.

Souhaitez-vous **I**nvestir ?


3


2


1


GO

Votre choix était-il rationnel ?

Le cas de deux investisseurs

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathbf{I} & \mathbf{R} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \end{array} & \begin{pmatrix} (150, 150) & (-100, 0) \\ (0, -100) & (0, 0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Le cas de deux investisseurs

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad\mathbf{I} \quad & \quad \mathbf{R} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \end{array} & \begin{pmatrix} (150, 150) & (-100, 0) \\ (0, -100) & (0, 0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Le concept de **stratégie gagnante** n'a plus de sens dans ce contexte.

- **I**nvestir n'est intéressant que si l'autre **I**nvestit.
- **R**efuser n'est intéressant que si l'autre **R**efuse.

Le cas de deux investisseurs

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathbf{I} & \mathbf{R} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \end{array} & \begin{pmatrix} (150, 150) & (-100, 0) \\ (0, -100) & (0, 0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Le concept de **stratégie gagnante** n'a plus de sens dans ce contexte.

- **I**nvestir n'est intéressant que si l'autre **I**nvestit.
- **R**efuser n'est intéressant que si l'autre **R**efuse.

$\rightsquigarrow$ on a besoin d'un nouveau concept... une notion d'**équilibre**...

Meilleure Réponse

Meilleure Réponse (de J_1)

Soit s_2 une stratégie de mon adversaire (J_2).
Une stratégie s_1 (de J_1) est une **Meilleure Réponse** face à s_2 ssi

Sachant que J_2 joue s_2, J_1 maximise son gain en jouant s_1.

Meilleure Réponse

Meilleure Réponse (de J_1)

Soit s_2 une stratégie de mon adversaire (J_2).
Une stratégie s_1 (de J_1) est une **Meilleure Réponse** face à s_2 ssi

Sachant que J_2 joue s_2, J_1 maximise son gain en jouant s_1.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathbf{I} & \mathbf{R} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \end{array} & \begin{pmatrix} (\mathbf{150}, 150) & (-100, 0) \\ (\mathbf{0}, -100) & (0, 0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Sachant que J_2 joue **I**, J_1 maximise son gain en jouant **I**.

La strat. **I** (de J_1) est une meilleure réponse face à la strat. **I** (de J_2).

Meilleure Réponse

Meilleure Réponse (de J_1)

Soit s_2 une stratégie de mon adversaire (J_2).
Une stratégie s_1 (de J_1) est une **Meilleure Réponse** face à s_2 ssi

Sachant que J_2 joue s_2, J_1 maximise son gain en jouant s_1.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathbf{I} & \mathbf{R} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \end{array} & \begin{pmatrix} (150, 150) & (-\mathbf{100}, 0) \\ (0, -100) & (\mathbf{0}, 0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Sachant que J_2 joue **R**, J_1 maximise son gain en jouant **R**.

La strat. **R** (de J_1) est une meilleure réponse face à la strat. **R** (de J_2).

Meilleure Réponse

Meilleure Réponse (de J_2)

Soit s_1 une stratégie de mon adversaire (J_1).
Une stratégie s_2 (de J_2) est une **Meilleure Réponse** face à s_1 ssi

Sachant que J_1 joue s_1, J_2 maximise son gain en jouant s_2.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathbf{I} & \mathbf{R} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \end{array} & \begin{pmatrix} (150, 150) & (-100, 0) \\ (0, -\mathbf{100}) & (0, \mathbf{0}) \end{pmatrix} \end{array}$$

Sachant que J_1 joue **R**, J_2 maximise son gain en jouant **R**.

La strat. **R** (de J_2) est une meilleure réponse face à la strat. **R** (de J_1).

Equilibre de Nash

Pour contenter tout le monde, on cherche un couple (s_1, s_2):

- s_1 est une **meilleure rép.** face à s_2,
- s_2 est une **meilleure rép.** face à s_1.

Equilibre de Nash

Pour contenter tout le monde, on cherche un couple (s_1, s_2):

- s_1 est une **meilleure rép.** face à s_2,
- s_2 est une **meilleure rép.** face à s_1.

Dans une telle situation, personne n'a intérêt à changer...

Equilibre de Nash

Pour contenter tout le monde, on cherche un couple (s_1, s_2):

- s_1 est une **meilleure rép.** face à s_2,
- s_2 est une **meilleure rép.** face à s_1.

Dans une telle situation, personne n'a intérêt à changer...

Equilibre de Nash

On dira que (s_1, s_2) est un *équilibre de Nash* si aucun joueur n'a intérêt à changer seul de stratégie.

s_1 est une meilleure rép. face à s_2,

s_2 est une meilleure rép. face à s_1.

Equilibres de Nash dans le jeu d'investissement

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathbf{I} & \mathbf{R} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \end{array} & \begin{pmatrix} (\mathbf{150}, \mathbf{150}) & (-100, 0) \\ (0, -100) & (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \end{pmatrix} \end{array}$$

On a deux équilibres de Nash dans cet exemple:

$$(\mathbf{I}, \mathbf{I}) \qquad \text{et} \qquad (\mathbf{R}, \mathbf{R}).$$

Equilibres de Nash dans le jeu d'investissement

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathbf{I} & \mathbf{R} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \end{array} & \begin{pmatrix} (\mathbf{150}, \mathbf{150}) & (-100, 0) \\ (0, -100) & (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \end{pmatrix} \end{array}$$

On a deux équilibres de Nash dans cet exemple:

$$(\mathbf{I}, \mathbf{I}) \qquad \text{et} \qquad (\mathbf{R}, \mathbf{R}).$$

La notion d'équilibre de Nash s'étend aux jeux à n joueurs...

Dans le jeu d'investissement, il n'y a que deux équilibres de Nash:

tout le monde **I**nvestit et tout le monde **R**efuse.

Plan de l'exposé

Le penalty

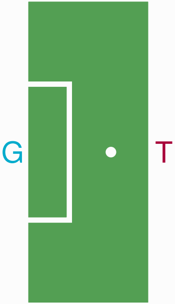
Importance du penalty

- Finale de la coupe du monde 2006: Italie 1 (5) - France 1 (3)
  Penalty français manqué de Trezeguet

- Finale de la coupe du monde 1994: Brésil 0 (3) - Italie 0 (2)
  Penalty italien manqué par Baggio

- ...

Le penalty - Les règles du jeu

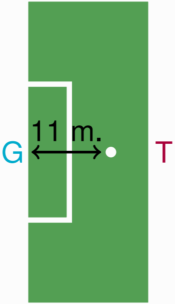


Un tireur T fait face à un gardien G.

L'objectif du T est de faire rentrer le ballon dans le but.

L'objectif du G est de l'en empêcher.

Le penalty - Les règles du jeu



Un tireur T fait face à un gardien G.

L'objectif du T est de faire rentrer le ballon dans le but.

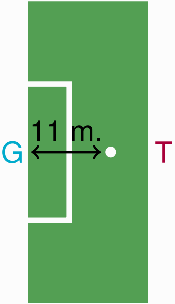
L'objectif du G est de l'en empêcher.

Le ballon est placé à 11 mètres de la ligne de but.

Dans le cas d'un tir à 150 Km/h,

le ballon atteint la ligne de but en **moins de 0.3 sec**.

Le penalty - Les règles du jeu



Un tireur T fait face à un gardien G.

L'objectif du T est de faire rentrer le ballon dans le but.

L'objectif du G est de l'en empêcher.

Le ballon est placé à 11 mètres de la ligne de but.

Dans le cas d'un tir à 150 Km/h,

le ballon atteint la ligne de but en **moins de 0.3 sec**.

Le gardien n'a donc pas le temps de réagir une fois le ballon frappé.

$\rightsquigarrow$ On supposera donc que T et G jouent **simultanément**.

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Dans un premier temps, nous supposerons:

- Le Tireur ne peut tirer qu'à **Ga**uche ou à **Dr**oite.
- Le Gardien ne peut plonger qu'à **Ga**uche ou à **Dr**oite.
- Le Tireur ne manque jamais sa cible.
- Le Gardien, s'il plonge du bon côté, bloque toujours le tir.

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Dans un premier temps, nous supposerons:

- Le Tireur ne peut tirer qu'à **Ga**uche ou à **Dr**oite.
- Le Gardien ne peut plonger qu'à **Ga**uche ou à **Dr**oite.
- Le Tireur ne manque jamais sa cible.
- Le Gardien, s'il plonge du bon côté, bloque toujours le tir.

$$\begin{array}{cc} & \text{Gardien} \\ & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Dans un premier temps, nous supposerons:

- Le Tireur ne peut tirer qu'à **Ga**uche ou à **Dr**oite.
- Le Gardien ne peut plonger qu'à **Ga**uche ou à **Dr**oite.
- Le Tireur ne manque jamais sa cible.
- Le Gardien, s'il plonge du bon côté, bloque toujours le tir.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Ce jeu ne possède aucun équilibre de Nash!

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Plaçons-nous dans la peau d'un joueur professionnel (qui doit souvent tirer des penaltys) et demandons-nous:

"De quel côté dois-je tirer ?"

$$\begin{array}{cc} & \text{Gardien} \\ & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Plaçons-nous dans la peau d'un joueur professionnel (qui doit souvent tirer des penaltys) et demandons-nous:

"De quel côté dois-je tirer ?"

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Idée 1: Toujours tirer à **G**auche,

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Plaçons-nous dans la peau d'un joueur professionnel (qui doit souvent tirer des penaltys) et demandons-nous:

"De quel côté dois-je tirer ?"

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0, 100) & (100, 0) \\ (100, 0) & (0, 100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Idée 1: Toujours tirer à **G**auche,

les Gardiens vont vite comprendre ma stratégie...

... ils plongeront toujours à **Ga**uche et je ne marquerai plus jamais!

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Plaçons-nous dans la peau d'un joueur professionnel (qui doit souvent tirer des penaltys) et demandons-nous:

"De quel côté dois-je tirer ?"

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0, 100) & (100, 0) \\ (100, 0) & (0, 100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Idée 1: Toujours tirer à **G**auche,

les Gardiens vont vite comprendre ma stratégie...

... ils plongeront toujours à **Ga**uche et je ne marquerai plus jamais!

Toujours tirer à **Dr**oite ne semble pas être une meilleure idée.

