L'infini

Séminaire du CREM 2012-13

Thierry Libert

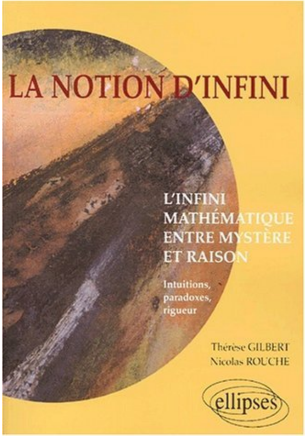
Le 26 avril 2013

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \ \ldots$$

$$\{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \ldots\}$$

$$\mathbb{N} = \{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \ldots\}$$

Pub


LA NOTION D'INFINI
L'INFINI MATHÉMATIQUE ENTRE MYSTÈRE ET RAISON
Intuitions, paradoxes, rigueur
Thérèse GILBERT
Nicolas ROUCHE
ellipses

À méditer...

Pour Dedekind, l'homme est un arithméticien qui pense grâce à deux opérations fondamentales :

À méditer...

Pour Dedekind, l'homme est un arithméticien qui pense grâce à deux opérations fondamentales :

- la première consiste à « réunir en pensée des choses différentes » et donne naissance au concept d'*ensemble* ;

À méditer...

Pour Dedekind, l'homme est un arithméticien qui pense grâce à deux opérations fondamentales :

- la première consiste à « réunir en pensée des choses différentes » et donne naissance au concept d'*ensemble* ;
- la seconde à « faire correspondre une chose à une autre, ou à représenter une chose par une autre », et il en résulte le concept d'*application* ou de *fonction*.

Le nombre cardinal

Le nombre cardinal

- Le nombre est une caractéristique (propriété) d'une collection d'objets (ensemble), pas de ses éléments pris isolément.

Le nombre cardinal

- Le nombre est une caractéristique (propriété) d'une collection d'objets (ensemble), pas de ses éléments pris isolément.
- Le nombre ne dépend pas de la nature des éléments constituant la collection, ni de leur arrangement (structure).

Le nombre cardinal

- Le nombre est une caractéristique (propriété) d'une collection d'objets (ensemble), pas de ses éléments pris isolément.
- Le nombre ne dépend pas de la nature des éléments constituant la collection, ni de leur arrangement (structure).
- Des ensembles dont les éléments peuvent être mis en correspondance biunivoque (bijection) ont même cardinal.

Le nombre cardinal

- Le nombre est une caractéristique (propriété) d'une collection d'objets (ensemble), pas de ses éléments pris isolément.
- Le nombre ne dépend pas de la nature des éléments constituant la collection, ni de leur arrangement (structure).
- Des ensembles dont les éléments peuvent être mis en correspondance biunivoque (bijection) ont même cardinal.

Définition

Des ensembles qui peuvent être mis en bijection sont *équipotents*.

Le nombre cardinal

- Le nombre est une caractéristique (propriété) d'une collection d'objets (ensemble), pas de ses éléments pris isolément.
- Le nombre ne dépend pas de la nature des éléments constituant la collection, ni de leur arrangement (structure).
- Des ensembles dont les éléments peuvent être mis en correspondance biunivoque (bijection) ont même cardinal.

Définition

Des ensembles qui peuvent être mis en bijection sont *équipotents*.

Remarque

Une *injection* de A dans B n'est autre qu'une bijection de A sur une partie (sous-ensemble) de B.

Un peu de combinatoire finie

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est ici désigné par $|E|$.

Un peu de combinatoire finie

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est ici désigné par $|E|$.

Fait

Soient A et B des ensembles finis.
S'il existe une injection de A dans B, alors $|A| \leqslant |B|$.

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est ici désigné par $|E|$.

Fait

Soient A et B des ensembles finis.
S'il existe une injection de A dans B, alors $|A| \leqslant |B|$.

Ou encore, de manière équivalente :

Théorème (Principe des tiroirs / Principe de Dirichlet)

Soient A et B des ensembles finis.
Si $|A| > |B|$, alors il n'existe pas d'injection de A dans B.

Un peu de combinatoire finie

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est ici désigné par $|E|$.

Fait

Soient A et B des ensembles finis.
S'il existe une injection de A dans B, alors $|A| \leqslant |B|$.

Ou encore, de manière équivalente :

Théorème (Principe des tiroirs / Principe de Dirichlet)

Soient A et B des ensembles finis.
Si $|A| > |B|$, alors il n'existe pas d'injection de A dans B.

Corollaire ("Le tout est plus grand que la partie")

*Si A est un ensemble fini et si B est une partie **propre** de A, alors il n'existe pas de bijection de A sur B.*

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \end{array}$$

0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\cdots$
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\cdots$

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
\\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \cdots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \cdots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & \cdots \\
\bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \cdots \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & & \circ & & \circ & & \circ & & \circ & & \circ & & \circ & & \cdots
\end{array}
$$

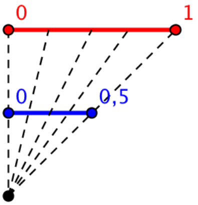
- $n \longmapsto n+1$ définit une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}\backslash\{0\}$.