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Plaçons-nous dans la peau d'un joueur professionnel (qui doit souvent tirer des penaltys) et demandons-nous:

"De quel côté dois-je tirer ?"

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Idée 2: Alterner **Ga**uche, **Dr**oite, **Ga**uche, **Dr**oite,...

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Plaçons-nous dans la peau d'un joueur professionnel (qui doit souvent tirer des penaltys) et demandons-nous:

"De quel côté dois-je tirer ?"

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Idée 2: Alterner **Ga**uche, **Dr**oite, **Ga**uche, **Dr**oite,...

les Gardiens vont (un peu moins) vite comprendre ma stratégie...

... ils s'adapteront à mes tirs et je ne marquerai plus jamais!

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Plaçons-nous dans la peau d'un joueur professionnel (qui doit souvent tirer des penaltys) et demandons-nous:

"De quel côté dois-je tirer ?"

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Idée 2: Alterner **Ga**uche, **Dr**oite, **Ga**uche, **Dr**oite,...

les Gardiens vont (un peu moins) vite comprendre ma stratégie...

... ils s'adapteront à mes tirs et je ne marquerai plus jamais!

Il faudrait arriver à jouer de manière **imprévisible** !!!

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Plaçons-nous dans la peau d'un joueur professionnel (qui doit souvent tirer des penaltys) et demandons-nous:

"De quel côté dois-je tirer ?"

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Gardien} \\
\text{Tireur} & \begin{array}{c|cc} & \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \\ \hline \textbf{Ga} & (0,100) & (100,0) \\ \textbf{Dr} & (100,0) & (0,100) \end{array}
\end{array}
$$

Avant de tirer, je lance une pièce en l'air:

si j'obtiens Pile, je tire à **Ga**uche,

si j'obtiens Face, je tire à **Dr**oite.

Le penalty - Une première version (très) simplifiée

Plaçons-nous dans la peau d'un joueur professionnel (qui doit souvent tirer des penaltys) et demandons-nous:

"De quel côté dois-je tirer ?"

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix} \end{array}$$

Avant de tirer, je lance une pièce en l'air:

si j'obtiens Pile, je tire à **Ga**uche,

si j'obtiens Face, je tire à **Dr**oite.

Cette stratégie est totalement **imprévisible**.

Equilibre de Nash du penalty

Supposons que le Tireur fasse son choix **en jouant à pile ou face.**

$$
\begin{array}{cccc}
 & & & \text{Gardien} \\
 & & \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \\
\text{Tireur} & 1/2 \quad \textbf{Ga} & (0,100) & (100,0) \\
 & 1/2 \quad \textbf{Dr} & (100,0) & (0,100)
\end{array}
$$

Equilibre de Nash du penalty

Supposons que le Tireur fasse son choix **en jouant à pile ou face.**

$$\begin{array}{cccc} & & & \text{Gardien} \\ & & \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \\ \text{Tireur} & 1/2 \quad \textbf{Ga} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix}} \\ & 1/2 \quad \textbf{Dr} & & \end{array}$$

Si le Gardien plonge toujours à gauche, son **gain espéré** est:

$$\frac{1}{2} \cdot 100 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 50$$

Equilibre de Nash du penalty

Supposons que le Tireur fasse son choix **en jouant à pile ou face.**

$$\begin{array}{cccc} & & \multicolumn{2}{c}{\text{Gardien}} \\ & & \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{cc} 1/2 & \textbf{Ga} \\ 1/2 & \textbf{Dr} \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix}} \end{array}$$

Si le Gardien plonge toujours à droite, son **gain espéré** est:

$$\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$$

Equilibre de Nash du penalty

Supposons que le Tireur fasse son choix **en jouant à pile ou face.**

$$\begin{array}{cccc} & & & \text{Gardien} \\ & & \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{cc} 1/2 & \textbf{Ga} \\ 1/2 & \textbf{Dr} \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix}} \end{array}$$

Si le Gardien plonge **en jouant à pile ou face**, son **gain espéré** est:

$$\frac{1}{4}\cdot 100+\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 100+\frac{1}{4}\cdot 0=50$$

Equilibre de Nash du penalty

Supposons que le Tireur fasse son choix **en jouant à pile ou face.**

$$\begin{array}{cccc} & & \text{Gardien} & \\ & & \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \\ \text{Tireur} \quad 1/2 & \textbf{Ga} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} (0,100) & (100,0) \\ (100,0) & (0,100) \end{pmatrix}} \\ \phantom{\text{Tireur}} \quad 1/2 & \textbf{Dr} & & \end{array}$$

Si le Gardien plonge **en jouant à pile ou face**, son **gain espéré** est:

$$\frac{1}{4} \cdot 100 + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 100 + \frac{1}{4} \cdot 0 = 50$$

L'**équilibre (de Nash)** du penalty est obtenu quand les deux joueurs font leurs choix **au hasard**, en jouant à *pile ou face* !!!

Le penalty - Une seconde version un peu plus réaliste

- Le Tireur ne peut tirer qu'à **G**auche ou à **Dr**oite.
- Le Gardien ne peut plonger qu'à **G**auche ou à **Dr**oite.
- Le Tireur ne manque jamais sa cible.
- Le Gardien, s'il plonge du bon côté, bloque toujours le tir.

Le penalty - Une seconde version un peu plus réaliste

- Le Tireur ne peut tirer qu'à **G**auche ou à **Dr**oite.
- Le Gardien ne peut plonger qu'à **G**auche ou à **Dr**oite.
- Le Tireur ne manque jamais sa cible.
- Le Gardien, s'il plonge du bon côté, bloque toujours le tir.

Le penalty - Une seconde version un peu plus réaliste

- Le Tireur ne peut tirer qu'à **G**auche ou à **Dr**oite.
- Le Gardien ne peut plonger qu'à **G**auche ou à **Dr**oite.
- Le Tireur ne manque jamais sa cible.
- Le Gardien, s'il plonge du bon côté, bloque toujours le tir.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gardien} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (63, 37) & (94, 6) \\ (89, 11) & (43, 57) \end{pmatrix} \end{array}$$

L'unique équilibre de Nash de ce jeu est

$$\mathbb{P}_T(\textbf{Ga}) = \frac{46}{87} \; ; \; \mathbb{P}_T(\textbf{Dr}) = \frac{41}{87} \; ; \; \mathbb{P}_G(\textbf{Ga}) = \frac{51}{87} \; ; \; \mathbb{P}_G(\textbf{Dr}) = \frac{36}{87}.$$

Le penalty - Une seconde version un peu plus réaliste

- Le Tireur ne peut tirer qu'à **G**auche ou à **Dr**oite.
- Le Gardien ne peut plonger qu'à **G**auche ou à **Dr**oite.
- Le Tireur ne manque jamais sa cible.
- Le Gardien, s'il plonge du bon côté, bloque toujours le tir.

$$\begin{array}{cc} & \text{Gardien} \\ \text{Tireur} & \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textbf{Ga} & \textbf{Dr} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textbf{Ga} \\ \textbf{Dr} \end{array} & \begin{pmatrix} (63,37) & (94,6) \\ (89,11) & (43,57) \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

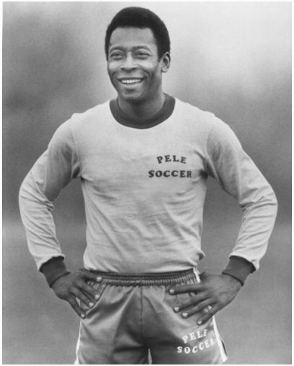
L'unique équilibre de Nash de ce jeu est

$$\mathbb{P}_T(\textbf{Ga}) = \frac{46}{87}\ ;\ \mathbb{P}_T(\textbf{Dr}) = \frac{41}{87}\ ;\ \mathbb{P}_G(\textbf{Ga}) = \frac{51}{87}\ ;\ \mathbb{P}_G(\textbf{Dr}) = \frac{36}{87}.$$

Dans la réalité, on constate que:

les *“bons tireurs de penaltys”* suivent l'équilibre de Nash !!!

Le conseil de Pelé



“Pour être un grand footballeur,

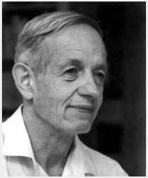
il faut être un excellent mathématicien !”

Plan de l'exposé

1. Zermelo et le jeu de Nim
   - Jeu de Nim
   - Théorème de Zermelo et applications
2. Nash, son équilibre et ses applications
   - Une opportunité en or !!!
   - Tir au but (ou penalty)
   - Théorème de Nash et applications
3. Harsanyi et le problème de Monty Hall
   - Le problème de Monty Hall
   - Jeux à information imparfaite
4. Shapley et le lemme des mariages
   - Agence matrimoniale
   - Algorithme de Shapley
5. Pour conclure

Théorème de Nash

Théorème [Nash 1950]

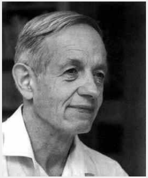


Tout jeu fini admet

un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Théorème de Nash

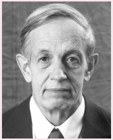
Théorème [Nash 1950]

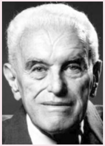


Tout jeu fini admet

un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

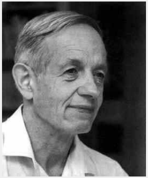
Prix Nobel d'économie 1994: J. Nash, R. Selten et J. Harsanyi





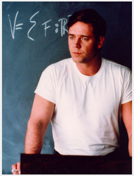
Théorème de Nash

Théorème [Nash 1950]



Tout jeu fini admet

un équilibre de Nash en stratégies mixtes.



En 2001, Russel Crowe interprète John Forbes Nash dans le film:
Un homme d'exception réalisé par Ron Howard.

Ce film remporta 4 oscars en 2002, dont celui du meilleur film.

Un mot de la preuve du Théorème de Nash

Théorème [Nash 1950]

Tout jeu fini admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

On peut construire une fonction [1] $f : X \to Y$ telle que:

$$(\sigma_1, \sigma_2) \text{ est un équilibre de Nash} \quad \text{ssi} \quad (\sigma_1, \sigma_2) \text{ est un point fixe de } f.$$

[1] La fonction f est liée au concept de meilleure réponse.

Un mot de la preuve du Théorème de Nash

Théorème [Nash 1950]

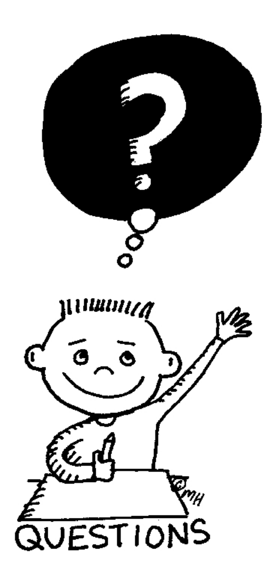
Tout jeu fini admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

On peut construire une fonction [1] $f : X \to Y$ telle que:

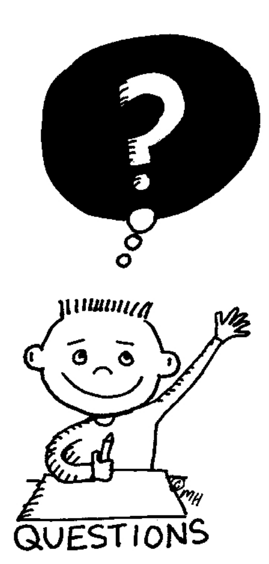
(σ_1, σ_2) est un équilibre de Nash ssi (σ_1, σ_2) est un point fixe de f.

Trouver des équilibres de Nash revient à trouver des points fixes...

[1] La fonction f est liée au concept de meilleure réponse.



C’est quoi un point fixe ?



C'est quoi un point fixe ?

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$,

x_0 est un point fixe de f

ssi $f(x_0) = x_0$.

Un théorème de point fixe

Théorème

Si $f : [\text{-}1, 1] \to [\text{-}1, 1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Un théorème de point fixe

Théorème

Si $f : [\text{-}1, 1] \to [\text{-}1, 1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Preuve: On pose $g(x) = f(x) - x$

Un théorème de point fixe

Théorème

Si $f : [\text{-}1, 1] \to [\text{-}1, 1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Preuve: On pose $g(x) = f(x) - x$, on cherche une racine de g.

f admet un point fixe   si et seulement si g admet une racine.

$$f(x_0) = x_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0.$$

Un théorème de point fixe

Théorème

Si $f : [\text{-}1, 1] \to [\text{-}1, 1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Preuve: On pose $g(x) = f(x) - x$, on cherche une racine de g.

f admet un point fixe   si et seulement si g admet une racine.

$$f(x_0) = x_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0.$$

Pour tout $x \in [\text{-}1, 1]$, on a $\text{-}1 \leq f(x) \leq 1$, en particulier

- $g(1) \; = \; f(1) - (1) \; \leq \; 1 - 1 = 0$
- $g(\text{-}1) \; = \; f(\text{-}1) - (\text{-}1) \; = \; f(\text{-}1) + 1 \; \geq \; \text{-}1 + 1 = 0$

Un théorème de point fixe

Théorème

Si $f : [-1,1] \to [-1,1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Preuve: On pose $g(x) = f(x) - x$, on cherche une racine de g.

$$g(\text{-}1) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad g(1) \leq 0.$$

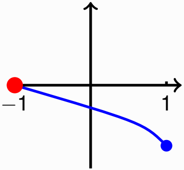
Un théorème de point fixe

Théorème

Si $f : [-1,1] \to [-1,1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Preuve: On pose $g(x) = f(x) - x$, on cherche une racine de g.

$$g(\text{-}1) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad g(1) \leq 0.$$



$g(\text{-}1) = 0$

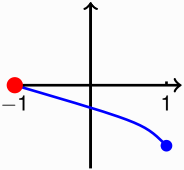
Un théorème de point fixe

Théorème

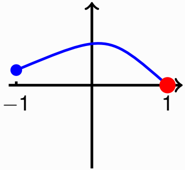
Si $f : [-1,1] \to [-1,1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Preuve: On pose $g(x) = f(x) - x$, on cherche une racine de g.

$$g(\text{-}1) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad g(1) \leq 0.$$



$g(\text{-}1) = 0$



$g(1) = 0$

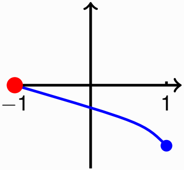
Un théorème de point fixe

Théorème

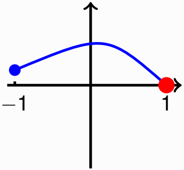
Si $f : [-1,1] \to [-1,1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Preuve: On pose $g(x) = f(x) - x$, on cherche une racine de g.

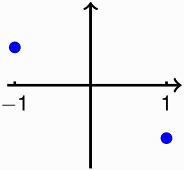
$$g(\text{-}1) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad g(1) \leq 0.$$



$g(\text{-}1) = 0$



$g(1) = 0$



$g(\text{-}1) > 0$ et $g(1) < 0$

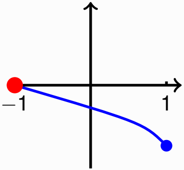
Un théorème de point fixe

Théorème

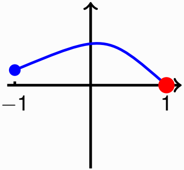
Si $f : [-1,1] \to [-1,1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Preuve: On pose $g(x) = f(x) - x$, on cherche une racine de g.

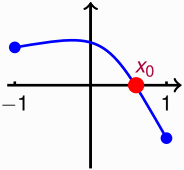
$$g(\text{-}1) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad g(1) \leq 0.$$



$g(\text{-}1) = 0$



$g(1) = 0$



$g(\text{-}1) > 0$ et $g(1) < 0$

Comme g est continue, le *Thm des valeurs intermédiaires* assure qu'il existe x_0 tq $g(x_0) = 0$.

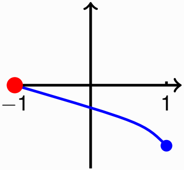
Un théorème de point fixe

Théorème

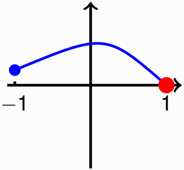
Si $f : [-1,1] \to [-1,1]$ est continue, alors f admet un point fixe.

Preuve: On pose $g(x) = f(x) - x$, on cherche une racine de g.

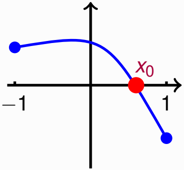
$$g(\text{-}1) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad g(1) \leq 0.$$



$g(\text{-}1) = 0$



$g(1) = 0$



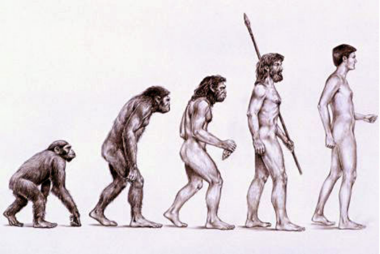
$g(\text{-}1) > 0$ et $g(1) < 0$

Comme g est continue, le *Thm des valeurs intermédiaires* assure qu'il existe x_0 tq $g(x_0) = 0$.

On a donc trouvé une racine de g et donc un point fixe de f. □

Applications

Les applications de la théorie des jeux sont multiples:



- Biologie: évolution des espèces,...
- Economie: fixation du prix d’un produit,...
- Politique: résolution de conflits,...
- ...

Une application en économie: le duopole de Cournot

Deux compagnies produisent le même produit.

Chaque compagnie choisit sa quantité de production, de façon indépendante, en sachant que le prix de vente est fonction de la quantité totale produite.

Cette fonction est connue de tous.

Une application en économie: le duopole de Cournot

Deux compagnies produisent le même produit.

Chaque compagnie choisit sa quantité de production, de façon indépendante, en sachant que le prix de vente est fonction de la quantité totale produite.

Cette fonction est connue de tous.

Trois niveaux de production possibles: **B**asse, **M**oyenne et **H**aute.

	B	M	H
B	$(4,4)$	$(2,5)$	$(1,3)$
M	$(5,2)$	$(3,3)$	$(2,1)$
H	$(3,1)$	$(1,2)$	$(0,0)$

Une application en économie: le duopole de Cournot

Deux compagnies produisent le même produit.

Chaque compagnie choisit sa quantité de production, de façon indépendante, en sachant que le prix de vente est fonction de la quantité totale produite.

Cette fonction est connue de tous.

Trois niveaux de production possibles: **B**asse, **M**oyenne et **H**aute.

	B	M	H
B	$(4,4)$	$(2,5)$	$(1,3)$
M	$(5,2)$	$(3,3)$	$(2,1)$
H	$(3,1)$	$(1,2)$	$(0,0)$

On remarque que (B,B) n'est pas un équilibre de Nash.

Une application en économie: le duopole de Cournot

Deux compagnies produisent le même produit.

Chaque compagnie choisit sa quantité de production, de façon indépendante, en sachant que le prix de vente est fonction de la quantité totale produite.

Cette fonction est connue de tous.

Trois niveaux de production possibles: **B**asse, **M**oyenne et **H**aute.

	B	**M**	H
B	(4,4)	(2,5)	(1,3)
M	(5,2)	(3,3)	(2,1)
H	(3,1)	(1,2)	(0,0)

Le profil de stratégies (M,M) est l'unique équilibre de Nash du jeu.

Une application en économie: le duopole de Cournot

Deux compagnies produisent le même produit.

Chaque compagnie choisit sa quantité de production, de façon indépendante, en sachant que le prix de vente est fonction de la quantité totale produite.

Cette fonction est connue de tous.

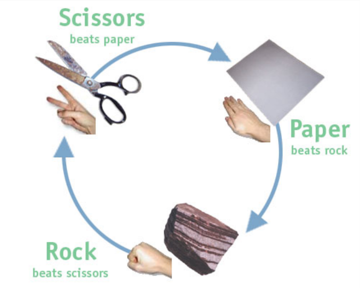
La quantité (q_i) de production peut être n'importe quel réel positif.

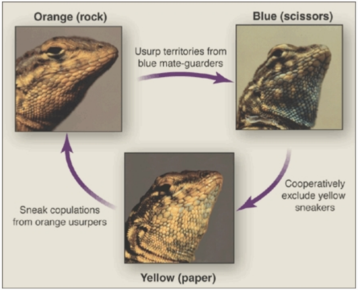
$$\text{Profit}^1(q_1, q_2) = q_1 \, \underbrace{(\alpha - \beta(q_1 + q_2))}_{\text{prix de vente}} \; - \; \underbrace{\gamma q_1}_{\text{coût de production}}$$

$$\text{L'unique équilibre de Nash: } \left(\frac{\alpha - \gamma}{3\beta}, \frac{\alpha - \gamma}{3\beta} \right)$$

Le calcul des meilleures réponses revient à chercher le sommet d'une parabole.