- $n \longmapsto n+1$ définit une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}\backslash\{0\}$.
- $n \longmapsto 2n$ définit une bijection de $\mathbb{N}$ sur $2\mathbb{N}$.

L'infini

- $n \longmapsto n+1$ définit une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}\backslash\{0\}$.
- $n \longmapsto 2n$ définit une bijection de $\mathbb{N}$ sur $2\mathbb{N}$.
- $n \longmapsto n^2$ définit une bijection de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble des carrés.

- $n \longmapsto n+1$ définit une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}\setminus\{0\}$.
- $n \longmapsto 2n$ définit une bijection de $\mathbb{N}$ sur $2\mathbb{N}$.
- $n \longmapsto n^2$ définit une bijection de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble des carrés.
- $x \longmapsto \frac{x}{2}$ définit une bijection de $[0,1]$ sur $[0,\frac{1}{2}]$.



Définition (Dedekind)

Un ensemble est *infini* ssi il est équipotent à une partie propre.

L'infini

Définition (Dedekind)

Un ensemble est *infini* ssi il est équipotent à une partie propre.

De manière équivalente :

Fait

Un ensemble A *est infini ssi il existe une injection de* $\mathbb{N}$ *dans* A.

L'infini

Définition (Dedekind)

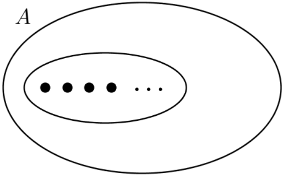
Un ensemble est *infini* ssi il est équipotent à une partie propre.

De manière équivalente :

Fait

Un ensemble A est infini ssi il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans A.

Autrement dit, un ensemble est infini s'il contient une copie de $\mathbb{N}$.



L'addition de cardinaux se définit comme à l'école primaire.

L'addition de cardinaux se définit comme à l'école primaire.
Voici dès lors d'autres caractérisations de l'infini :

Proposition

Un ensemble A est infini ssi $|A| + 1 = |A|$.

Idée de la preuve : au tableau.

L'addition de cardinaux se définit comme à l'école primaire.
Voici dès lors d'autres caractérisations de l'infini :

Proposition

Un ensemble A est infini ssi $|A| + 1 = |A|$.

Idée de la preuve : au tableau.

Proposition

Un ensemble A est infini ssi $|A| + \aleph_0 = |A|$, où $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$.

Idée de la preuve : au tableau.

L'addition de cardinaux se définit comme à l'école primaire.
Voici dès lors d'autres caractérisations de l'infini :

Proposition

Un ensemble A est infini ssi $|A| + 1 = |A|$.

Idée de la preuve : au tableau.

Proposition

Un ensemble A est infini ssi $|A| + \aleph_0 = |A|$, où $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$.

Idée de la preuve : au tableau.

Question : si A est infini, a-t-on nécessairement $|A| = \aleph_0$?

L'addition de cardinaux se définit comme à l'école primaire.
Voici dès lors d'autres caractérisations de l'infini :

Proposition

Un ensemble A est infini ssi $|A| + 1 = |A|$.

Idée de la preuve : au tableau.

Proposition

Un ensemble A est infini ssi $|A| + \aleph_0 = |A|$, où $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$.

Idée de la preuve : au tableau.

Question : si A est infini, a-t-on nécessairement $|A| = \aleph_0$?

En particulier, que peut-on dire du cardinal de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$?

L'infini dénombrable

Définition

Un ensemble infini est dit *dénombrable* ssi il est équipotent à $\mathbb{N}$.

Définition

Un ensemble infini est dit *dénombrable* ssi il est équipotent à $\mathbb{N}$.

En d'autres termes, A est dénombrable s'il peut s'écrire

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

L'infini dénombrable

Définition

Un ensemble infini est dit *dénombrable* ssi il est équipotent à $\mathbb{N}$.

En d'autres termes, A est dénombrable s'il peut s'écrire

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

Exemple : $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots\}$

L'infini dénombrable

Définition

Un ensemble infini est dit *dénombrable* ssi il est équipotent à $\mathbb{N}$.

En d'autres termes, A est dénombrable s'il peut s'écrire

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

Exemple : $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots\}$

Fait

Si B est un sous-ensemble infini de A et si A est dénombrable, alors B est aussi dénombrable.

Idée de la preuve : crible.

L'infini dénombrable

Définition

Un ensemble infini est dit *dénombrable* ssi il est équipotent à $\mathbb{N}$.

En d'autres termes, A est dénombrable s'il peut s'écrire

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

Exemple : $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots\}$

Fait

Si B est un sous-ensemble infini de A et si A est dénombrable, alors B est aussi dénombrable.

Idée de la preuve : crible.