Uta stansburiana – Lézard à flancs maculés





$$
\begin{array}{c|ccc}
 & \textbf{Pi} & \textbf{Pa} & \textbf{Ci} \\
\hline
\textbf{Pi} & (0,0) & (-1,+1) & (+1,-1) \\
\textbf{Pa} & (+1,-1) & (0,0) & (-1,+1) \\
\textbf{Ci} & (-1,+1) & (+1,-1) & (0,0)
\end{array}
$$

La **théorie des jeux évolutionnaires** utilise l'équilibre de Nash pour comprendre et expliquer l'évolution de certaines populations.

Plan de l'exposé

Let’s make a deal

est un jeu télévisé américain (1963 à 1986) présenté par **Monty Hall**

Let’s make a deal

Le principe

Trois portes fermées,

Let’s make a deal

Le principe

Trois portes fermées,

derrière l’une d’elle se trouve une superbe voiture,

Let’s make a deal

Le principe

Trois portes fermées,

derrière l’une d’elle se trouve une superbe voiture,

derrière les deux autres se trouve une chèvre.

Let's make a deal...

Le déroulement du jeu

- Le candidat (qui ignore où est la voiture) doit choisir une porte,

Let's make a deal...

Le déroulement du jeu

- Le candidat (qui ignore où est la voiture) doit choisir une porte,
- Le présentateur (qui sait où est la voiture) ouvre une porte...

Let's make a deal...

Le déroulement du jeu

- Le candidat (qui ignore où est la voiture) doit choisir une porte,
- Le présentateur (qui sait où est la voiture) ouvre une porte...
  ...derrière laquelle se trouve toujours une chèvre...

Let's make a deal...

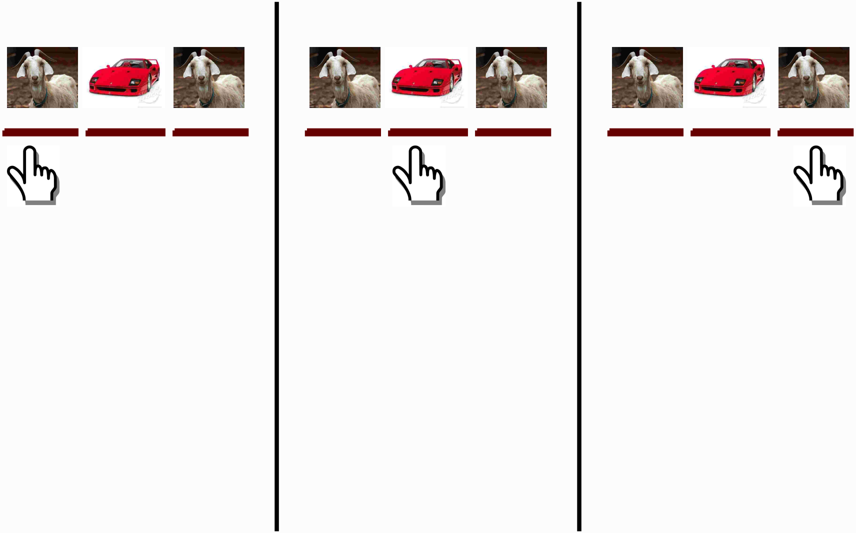
Le déroulement du jeu

- Le candidat (qui ignore où est la voiture) doit choisir une porte,
- Le présentateur (qui sait où est la voiture) ouvre une porte...
  ...derrière laquelle se trouve toujours une chèvre...

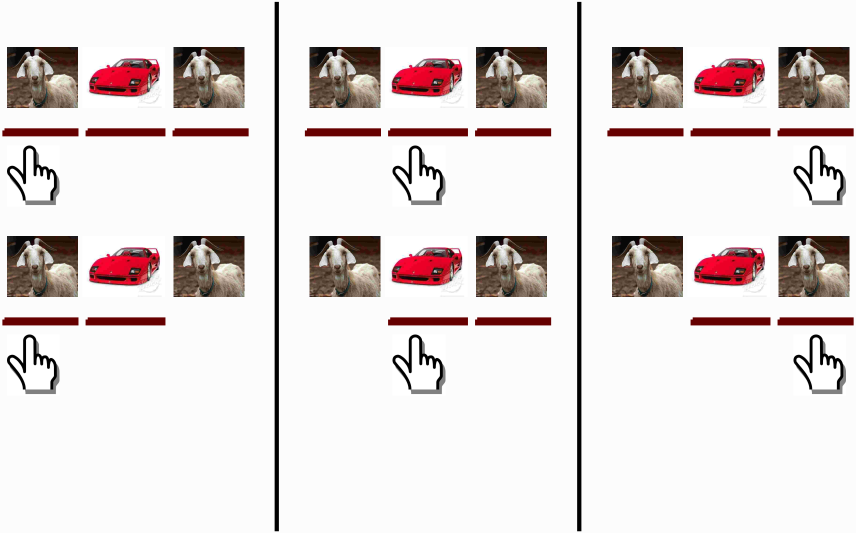
- Le présentateur demande au candidat s'il veut changer de porte...

Que doit faire le candidat ?

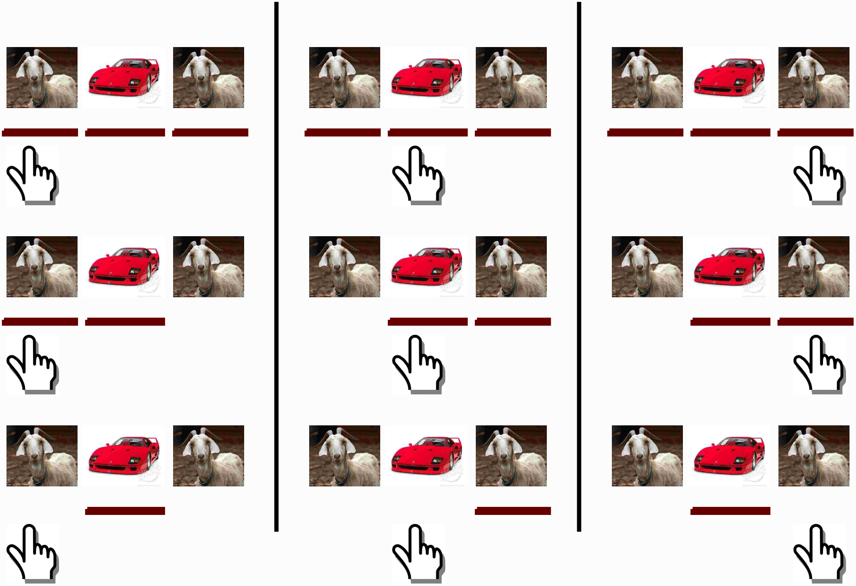
Que doit faire le candidat ?



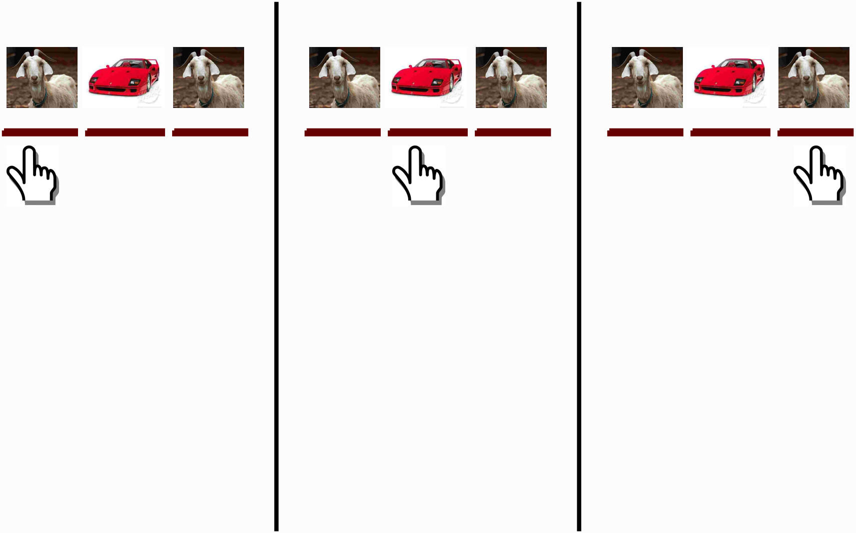
Que doit faire le candidat ?



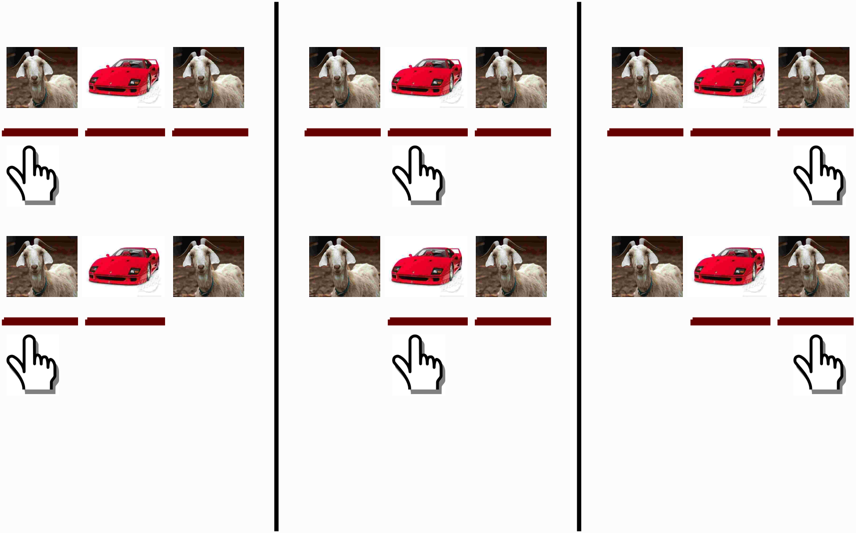
Que doit faire le candidat ? Garder sa porte ⇝ 1/3



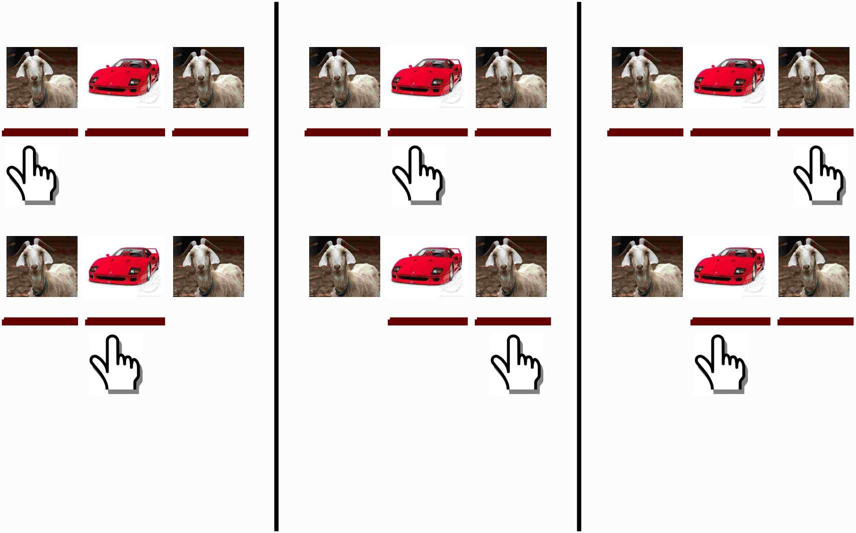
Que doit faire le candidat ?