Exemple : $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$

L'infini dénombrable

Définition

Un ensemble infini est dit *dénombrable* ssi il est équipotent à $\mathbb{N}$.

En d'autres termes, A est dénombrable s'il peut s'écrire

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

Exemple : $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots\}$

Fait

Si B est un sous-ensemble infini de A et si A est dénombrable, alors B est aussi dénombrable.

Idée de la preuve : crible.

Exemple : $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ $\quad \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \ldots\}$

L'infini dénombrable

Définition

Un ensemble infini est dit *dénombrable* ssi il est équipotent à $\mathbb{N}$.

En d'autres termes, A est dénombrable s'il peut s'écrire

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

Exemple : $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots\}$

Fait

Si B est un sous-ensemble infini de A et si A est dénombrable, alors B est aussi dénombrable.

Idée de la preuve : crible.

Exemple : $[0,1] \cap \mathbb{Q} = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \cancel{\frac{0}{2}}, \frac{1}{2}, \cancel{\frac{2}{2}}, \cancel{\frac{0}{3}}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \cancel{\frac{3}{3}}, \cancel{\frac{0}{4}}, \frac{1}{4}, \cancel{\frac{2}{4}}, \frac{3}{4}, \cancel{\frac{4}{4}}, \ldots\}$

L'infini dénombrable

Définition

Un ensemble infini est dit *dénombrable* ssi il est équipotent à $\mathbb{N}$.

En d'autres termes, A est dénombrable s'il peut s'écrire

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

Exemple : $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots\}$

Fait

Si B est un sous-ensemble infini de A et si A est dénombrable, alors B est aussi dénombrable.

Idée de la preuve : crible.

Exemple : $[0,1] \cap \mathbb{Q} = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \cancel{\frac{0}{2}}, \frac{1}{2}, \cancel{\frac{2}{2}}, \cancel{\frac{0}{3}}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \cancel{\frac{3}{3}}, \cancel{\frac{0}{4}}, \frac{1}{4}, \cancel{\frac{2}{4}}, \frac{3}{4}, \cancel{\frac{4}{4}}, \ldots\}$

Exercice : montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

L'argument de la diagonale

Théorème (Cantor)

Si $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$, *alors il existe* $r \in [0,1]$ *tel que* $r \notin \mathrm{Im}(f)$.

L'argument de la diagonale

Théorème (Cantor)

Si $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$*, alors il existe* $r \in [0,1]$ *tel que* $r \notin \mathrm{Im}(f)$*.*

Démonstration.

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$. Écrivons chaque $f(n)$ sous forme décimale :

$f(n) := 0, f_{n0} f_{n1} f_{n2} f_{n3} \ldots$ où chaque f_{nk} est un chiffre décimal.

L'argument de la diagonale

Théorème (Cantor)

Si $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1]$*, alors il existe* $r \in [0, 1]$ *tel que* $r \notin \mathrm{Im}(f)$*.*

Démonstration.

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1]$. Écrivons chaque $f(n)$ sous forme décimale :

$f(n) := 0, f_{n0} f_{n1} f_{n2} f_{n3} \ldots$ où chaque f_{nk} est un chiffre décimal.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, choisissons r_n différent de f_{nn} et posons

$$r := 0, r_0 r_1 r_2 r_3 \ldots$$

L'argument de la diagonale

Théorème (Cantor)

Si $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$*, alors il existe* $r \in [0,1]$ *tel que* $r \notin \mathrm{Im}(f)$*.*

Démonstration.

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$. Écrivons chaque $f(n)$ sous forme décimale :

$f(n) := 0, f_{n0} f_{n1} f_{n2} f_{n3} \ldots$ où chaque f_{nk} est un chiffre décimal.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, choisissons r_n différent de f_{nn} et posons

$$r := 0, r_0 r_1 r_2 r_3 \ldots$$

Ainsi, $r \in [0,1]$ et l'écriture décimale de r est différente de celle de $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'argument de la diagonale

Théorème (Cantor)

Si $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$*, alors il existe* $r \in [0,1]$ *tel que* $r \notin \mathrm{Im}(f)$*.*

Démonstration.

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$. Écrivons chaque $f(n)$ sous forme décimale :

$f(n) := 0, f_{n0}f_{n1}f_{n2}f_{n3}\dots$ où chaque f_{nk} est un chiffre décimal.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, choisissons r_n différent de f_{nn} et posons

$$r := 0, r_0 r_1 r_2 r_3 \dots$$

Ainsi, $r \in [0,1]$ et l'écriture décimale de r est différente de celle de $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où $r \notin \mathrm{Im}(f)$.

L'argument de la diagonale

Théorème (Cantor)

Si $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$, *alors il existe* $r \in [0,1]$ *tel que* $r \notin \mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$. Écrivons chaque $f(n)$ sous forme décimale :

$f(n) := 0, f_{n0} f_{n1} f_{n2} f_{n3} \ldots$ où chaque f_{nk} est un chiffre décimal.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, choisissons r_n différent de f_{nn} et posons

$$r := 0, r_0 r_1 r_2 r_3 \ldots$$

Ainsi, $r \in [0,1]$ et l'écriture décimale de r est différente de celle de $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où $r \notin \mathrm{Im}(f)$. Pas nécessairement...

Théorème (Cantor)

Si $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$*, alors il existe* $r \in [0,1]$ *tel que* $r \notin \mathrm{Im}(f)$*.*

Bonne démonstration.

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$. Écrivons chaque $f(n)$ sous forme décimale :

$f(n) := 0, f_{n0} f_{n1} f_{n2} f_{n3} \dots$ où chaque f_{nk} est un chiffre décimal.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, définissons $r_n := \begin{cases} 2 \text{ si } f_{nn} = 1 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$ et posons

$$r := 0, r_0 r_1 r_2 r_3 \dots$$

Ainsi, $r \in [0,1]$, r **n**'est **pas** décimal et l'écriture décimale de r est différente de celle de $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où $r \notin \mathrm{Im}(f)$.

Corollaire

Il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ *sur* $[0,1]$.

Corollaire

Il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ *sur* $[0, 1]$.

D'où $[0, 1]$, et donc $\mathbb{R}$, n'est pas dénombrable !

Corollaire

Il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ *sur* $[0, 1]$.

D'où $[0, 1]$, et donc $\mathbb{R}$, n'est pas dénombrable !

Notation : $\mathfrak{c} := |\mathbb{R}|$, appelé la **puissance du continu**.

Corollaire

Il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur $[0,1]$.

D'où $[0,1]$, et donc $\mathbb{R}$, n'est pas dénombrable !

Notation : $\mathfrak{c} := |\mathbb{R}|$, appelé la **puissance du continu**.

Remarquons en passant que $\mathbb{R}$ et $]0,1[$ sont équipotents :

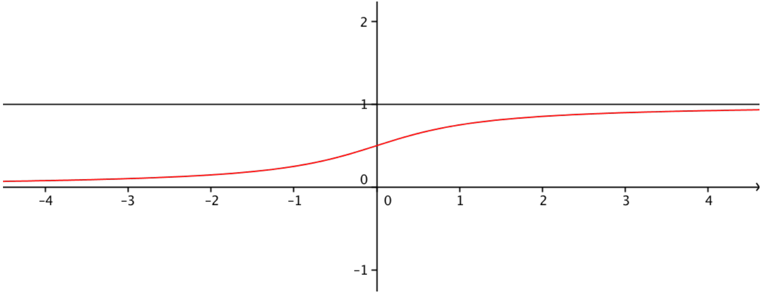
Corollaire

Il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur $[0,1]$.

D'où $[0,1]$, et donc $\mathbb{R}$, n'est pas dénombrable !

Notation : $\mathfrak{c} := |\mathbb{R}|$, appelé la **puissance du continu**.

Remarquons en passant que $\mathbb{R}$ et $]0,1[$ sont équipotents :



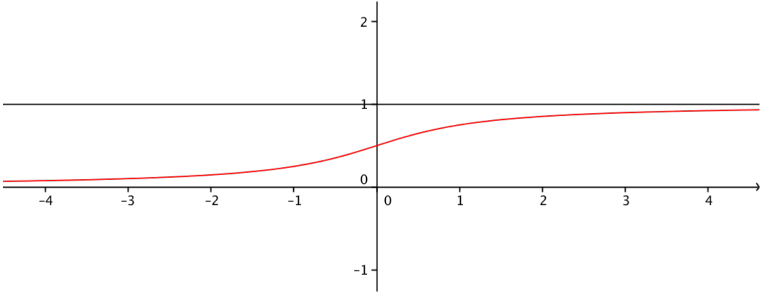
Corollaire

Il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur $[0,1]$.

D'où $[0,1]$, et donc $\mathbb{R}$, n'est pas dénombrable !

Notation : $\mathfrak{c} := |\mathbb{R}|$, appelé la **puissance du continu**.

Remarquons en passant que $\mathbb{R}$ et $]0,1[$ sont équipotents :



Et $]0,1[$ et $[0,1]$ le sont aussi...

Retour sur le développement décimal

Notons $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies de chiffres décimaux.