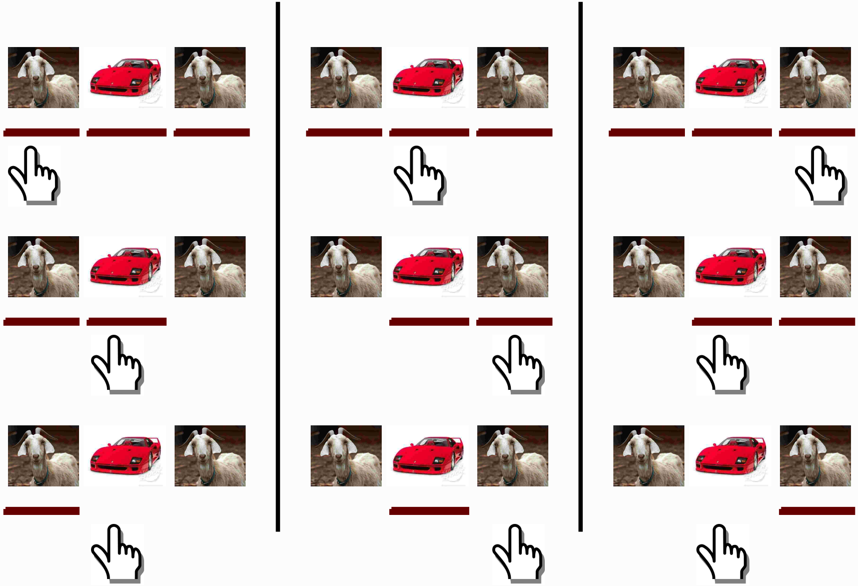
Que doit faire le candidat ?



Que doit faire le candidat ?



Que doit faire le candidat ? Changer de porte $\rightsquigarrow$ 2/3



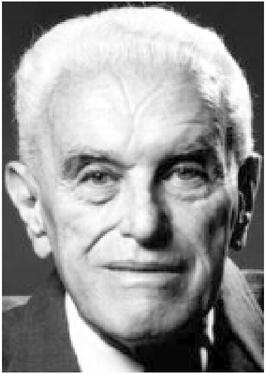
Que doit faire le candidat ?

Il doit toujours accepter de changer de porte !

Plan de l'exposé

1. Zermelo et le jeu de Nim
   - Jeu de Nim
   - Théorème de Zermelo et applications
2. Nash, son équilibre et ses applications
   - Une opportunité en or !!!
   - Tir au but (ou penalty)
   - Théorème de Nash et applications
3. Harsanyi et le problème de Monty Hall
   - Le problème de Monty Hall
   - Jeux à information imparfaite
4. Shapley et le lemme des mariages
   - Agence matrimoniale
   - Algorithme de Shapley
5. Pour conclure

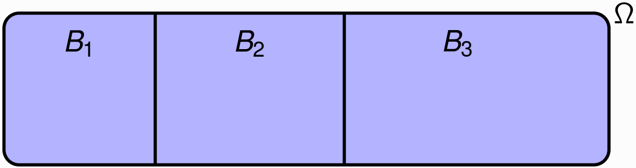
La contribution du troisième prix Nobel de 1994



Les jeux à information imparfaite

ont été introduits par J. C. Harsanyi

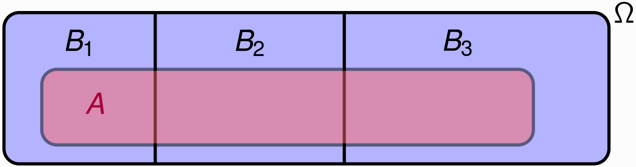
Les jeux à information imparfaite ou jeux Bayesiens



Théorème de Bayes

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soient $B_1, B_2, \ldots, B_n \subseteq \Omega$ des événements qui partitionnent Ω

Les jeux à information imparfaite ou jeux Bayesiens



Théorème de Bayes

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soient $B_1, B_2, \ldots, B_n \subseteq \Omega$ des événements qui partitionnent Ω et $A \subseteq \Omega$ un événement quelconque. Quel que soit B_i, on a:

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i).\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_j).\mathbb{P}(B_j)}$$

Monty Hall et Théorème de Bayes (I)

- Le candidat a choisi la porte 3.

Monty Hall et Théorème de Bayes (I)

- Le candidat a choisi la porte 3.
- Le présentateur a ouvert la porte 1 (où se trouve une chèvre).

Monty Hall et Théorème de Bayes (I)

- Le candidat a choisi la porte 3.
- Le présentateur a ouvert la porte 1 (où se trouve une chèvre).

Le candidat doit-il changer de porte ?

Monty Hall et Théorème de Bayes (I)

- Le candidat a choisi la porte 3.
- Le présentateur a ouvert la porte 1 (où se trouve une chèvre).

Le candidat doit-il changer de porte ?

On note B_i l'événement: *La voiture se trouve derrière la porte i*.

On note A l'événement: *Le présentateur ouvre la porte 1*.

Pour répondre à la question *"Le candidat doit-il changer de porte ?"*

on va comparer $\quad \mathbb{P}(B_2|A) \quad$ et $\quad \mathbb{P}(B_3|A)$

Monty Hall et Théorème de Bayes (I)

- Le candidat a choisi la porte 3.
- Le présentateur a ouvert la porte 1 (où se trouve une chèvre).

Le candidat doit-il changer de porte ?

On note B_i l'événement: *La voiture se trouve derrière la porte i*.

On note A l'événement: *Le présentateur ouvre la porte 1*.

Pour répondre à la question *"Le candidat doit-il changer de porte ?"*

on va comparer $\quad \mathbb{P}(B_2|A) \quad$ et $\quad \mathbb{P}(B_3|A)$

Pour cela, on applique le théorème de Bayes.

Monty Hall et Théorème de Bayes (II)

- Le candidat a choisi la porte 3.
- Le présentateur a ouvert la porte 1 (où se trouve une chèvre).

A: *Le présentateur ouvre la porte 1* B_i: *La voiture est derrière la porte i*

$$\mathbb{P}(B_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_2).\mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(A|B_1).\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2).\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3).\mathbb{P}(B_3)}$$

Monty Hall et Théorème de Bayes (II)

- Le candidat a choisi la porte 3.
- Le présentateur a ouvert la porte 1 (où se trouve une chèvre).

A: Le présentateur ouvre la porte 1 *B_i: La voiture est derrière la porte i*

$$\mathbb{P}(B_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_2).\mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(A|B_1).\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2).\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3).\mathbb{P}(B_3)}$$

Que peut déduire le candidat (qui a choisi la porte 3) ?

- $\mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{3}$, quel que soit $i = 1, 2, 3$.

Monty Hall et Théorème de Bayes (II)

- Le candidat a choisi la porte 3.
- Le présentateur a ouvert la porte 1 (où se trouve une chèvre).

A: Le présentateur ouvre la porte 1 *B_i: La voiture est derrière la porte i*

$$\mathbb{P}(B_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_2).\mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(A|B_1).\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2).\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3).\mathbb{P}(B_3)}$$

Que peut déduire le candidat (qui a choisi la porte 3) ?

- $\mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{3}$, quel que soit $i = 1, 2, 3$.
- $\mathbb{P}(A|B_1) = 0$ *Le présentateur ne dévoile jamais la voiture*

Monty Hall et Théorème de Bayes (II)

- Le candidat a choisi la porte 3.
- Le présentateur a ouvert la porte 1 (où se trouve une chèvre).

A: Le présentateur ouvre la porte 1 *B_i: La voiture est derrière la porte i*

$$\mathbb{P}(B_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_2).\mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(A|B_1).\mathbb{P}(B_1)+\mathbb{P}(A|B_2).\mathbb{P}(B_2)+\mathbb{P}(A|B_3).\mathbb{P}(B_3)}$$

Que peut déduire le candidat (qui a choisi la porte 3) ?

- $\mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{3}$, quel que soit $i = 1, 2, 3$.
- $\mathbb{P}(A|B_1) = 0$ *Le présentateur ne dévoile jamais la voiture*
- $\mathbb{P}(A|B_2) = 1$ *Pas d'autres choix: voiture en 2 et candidat bloque 3.*

Monty Hall et Théorème de Bayes (II)

- Le candidat a choisi la porte 3.
- Le présentateur a ouvert la porte 1 (où se trouve une chèvre).

A: Le présentateur ouvre la porte 1 *B_i: La voiture est derrière la porte i*

$$\mathbb{P}(B_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_2).\mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(A|B_1).\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2).\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3).\mathbb{P}(B_3)}$$

Que peut déduire le candidat (qui a choisi la porte 3) ?

- $\mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{3}$, quel que soit $i = 1, 2, 3$.
- $\mathbb{P}(A|B_1) = 0$ *Le présentateur ne dévoile jamais la voiture*
- $\mathbb{P}(A|B_2) = 1$ *Pas d'autres choix: voiture en 2 et candidat bloque 3.*
- $\mathbb{P}(A|B_3) = \frac{1}{2}$ *Le présentateur choisit au hasard entre les portes 1 et 2.*

Monty Hall et Théorème de Bayes (II)

- Le candidat a choisi la porte 3.
- Le présentateur a ouvert la porte 1 (où se trouve une chèvre).

A: *Le présentateur ouvre la porte 1* B_i: *La voiture est derrière la porte i*

$$\mathbb{P}(B_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_2).\mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(A|B_1).\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2).\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3).\mathbb{P}(B_3)}$$

Que peut déduire le candidat (qui a choisi la porte 3) ?

- $\mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{3}$, quel que soit $i = 1, 2, 3$.
- $\mathbb{P}(A|B_1) = 0$ *Le présentateur ne dévoile jamais la voiture*
- $\mathbb{P}(A|B_2) = 1$ *Pas d'autres choix: voiture en 2 et candidat bloque 3.*
- $\mathbb{P}(A|B_3) = \frac{1}{2}$ *Le présentateur choisit au hasard entre les portes 1 et 2.*

$$\mathbb{P}(B_2|A) = \frac{1 \cdot 1/3}{0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/3 + 1/2 \cdot 1/3} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

Monty Hall et Théorème de Bayes (III)

- Le candidat a choisi la porte 3.
- Le présentateur a ouvert la porte 1 (où se trouve une chèvre).

A: Le présentateur ouvre la porte 1 *B_i: La voiture est derrière la porte i*

$$\mathbb{P}(B_3|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_3).\mathbb{P}(B_3)}{\mathbb{P}(A|B_1).\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2).\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3).\mathbb{P}(B_3)}$$

Que peut déduire le candidat (qui a choisi la porte 3) ?

- $\mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{3}$, quel que soit $i = 1, 2, 3$.
- $\mathbb{P}(A|B_1) = 0$ *Toujours une chèvre derrière la première porte!*
- $\mathbb{P}(A|B_2) = 1$ *Pas d'autres choix: voiture en 2 et candidat bloque 3.*
- $\mathbb{P}(A|B_3) = \frac{1}{2}$ *Le présentateur choisit au hasard entre les portes 1 et 2.*

$$\mathbb{P}(B_3|A) = \frac{1/2 \cdot 1/3}{0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/3 + 1/2 \cdot 1/3} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

Applications

- Chercher des stratégies optimales pour *le blackjack, le poker,...*
- Applications en informatique, biologie, économie, politique,...

Plan de l'exposé

Problème des mariages stables

Maintenant, nous allons devenir:

Responsable d'une agence matrimoniale chez Disney !

Notre boulot:

- on rencontre *n* hommes et *n* femmes qui cherchent l'âme soeur,
- et nous devons les assortir ***"au mieux"***...

Un cas facile

Un cas facile

Hommes	Femmes
Aladdin	Ja $\succ$ Bl $\succ$ Be

 $\succ$  $\succ$ 

Un cas facile

Hommes	Femmes
Aladdin	Ja $\succ$ Bl $\succ$ Be
Bête	Be $\succ$ Bl $\succ$ Ja

  $\succ$  $\succ$ 

  $\succ$  $\succ$ 

Un cas facile

Hommes	Femmes
Aladdin	Ja $\succ$ Bl $\succ$ Be
Bête	Be $\succ$ Bl $\succ$ Ja
Prince	Bl $\succ$ Ja $\succ$ Be

  $\succ$  $\succ$ 

  $\succ$  $\succ$ 

  $\succ$  $\succ$ 

Un cas facile

Hommes	Femmes
Aladdin	Ja $\succ$ Bl $\succ$ Be
Bête	Be $\succ$ Bl $\succ$ Ja
Prince	Bl $\succ$ Ja $\succ$ Be

Femmes	Hommes
Jasmine	Al $\succ$ Pr $\succ$ Bê

 $\succ$  $\succ$ 

Un cas facile

Hommes	Femmes
Aladdin	Ja $\succ$ Bl $\succ$ Be
Bête	Be $\succ$ Bl $\succ$ Ja
Prince	Bl $\succ$ Ja $\succ$ Be

Femmes	Hommes
Jasmine	Al $\succ$ Pr $\succ$ Bê
Belle	Bê $\succ$ Al $\succ$ Pr

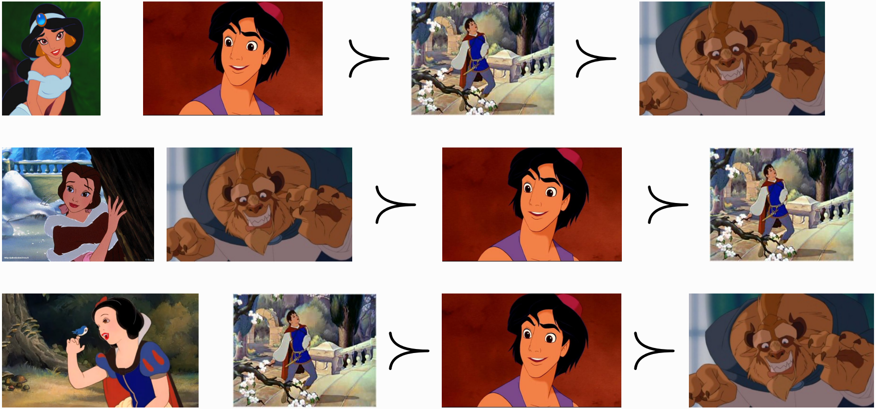
  $\succ$  $\succ$ 

  $\succ$  $\succ$ 

Un cas facile

Hommes	Femmes
Aladdin	Ja $\succ$ Bl $\succ$ Be
Bête	Be $\succ$ Bl $\succ$ Ja
Prince	Bl $\succ$ Ja $\succ$ Be

Femmes	Hommes
Jasmine	Al $\succ$ Pr $\succ$ Bê
Belle	Bê $\succ$ Al $\succ$ Pr
Blanche neige	Pr $\succ$ Al $\succ$ Bê



Un cas facile

Hommes	Femmes
Aladdin	Ja $\succ$ Bl $\succ$ Be
Bête	Be $\succ$ Bl $\succ$ Ja
Prince	Bl $\succ$ Ja $\succ$ Be

Femmes	Hommes
Jasmine	Al $\succ$ Pr $\succ$ Bê
Belle	Bê $\succ$ Al $\succ$ Pr
Blanche neige	Pr $\succ$ Al $\succ$ Bê






Tout le monde est avec son partenaire préféré!

Ça se complique...






Ça se complique...

Hommes	Femmes
Aladdin	Ja $\succ$ Bl $\succ$ Es
Gaston	Ja $\succ$ Es $\succ$ Bl
Quasimodo	Es $\succ$ Ja $\succ$ Bl

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Qu
Esmeralda	Ga $\succ$ Qu $\succ$ Al
Jasmine	Al $\succ$ Ga $\succ$ Qu

Pas de solution évidente...

Un premier algo: maximiser le bonheur des couples

Hommes	Femmes
Aladdin	Ja $\succ$ Bl $\succ$ Es
Gaston	Ja $\succ$ Es $\succ$ Bl
Quasimodo	Es $\succ$ Ja $\succ$ Bl

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Qu
Esmeralda	Ga $\succ$ Qu $\succ$ Al
Jasmine	Al $\succ$ Ga $\succ$ Qu

	Blanche-neige	Esmeralda	Jasmine
Aladdin	2+2=4	1+1=2	3+3=6
Gaston	1+3=4	2+3=5	3+2=5
Quasimodo	1+1=2	3+2=5	2+1=3

Un premier algo: maximiser le bonheur des couples

Hommes	Femmes
Aladdin	Ja $\succ$ Bl $\succ$ Es
Gaston	Ja $\succ$ Es $\succ$ Bl
Quasimodo	Es $\succ$ Ja $\succ$ Bl

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Qu
Esmeralda	Ga $\succ$ Qu $\succ$ Al
Jasmine	Al $\succ$ Ga $\succ$ Qu

	Blanche-neige	Esmeralda	Jasmine
Aladdin	4	2	6
Gaston	4	5	5
Quasimodo	2	5	3

Un premier algo: maximiser le bonheur des couples

Hommes	Femmes
Aladdin	Ja $\succ$ Bl $\succ$ Es
Gaston	Ja $\succ$ Es $\succ$ Bl
Quasimodo	Es $\succ$ Ja $\succ$ Bl

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Qu
Esmeralda	Ga $\succ$ Qu $\succ$ Al
Jasmine	Al $\succ$ Ga $\succ$ Qu

	Blanche-neige	Esmeralda	Jasmine
Aladdin	4	2	**6**
Gaston	4	5	5
Quasimodo	2	5	3

(Aladdin,Jasmine)

Un premier algo: maximiser le bonheur des couples

Hommes	Femmes
Aladdin	Ja $\succ$ Bl $\succ$ Es
Gaston	Ja $\succ$ Es $\succ$ Bl
Quasimodo	Es $\succ$ Ja $\succ$ Bl

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Qu
Esmeralda	Ga $\succ$ Qu $\succ$ Al
Jasmine	Al $\succ$ Ga $\succ$ Qu

	Blanche-neige	Esmeralda	Jasmine
Aladdin	4	2	6
Gaston	4	5	5
Quasimodo	2	5	3

(Aladdin,Jasmine)

Un premier algo: maximiser le bonheur des couples

Hommes	Femmes
Aladdin	Ja $\succ$ Bl $\succ$ Es
Gaston	Ja $\succ$ Es $\succ$ Bl
Quasimodo	Es $\succ$ Ja $\succ$ Bl

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Qu
Esmeralda	Ga $\succ$ Qu $\succ$ Al
Jasmine	Al $\succ$ Ga $\succ$ Qu

	Blanche neige	Esmeralda	Jasmine
Aladdin	4	2	6
Gaston	**4**	5	5
Quasimodo	2	**5**	3

(Aladdin,Jasmine)
(Gaston,Blanche-neige)
(Quasimodo,Esmeralda)

Un premier algo: maximiser le bonheur des couples

Hommes	Femmes
Aladdin	Ja $\succ$ Bl $\succ$ Es
Gaston	Ja $\succ$ Es $\succ$ Bl
Quasimodo	Es $\succ$ Ja $\succ$ Bl