Retour sur le développement décimal

Notons $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies de chiffres décimaux.
Soient $a \in [0,1]$ et $(a_0a_1a_2a_3\ldots) \in \underline{10}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$a = 0, a_0a_1a_2a_3\ldots \text{ en base 10}$$

si et seulement si

$$a = \frac{a_0}{10^1} + \frac{a_1}{10^2} + \frac{a_2}{10^3} + \frac{a_3}{10^4} + \ldots (= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^{k+1}})$$

Retour sur le développement décimal

Notons $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies de chiffres décimaux.
Soient $a \in [0,1]$ et $(a_0 a_1 a_2 a_3 \dots) \in \underline{10}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$a = 0, a_0 a_1 a_2 a_3 \dots \text{ en base } 10$$

si et seulement si

$$a = \frac{a_0}{10^1} + \frac{a_1}{10^2} + \frac{a_2}{10^3} + \frac{a_3}{10^4} + \dots (= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^{k+1}})$$

Exemples :

Retour sur le développement décimal

Notons $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies de chiffres décimaux.
Soient $a \in [0,1]$ et $(a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots) \in \underline{10}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$a = 0, a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots \text{ en base 10}$$

si et seulement si

$$a = \frac{a_0}{10^1} + \frac{a_1}{10^2} + \frac{a_2}{10^3} + \frac{a_3}{10^4} + \ldots (= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^{k+1}})$$

Exemples :

- $\frac{33}{10^2} = 0,330000\ldots$

Retour sur le développement décimal

Notons $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies de chiffres décimaux.
Soient $a \in [0,1]$ et $(a_0a_1a_2a_3\dots) \in \underline{10}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$a = 0, a_0a_1a_2a_3\dots \text{ en base 10}$$

si et seulement si

$$a = \frac{a_0}{10^1} + \frac{a_1}{10^2} + \frac{a_2}{10^3} + \frac{a_3}{10^4} + \dots (= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^{k+1}})$$

Exemples :

- $\frac{33}{10^2} = 0,330000\dots = 0,329999\dots$ (nombre décimal)

Retour sur le développement décimal

Notons $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies de chiffres décimaux. Soient $a \in [0,1]$ et $(a_0 a_1 a_2 a_3 \dots) \in \underline{10}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$a = 0, a_0 a_1 a_2 a_3 \dots \text{ en base 10}$$

si et seulement si

$$a = \frac{a_0}{10^1} + \frac{a_1}{10^2} + \frac{a_2}{10^3} + \frac{a_3}{10^4} + \dots (= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^{k+1}})$$

Exemples :

- $\frac{33}{10^2} = 0,330000\dots = 0,329999\dots$ (nombre décimal)
- $\frac{1}{3} = 0,333333\dots$ (nombre rationnel non décimal)

Retour sur le développement décimal

On a une correspondance entre $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ et $[0,1]$ donnée par :

$$(a_0 a_1 a_2 \ldots) \in \underline{10}^{\mathbb{N}} \quad \Longleftrightarrow \quad 0, a_0 a_1 a_2 \cdots \in [0,1]$$

Retour sur le développement décimal

On a une correspondance entre $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ et $[0,1]$ donnée par :

$$(a_0 a_1 a_2 \dots) \in \underline{10}^{\mathbb{N}} \quad \Longleftrightarrow \quad 0, a_0 a_1 a_2 \cdots \in [0,1]$$

Cette correspondance n'est pas bijective puisqu'un nombre décimal non-nul admet deux développements décimaux.

Retour sur le développement décimal

On a une correspondance entre $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ et $[0,1]$ donnée par :

$$(a_0 a_1 a_2 \ldots) \in \underline{10}^{\mathbb{N}} \quad \Longleftrightarrow \quad 0, a_0 a_1 a_2 \cdots \in [0,1]$$

Cette correspondance n'est pas bijective puisqu'un nombre décimal non-nul admet deux développements décimaux.
Choisissons l'un d'entre eux, disons celui qui ne se termine pas par une infinité de 9 ; on crée ainsi une injection de $[0,1[$ dans $\underline{10}^{\mathbb{N}}$.

Retour sur le développement décimal

On a une correspondance entre $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ et $[0,1]$ donnée par :

$$(a_0 a_1 a_2 \ldots) \in \underline{10}^{\mathbb{N}} \quad \Longleftrightarrow \quad 0, a_0 a_1 a_2 \cdots \in [0,1]$$

Cette correspondance n'est pas bijective puisqu'un nombre décimal non-nul admet deux développements décimaux.
Choisissons l'un d'entre eux, disons celui qui ne se termine pas par une infinité de 9 ; on crée ainsi une injection de $[0,1[$ dans $\underline{10}^{\mathbb{N}}$.
Les éléments qui ne sont pas dans l'image correspondent aux nombres décimaux de $]0,1]$, qui sont dénombrables car rationnels !

Retour sur le développement décimal

On a une correspondance entre $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ et $[0,1]$ donnée par :

$$(a_0 a_1 a_2 \dots) \in \underline{10}^{\mathbb{N}} \quad \Longleftrightarrow \quad 0, a_0 a_1 a_2 \dots \in [0,1]$$

Cette correspondance n'est pas bijective puisqu'un nombre décimal non-nul admet deux développements décimaux.
Choisissons l'un d'entre eux, disons celui qui ne se termine pas par une infinité de 9 ; on crée ainsi une injection de $[0,1[$ dans $\underline{10}^{\mathbb{N}}$.
Les éléments qui ne sont pas dans l'image correspondent aux nombres décimaux de $]0,1]$, qui sont dénombrables car rationnels !
Mais on ne change pas le nombre d'éléments d'un ensemble infini si on lui ajoute une infinité dénombrables d'éléments.