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Qu
Esmeralda	Ga $\succ$ Qu $\succ$ Al
Jasmine	Al $\succ$ Ga $\succ$ Qu






(Al,Ja)
(Ga,Bl)
(Qu,Es)

Un premier algo: maximiser le bonheur des couples

Hommes	Femmes
Aladdin	Ja $\succ$ Bl $\succ$ Es
Gaston	Ja $\succ$ Es $\succ$ Bl
Quasimodo	Es $\succ$ Ja $\succ$ Bl

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Qu
Esmeralda	Ga $\succ$ Qu $\succ$ Al
Jasmine	Al $\succ$ Ga $\succ$ Qu






(Al,Ja)
(**Ga**,Bl)
(Qu,**Es**)

Un premier algo: maximiser le bonheur des couples

Hommes	Femmes
Aladdin	Ja $\succ$ Bl $\succ$ Es
Gaston	Ja $\succ$ Es $\succ$ Bl
Quasimodo	Es $\succ$ Ja $\succ$ Bl

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Qu
Esmeralda	Ga $\succ$ Qu $\succ$ Al
Jasmine	Al $\succ$ Ga $\succ$ Qu




(Al,Ja)
(**Ga**,Bl)
(Qu,**Es**)

$\rightarrow$

(Al,Ja)
(Ga,Es)
(Qu,Bl)


Un premier algo: maximiser le bonheur des couples

Hommes	Femmes
Aladdin	Ja $\succ$ Bl $\succ$ Es
Gaston	Ja $\succ$ Es $\succ$ Bl
Quasimodo	Es $\succ$ Ja $\succ$ Bl

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Qu
Esmeralda	Ga $\succ$ Qu $\succ$ Al
Jasmine	Al $\succ$ Ga $\succ$ Qu




(Al,Ja)
(**Ga**,Bl)
(Qu,**Es**)

$\rightarrow$

(Al,Ja)
(Ga,Es)
(Qu,Bl)


Remarque importante

La notion de **stabilité** prime sur la notion d'**optimalité** !!! (éq. de Nash)

On ne s’en sort plus...

On ne s'en sort plus...

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl $\succ$ Be $\succ$ So
Gaston	Be $\succ$ Bl $\succ$ So
Jafar	Bl $\succ$ Be $\succ$ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Ja
Belle	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja
Sorcière	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja

On ne s'en sort plus...

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl $\succ$ Be $\succ$ So
Gaston	Be $\succ$ Bl $\succ$ So
Jafar	Bl $\succ$ Be $\succ$ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Ja
Belle	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja
Sorcière	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja

(Al,So)
(Ga,Be)
(Ja,Bl)

On ne s'en sort plus...

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl $\succ$ Be $\succ$ So
Gaston	Be $\succ$ Bl $\succ$ So
Jafar	Bl $\succ$ Be $\succ$ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Ja
Belle	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja
Sorcière	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja

(**Al**,So)
(Ga,**Be**)
(Ja,Bl)

On ne s’en sort plus...

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl $\succ$ Be $\succ$ So
Gaston	Be $\succ$ Bl $\succ$ So
Jafar	Bl $\succ$ Be $\succ$ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Ja
Belle	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja
Sorcière	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja

(**Al**,So)		(Al,Be)
(Ga,**Be**)	$\rightarrow$	(Ga,So)
(Ja,Bl)		(Ja,Bl)

On ne s'en sort plus...

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl $\succ$ Be $\succ$ So
Gaston	Be $\succ$ Bl $\succ$ So
Jafar	Bl $\succ$ Be $\succ$ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Ja
Belle	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja
Sorcière	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja

(**Al**,So)
(Ga,**Be**)
(Ja,Bl)

→

(**Al**,Be)
(Ga,So)
(Ja,**Bl**)

On ne s'en sort plus...

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl $\succ$ Be $\succ$ So
Gaston	Be $\succ$ Bl $\succ$ So
Jafar	Bl $\succ$ Be $\succ$ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Ja
Belle	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja
Sorcière	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja

$$\begin{array}{ccccc} (\textbf{Al},\text{So}) & & (\textbf{Al},\text{Be}) & & (\text{Al},\text{Bl}) \\ (\text{Ga},\textbf{Be}) & \curvearrowright & (\text{Ga},\text{So}) & \curvearrowright & (\text{Ga},\text{So}) \\ (\text{Ja},\text{Bl}) & & (\text{Ja},\textbf{Bl}) & & (\text{Ja},\text{Be}) \end{array}$$

On ne s'en sort plus...

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl $\succ$ Be $\succ$ So
Gaston	Be $\succ$ Bl $\succ$ So
Jafar	Bl $\succ$ Be $\succ$ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Ja
Belle	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja
Sorcière	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja

(**Al**,So)
(Ga,**Be**)
(Ja,Bl)

$\longrightarrow$

(**Al**,Be)
(Ga,So)
(Ja,**Bl**)

$\longrightarrow$

(Al,**Bl**)
(**Ga**,So)
(Ja,Be)

On ne s'en sort plus...

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl $\succ$ Be $\succ$ So
Gaston	Be $\succ$ Bl $\succ$ So
Jafar	Bl $\succ$ Be $\succ$ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Ja
Belle	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja
Sorcière	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja

(**Al**,So)		(**Al**,Be)		(Al,**Bl**)		(Al,So)
(Ga,**Be**)	→	(Ga,So)	→	(**Ga**,So)	→	(Ga,Bl)
(Ja,Bl)		(Ja,**Bl**)		(Ja,Be)		(Ja,Be)

On ne s'en sort plus...

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl $\succ$ Be $\succ$ So
Gaston	Be $\succ$ Bl $\succ$ So
Jafar	Bl $\succ$ Be $\succ$ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Ja
Belle	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja
Sorcière	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja

(**Al**,So)
(Ga,**Be**)
(Ja,Bl)

→

(**Al**,Be)
(Ga,So)
(Ja,**Bl**)

→

(Al,**Bl**)
(**Ga**,So)
(Ja,Be)

→

(Al,So)
(**Ga**,Bl)
(Ja,**Be**)

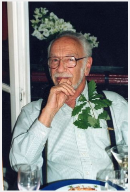
L'algorithme ne s'arrête pas... Existe-t-il une solution stable ?

Existe-t-il toujours une solution stable ?

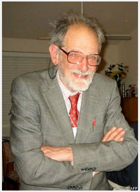
Plan de l'exposé

Réponse de Gale et Shapley

Algorithme [Gale, Shapley 1962]

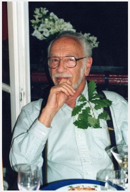


Le problème des mariages admet toujours une solution stable. De plus cette solution peut être calculée algorithmiquement.

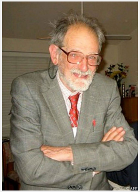


Réponse de Gale et Shapley

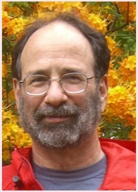
Algorithme [Gale, Shapley 1962]

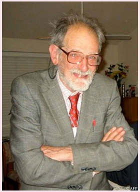


Le problème des mariages admet toujours une solution stable. De plus cette solution peut être calculée algorithmiquement.



Prix Nobel d'économie 2012: Alvin Roth and Lloyd Shapley





Algorithme de Gale et Shapley

Tant que nécessaire:

- **Chaque matin**, chaque homme fait sa demande à la femme qu'il préfère de sa liste actuelle.

- **Chaque après-midi**, chaque femme répond:
  - *"Peut-être"* au préféré de ses prétendants du matin
  - *"Non"* aux autres prétendants du matin

- **Chaque soir**, chaque homme, qui a été rejeté aujourd'hui, barre de sa liste actuelle la femme qui l'a éconduit.

L'algorithme s'arrête le jour où aucun homme n'a été éconduit.

Ce jour-là, chaque femme dit *"Oui"* à son (unique) prétendant du jour !

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl $\succ$ Be $\succ$ So
Gaston	Be $\succ$ Bl $\succ$ So
Jafar	Bl $\succ$ Be $\succ$ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Ja
Belle	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja
Sorcière	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl $\succ$ Be $\succ$ So
Gaston	Be $\succ$ Bl $\succ$ So
Jafar	Bl $\succ$ Be $\succ$ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Ja
Belle	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja
Sorcière	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja

Matin 1: chaque homme fait sa demande à sa préférée

Jours	Femmes	Prétendants
1	Blanche-neige	Aladdin, Jafar
	Belle	Gaston
	Sorcière	/

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl $\succ$ Be $\succ$ So
Gaston	Be $\succ$ Bl $\succ$ So
Jafar	Bl $\succ$ Be $\succ$ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Ja
Belle	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja
Sorcière	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja

Après-midi 1: Blanche-neige dit *“Non”* à Jafar

Jours	Femmes	Prétendants
1	Blanche-neige	Aladdin, Jafar
	Belle	Gaston
	Sorcière	/

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl $\succ$ Be $\succ$ So
Gaston	Be $\succ$ Bl $\succ$ So
Jafar	~~Bl~~ $\succ$ Be $\succ$ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Ja
Belle	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja
Sorcière	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja

Soir 1: Jafar barre Blanche-neige de sa liste

Jours	Femmes	Prétendants
1	Blanche-neige	Aladdin, Jafar
	Belle	Gaston
	Sorcière	/

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl $\succ$ Be $\succ$ So
Gaston	Be $\succ$ Bl $\succ$ So
Jafar	~~Bl~~ $\succ$ Be $\succ$ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Ja
Belle	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja
Sorcière	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja

Matin 2: chaque homme fait sa demande à sa (nouvelle) préférée

Jours	Femmes	Prétendants
1	Blanche-neige	Aladdin, Jafar
	Belle	Gaston
	Sorcière	/
2	Blanche-neige	Aladdin
	Belle	Gaston, Jafar
	Sorcière	/

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl $\succ$ Be $\succ$ So
Gaston	Be $\succ$ Bl $\succ$ So
Jafar	~~Bl~~ $\succ$ Be $\succ$ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Ja
Belle	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja
Sorcière	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja

Après-midi 2: Belle dit *"Non"* à Jafar

Jours	Femmes	Prétendants
1	Blanche-neige	Aladdin, Jafar
	Belle	Gaston
	Sorcière	/
2	Blanche-neige	Aladdin
	Belle	Gaston, Jafar
	Sorcière	/