Retour sur le développement décimal

On a une correspondance entre $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ et $[0,1]$ donnée par :

$$(a_0 a_1 a_2 \dots) \in \underline{10}^{\mathbb{N}} \quad \Longleftrightarrow \quad 0, a_0 a_1 a_2 \dots \in [0,1]$$

Cette correspondance n'est pas bijective puisqu'un nombre décimal non-nul admet deux développements décimaux.
Choisissons l'un d'entre eux, disons celui qui ne se termine pas par une infinité de 9 ; on crée ainsi une injection de $[0,1[$ dans $\underline{10}^{\mathbb{N}}$.
Les éléments qui ne sont pas dans l'image correspondent aux nombres décimaux de $]0,1]$, qui sont dénombrables car rationnels !
Mais on ne change pas le nombre d'éléments d'un ensemble infini si on lui ajoute une infinité dénombrables d'éléments.
Il s'ensuit que $[0,1[$ (resp. $[0,1]$ ou $\mathbb{R}$) et $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents.

Le plan et la droite sont équipotents

On a une bijection de $\underline{10}^{\mathbb{N}} \times \underline{10}^{\mathbb{N}}$ sur $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$((a_0 a_1 a_2 \ldots), (b_0 b_1 b_2 \ldots)) \longmapsto (a_0 b_0 a_1 b_1 \ldots)$$

Le plan et la droite sont équipotents

On a une bijection de $\underline{10}^{\mathbb{N}} \times \underline{10}^{\mathbb{N}}$ sur $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$((a_0 a_1 a_2 \ldots), (b_0 b_1 b_2 \ldots)) \longmapsto (a_0 b_0 a_1 b_1 \ldots)$$

Il en résulte une bijection de $[0,1]^2$ sur $[0,1]$ ou de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$!

Le plan et la droite sont équipotents

On a une bijection de $\underline{10}^{\mathbb{N}} \times \underline{10}^{\mathbb{N}}$ sur $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$((a_0 a_1 a_2 \ldots), (b_0 b_1 b_2 \ldots)) \longmapsto (a_0 b_0 a_1 b_1 \ldots)$$

Il en résulte une bijection de $[0,1]^2$ sur $[0,1]$ ou de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$!
Plus généralement, on montre que $\mathbb{R}^n$ est équipotent à $\mathbb{R}$.

Le plan et la droite sont équipotents

On a une bijection de $\underline{10}^{\mathbb{N}} \times \underline{10}^{\mathbb{N}}$ sur $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$((a_0 a_1 a_2 \dots), (b_0 b_1 b_2 \dots)) \longmapsto (a_0 b_0 a_1 b_1 \dots)$$

Il en résulte une bijection de $[0,1]^2$ sur $[0,1]$ ou de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$!
Plus généralement, on montre que $\mathbb{R}^n$ est équipotent à $\mathbb{R}$.

Cantor : «Je le vois, mais je ne le crois pas.»

Le plan et la droite sont équipotents

On a une bijection de $\underline{10}^{\mathbb{N}} \times \underline{10}^{\mathbb{N}}$ sur $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$((a_0 a_1 a_2 \ldots), (b_0 b_1 b_2 \ldots)) \longmapsto (a_0 b_0 a_1 b_1 \ldots)$$

Il en résulte une bijection de $[0,1]^2$ sur $[0,1]$ ou de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$!
Plus généralement, on montre que $\mathbb{R}^n$ est équipotent à $\mathbb{R}$.

> *Cantor : «Je le vois, mais je ne le crois pas.»*
> *Dedekind : il ne doit pas exister de bijection **continue**...*

Le plan et la droite sont équipotents

On a une bijection de $\underline{10}^{\mathbb{N}} \times \underline{10}^{\mathbb{N}}$ sur $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$((a_0 a_1 a_2 \ldots), (b_0 b_1 b_2 \ldots)) \longmapsto (a_0 b_0 a_1 b_1 \ldots)$$

Il en résulte une bijection de $[0,1]^2$ sur $[0,1]$ ou de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$!
Plus généralement, on montre que $\mathbb{R}^n$ est équipotent à $\mathbb{R}$.

> *Cantor : «Je le vois, mais je ne le crois pas.»*
> *Dedekind : il ne doit pas exister de bijection* ***continue****...*

Effectivement, $\mathbb{R}^2$ n'est pas **homéomorphe** à $\mathbb{R}$. (Pourquoi ?)

Le plan et la droite sont équipotents

On a une bijection de $\underline{10}^{\mathbb{N}} \times \underline{10}^{\mathbb{N}}$ sur $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$((a_0a_1a_2\ldots),(b_0b_1b_2\ldots)) \longmapsto (a_0b_0a_1b_1\ldots)$$

Il en résulte une bijection de $[0,1]^2$ sur $[0,1]$ ou de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$!
Plus généralement, on montre que $\mathbb{R}^n$ est équipotent à $\mathbb{R}$.