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl $\succ$ Be $\succ$ So
Gaston	Be $\succ$ Bl $\succ$ So
Jafar	~~Bl~~ $\succ$ ~~Be~~ $\succ$ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Ja
Belle	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja
Sorcière	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja

Soir 2: Jafar barre Belle de sa liste

Jours	Femmes	Prétendants
1	Blanche-neige	Aladdin, Jafar
	Belle	Gaston
	Sorcière	/
2	Blanche-neige	Aladdin
	Belle	Gaston, Jafar
	Sorcière	/

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl $\succ$ Be $\succ$ So
Gaston	Be $\succ$ Bl $\succ$ So
Jafar	~~Bl~~ $\succ$ ~~Be~~ $\succ$ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Ja
Belle	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja
Sorcière	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja

Matin 3: chaque homme fait sa demande à sa (nouvelle) préférée

Jours	Femmes	Prétendants
1	Blanche-neige	Aladdin, Jafar
	Belle	Gaston
	Sorcière	/
2	Blanche-neige	Aladdin
	Belle	Gaston, Jafar
	Sorcière	/
3	Blanche-neige	Aladdin
	Belle	Gaston
	Sorcière	Jafar

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl ≻ Be ≻ So
Gaston	Be ≻ Bl ≻ So
Jafar	~~Bl~~ ≻ ~~Be~~ ≻ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga ≻ Al ≻ Ja
Belle	Al ≻ Ga ≻ Ja
Sorcière	Al ≻ Ga ≻ Ja

Après-midi 3: Personne n'est éconduit

Jours	Femmes	Prétendants
1	Blanche-neige	Aladdin, Jafar
	Belle	Gaston
	Sorcière	/
2	Blanche-neige	Aladdin
	Belle	Gaston, Jafar
	Sorcière	/
3	Blanche-neige	Aladdin
	Belle	Gaston
	Sorcière	Jafar

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl $\succ$ Be $\succ$ So
Gaston	Be $\succ$ Bl $\succ$ So
Jafar	$\cancel{\text{Bl}} \succ \cancel{\text{Be}} \succ$ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Ja
Belle	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja
Sorcière	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja

Soir 3: Toutes les femmes disent *“Oui”* à leurs prétendants.

Jours	Femmes	Prétendants
1	Blanche-neige	Aladdin, Jafar
	Belle	Gaston
	Sorcière	/
2	Blanche-neige	Aladdin
	Belle	Gaston, Jafar
	Sorcière	/
3	Blanche-neige	Aladdin
	Belle	Gaston
	Sorcière	Jafar

Hommes	Femmes
Aladdin	Bl $\succ$ Be $\succ$ So
Gaston	Be $\succ$ Bl $\succ$ So
Jafar	~~Bl~~ $\succ$ ~~Be~~ $\succ$ So

Femmes	Hommes
Blanche neige	Ga $\succ$ Al $\succ$ Ja
Belle	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja
Sorcière	Al $\succ$ Ga $\succ$ Ja

Soir 3: Toutes les femmes disent *"Oui"* à leurs prétendants.

Jours	Femmes	Prétendants
1	Blanche-neige	Aladdin, Jafar
	Belle	Gaston
	Sorcière	/
2	Blanche-neige	Aladdin
	Belle	Gaston, Jafar
	Sorcière	/
3	Blanche-neige	Aladdin
	Belle	Gaston
	Sorcière	Jafar

Cette solution est stable !!!

Résultats concernant l'algorithme de Gale-Shapley

Théorème

L'algorithme de Gale-Shapley appliqué à n hommes et n femmes

- termine toujours (après au pire n^2 étapes),
- retourne une solution stable.

Résultats concernant l'algorithme de Gale-Shapley

Théorème

L'algorithme de Gale-Shapley appliqué à n hommes et n femmes

- termine toujours (après au pire n^2 étapes),
- retourne une solution stable.

Est-il *"optimal"* ?

A propos d'optimalité...

Hommes	Femmes
A	$Y \succ X \succ Z$
B	$Z \succ Y \succ X$
C	$X \succ Z \succ Y$

Femmes	Hommes
X	$B \succ A \succ C$
Y	$C \succ B \succ A$
Z	$A \succ C \succ B$

On peut montrer qu'il existe trois solutions stables:

(A,Y)	(A,X)	(A,Z)
(B,Z)	(B,Y)	(B,X)
(C,X)	(C,Z)	(C,Y)

Homme-optimale

A propos d'optimalité...

Hommes	Femmes
A	$Y \succ X \succ Z$
B	$Z \succ Y \succ X$
C	$X \succ Z \succ Y$

Femmes	Hommes
X	$B \succ A \succ C$
Y	$C \succ B \succ A$
Z	$A \succ C \succ B$

On peut montrer qu'il existe trois solutions stables:

Homme-optimale		Femme-optimale
(A,Y)	(A,X)	(A,Z)
(B,Z)	(B,Y)	(B,X)
(C,X)	(C,Z)	(C,Y)

A propos d'optimalité...

Hommes	Femmes
A	$Y \succ X \succ Z$
B	$Z \succ Y \succ X$
C	$X \succ Z \succ Y$

Femmes	Hommes
X	$B \succ A \succ C$
Y	$C \succ B \succ A$
Z	$A \succ C \succ B$

On peut montrer qu'il existe trois solutions stables:

Homme-optimale	Equitable	Femme-optimale
(A,Y)	(A,X)	(A,Z)
(B,Z)	(B,Y)	(B,X)
(C,X)	(C,Z)	(C,Y)

A propos d'optimalité...

Hommes	Femmes
A	Y $\succ$ X $\succ$ Z
B	Z $\succ$ Y $\succ$ X
C	X $\succ$ Z $\succ$ Y

Femmes	Hommes
X	B $\succ$ A $\succ$ C
Y	C $\succ$ B $\succ$ A
Z	A $\succ$ C $\succ$ B

On peut montrer qu'il existe trois solutions stables:

(A,Y)	(A,X)	(A,Z)
(B,Z)	(B,Y)	(B,X)
(C,X)	(C,Z)	(C,Y)
Homme-optimale Femme-pessimale	Equitable	Femme-optimale Homme-pessimale

A propos d'optimalité...

Hommes	Femmes
A	Y $\succ$ X $\succ$ Z
B	Z $\succ$ Y $\succ$ X
C	X $\succ$ Z $\succ$ Y

Femmes	Hommes
X	B $\succ$ A $\succ$ C
Y	C $\succ$ B $\succ$ A
Z	A $\succ$ C $\succ$ B

On peut montrer qu'il existe trois solutions stables:

(A,Y)	(A,X)	(A,Z)
(B,Z)	(B,Y)	(B,X)
(C,X)	(C,Z)	(C,Y)
Homme-optimale Femme-pessimale	Equitable	Femme-optimale Homme-pessimale

Quelle solution retourne l'algorithme de Gale-Shapley ?

Application de l’algorithme de Gale-Shapley

Hommes	Femmes
A	$Y \succ X \succ Z$
B	$Z \succ Y \succ X$
C	$X \succ Z \succ Y$

Femmes	Hommes
X	$B \succ A \succ C$
Y	$C \succ B \succ A$
Z	$A \succ C \succ B$

Jours	Femmes	Prétendants
1	X	C
	Y	A
	Z	B

Application de l'algorithme de Gale-Shapley

Hommes	Femmes
A	Y $\succ$ X $\succ$ Z
B	Z $\succ$ Y $\succ$ X
C	X $\succ$ Z $\succ$ Y

Femmes	Hommes
X	B $\succ$ A $\succ$ C
Y	C $\succ$ B $\succ$ A
Z	A $\succ$ C $\succ$ B

Jours	Femmes	Prétendants
1	X	C
	Y	A
	Z	B

Théorème

L'algorithme de Gale-Shapley appliqué à n hommes et n femmes

- termine toujours (après au pire n^2 étapes),
- retourne une solution stable,
- qui est Homme-optimale et Femme-pessimale.

C’est rigolo...

... mais ça sert à quoi ???

Application

Aux Etats-Unis et au Canada,

l’algorithme de Gale-Shappley est utilisé

pour décider de l’affectation des internes

en tenant compte de leurs préférences

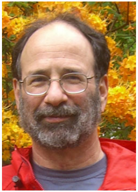
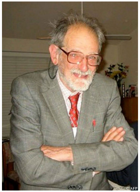
et de celles des hôpitaux.

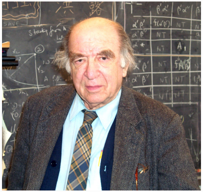
Plan de l'exposé

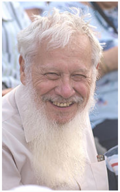
Prix Nobel en théorie des jeux

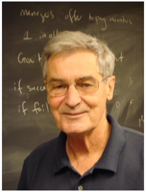
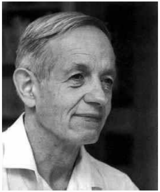
- In 2014: Jean Tirole
- In 2012: Alvin Roth, Lloyd Shapley
- In 2007: Roger B. Myerson, Leonid Hurwicz, Eric S. Maskin
- In 2005: Robert J. Aumann, Thomas C. Schelling
- In 1996: William Vickrey
- In 1995: Robert E. Lucas Jr.
- In 1994: John C. Harsanyi, John F. Nash Jr., Reinhard Selten
- In 1972: Kenneth J. Arrow
- In 1970: Paul A. Samuelson

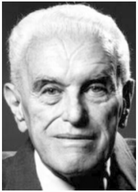
Prix Nobel en théorie des jeux







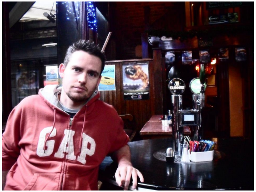
Théorie des jeux à l'UMONS

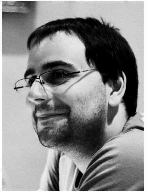
- De nombreux chercheurs travaillent sur des problèmes liés à la théorie des jeux et à ses applications à l'informatique, à la microfinance,...

  Aaron Bohy, Thomas Brihaye, Véronique Bruyère, Julie De Pril, Marc Ducobu, Morgane Estiévenart, Noémie Meunier, Mickael Randour, Cédric Rivière,...

- Un cours de théorie des jeux est organisé en Master 1 en sciences mathématiques.

Théorie des jeux à l'UMONS





Merci!