> *Cantor : «Je le vois, mais je ne le crois pas.»*
> *Dedekind : il ne doit pas exister de bijection* ***continue****...*

Effectivement, $\mathbb{R}^2$ n'est pas **homéomorphe** à $\mathbb{R}$. (Pourquoi ?)
En fait, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ ne sont pas homéomorphes si $n \neq m$.

Le plan et la droite sont équipotents

On a une bijection de $\underline{10}^{\mathbb{N}} \times \underline{10}^{\mathbb{N}}$ sur $\underline{10}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$((a_0 a_1 a_2 \ldots), (b_0 b_1 b_2 \ldots)) \longmapsto (a_0 b_0 a_1 b_1 \ldots)$$

Il en résulte une bijection de $[0,1]^2$ sur $[0,1]$ ou de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$!
Plus généralement, on montre que $\mathbb{R}^n$ est équipotent à $\mathbb{R}$.

Cantor : «Je le vois, mais je ne le crois pas.»
Dedekind : il ne doit pas exister de bijection ***continue****...*

Effectivement, $\mathbb{R}^2$ n'est pas **homéomorphe** à $\mathbb{R}$. (Pourquoi ?)
En fait, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ ne sont pas homéomorphes si $n \neq m$.

Pour les curieux, notons par contre que $\mathbb{Q}^2$ et $\mathbb{Q}$, de même que $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^2$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, sont homéomorphes (avec les topologies induites).

Un mot sur le développement binaire (ou dyadique)

Notons $\underline{2}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies de chiffres binaires $(0\backslash 1)$.

Notons $\underline{2}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies de chiffres binaires $(0\backslash 1)$.
Soient $a \in [0,1]$ et $(a_0a_1a_2a_3\ldots) \in \underline{2}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$a = 0, a_0a_1a_2a_3\ldots \text{ en base 2}$$

si et seulement si

$$a = \frac{a_0}{2^1} + \frac{a_1}{2^2} + \frac{a_2}{2^3} + \frac{a_3}{2^4} + \ldots (= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^{k+1}})$$

Un mot sur le développement binaire (ou dyadique)

Notons $\underline{2}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies de chiffres binaires $(0\backslash 1)$.
Soient $a \in [0,1]$ et $(a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots) \in \underline{2}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$a = 0, a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots \text{ en base 2}$$

si et seulement si

$$a = \frac{a_0}{2^1} + \frac{a_1}{2^2} + \frac{a_2}{2^3} + \frac{a_3}{2^4} + \ldots (= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^{k+1}})$$

Exemples :

Un mot sur le développement binaire (ou dyadique)

Notons $\underline{2}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies de chiffres binaires $(0\backslash 1)$.
Soient $a \in [0,1]$ et $(a_0a_1a_2a_3\ldots) \in \underline{2}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$a = 0, a_0a_1a_2a_3\ldots \text{ en base 2}$$

si et seulement si

$$a = \frac{a_0}{2^1} + \frac{a_1}{2^2} + \frac{a_2}{2^3} + \frac{a_3}{2^4} + \ldots (= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^{k+1}})$$

Exemples :

- $\frac{5}{2^4} = 0,010100000\ldots$

Un mot sur le développement binaire (ou dyadique)

Notons $\underline{2}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies de chiffres binaires $(0\backslash 1)$. Soient $a \in [0,1]$ et $(a_0a_1a_2a_3\ldots) \in \underline{2}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$a = 0, a_0a_1a_2a_3\ldots \text{ en base 2}$$

si et seulement si

$$a = \frac{a_0}{2^1} + \frac{a_1}{2^2} + \frac{a_2}{2^3} + \frac{a_3}{2^4} + \ldots (= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^{k+1}})$$

Exemples :

- $\frac{5}{2^4} = 0,010100000\ldots = 0,010011111\ldots$ (nombre dyadique)

Un mot sur le développement binaire (ou dyadique)

Notons $\underline{2}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies de chiffres binaires $(0\backslash 1)$.
Soient $a \in [0,1]$ et $(a_0 a_1 a_2 a_3 \dots) \in \underline{2}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$a = 0, a_0 a_1 a_2 a_3 \dots \text{ en base 2}$$

si et seulement si

$$a = \frac{a_0}{2^1} + \frac{a_1}{2^2} + \frac{a_2}{2^3} + \frac{a_3}{2^4} + \dots (= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^{k+1}})$$

Exemples :

- $\frac{5}{2^4} = 0,010100000\dots = 0,010011111\dots$ (nombre dyadique)
- $\frac{1}{3} = 0,0101010101\dots$ (nombre rationnel non dyadique)

Un mot sur le développement binaire (ou dyadique)

Notons $\underline{2}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies de chiffres binaires $(0\backslash 1)$.
Soient $a \in [0,1]$ et $(a_0a_1a_2a_3\ldots) \in \underline{2}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$a = 0, a_0a_1a_2a_3\ldots \text{ en base } 2$$

si et seulement si

$$a = \frac{a_0}{2^1} + \frac{a_1}{2^2} + \frac{a_2}{2^3} + \frac{a_3}{2^4} + \ldots (= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^{k+1}})$$

Exemples :

- $\frac{5}{2^4} = 0,010100000\ldots = 0,010011111\ldots$ (nombre dyadique)
- $\frac{1}{3} = 0,0101010101\ldots$ (nombre rationnel non dyadique)

On montre que $[0,1[$ (resp. $[0,1]$ ou $\mathbb{R}$) et $\underline{2}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents.

L'ensemble des parties d'un ensemble

Définition

Si A est un ensemble, on note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de A, aussi appelé **ensemble des parties** de A.

L'ensemble des parties d'un ensemble

Définition

Si A est un ensemble, on note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de A, aussi appelé **ensemble des parties** de A.

Exemple : Si $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, alors

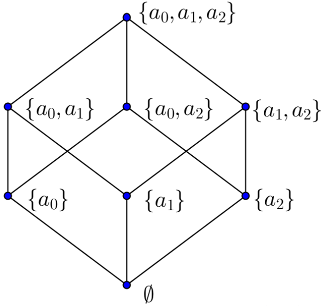
$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a_0\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_0, a_1\}, \{a_0, a_2\}, \{a_1, a_2\}, \{a_0, a_1, a_2\}\}$$

Définition

Si A est un ensemble, on note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de A, aussi appelé **ensemble des parties** de A.

Exemple : Si $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, alors

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a_0\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_0, a_1\}, \{a_0, a_2\}, \{a_1, a_2\}, \{a_0, a_1, a_2\}\}$$



Arbre binaire

Plus généralement, si A est fini avec $|A| = n$, alors $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Arbre binaire

Plus généralement, si A est fini avec $|A| = n$, alors $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Fait

Un sous-ensemble S *de* $= \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ *peut s'identifier à une suite finie* $(b_0 \ldots b_{n-1})$*, avec* $b_i := 1$ *si* $a_i \in S$*,* $b_i := 0$ *sinon.*

Arbre binaire

Plus généralement, si A est fini avec $|A| = n$, alors $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Fait

Un sous-ensemble S de $= \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ peut s'identifier à une suite finie $(b_0 \ldots b_{n-1})$, avec $b_i := 1$ si $a_i \in S$, $b_i := 0$ sinon.

Exemple :
Pour $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, $\{a_1\} \equiv (010)$, $\{a_0, a_2\} \equiv (101)$, etc.

Arbre binaire

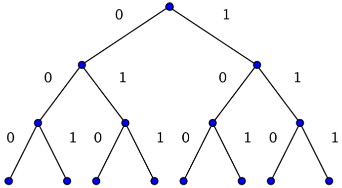
Plus généralement, si A est fini avec $|A| = n$, alors $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Fait

Un sous-ensemble S de $= \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ peut s'identifier à une suite finie $(b_0 \ldots b_{n-1})$, avec $b_i := 1$ si $a_i \in S$, $b_i := 0$ sinon.

Exemple :
Pour $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, $\{a_1\} \equiv (010)$, $\{a_0, a_2\} \equiv (101)$, etc.

Aussi, $\mathcal{P}(A)$ admet une représentation sous forme d'arbre binaire :



Plus généralement, si A est fini avec $|A| = n$, alors $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

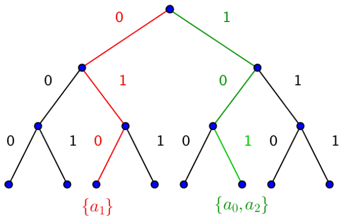
Fait

Un sous-ensemble S de $= \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ peut s'identifier à une suite finie $(b_0 \ldots b_{n-1})$, avec $b_k := 1$ si $a_k \in S$, $b_k := 0$ sinon.

Exemple :

Pour $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, $\{a_1\} \equiv (010)$, $\{a_0, a_2\} \equiv (101)$, etc.

Aussi, $\mathcal{P}(A)$ admet une représentation sous forme d'arbre binaire :



Un arbre infini

Et si $A = \mathbb{N}$ ou tout autre ensemble infini dénombrable ?

Un arbre infini

Et si $A = \mathbb{N}$ ou tout autre ensemble infini dénombrable ?

Par analogie, on peut identifier une partie S de $\mathbb{N}$ à une suite **infinie** $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$, avec $b_k := 1$ si $k \in S$, $b_k := 0$ sinon.

Un arbre infini

Et si $A = \mathbb{N}$ ou tout autre ensemble infini dénombrable ?

Par analogie, on peut identifier une partie S de $\mathbb{N}$ à une suite **infinie** $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$, avec $b_k := 1$ si $k \in S$, $b_k := 0$ sinon.

Par exemple, $\emptyset \equiv (000000\ldots)$, $2\mathbb{N} \equiv (1010101\ldots)$, etc.

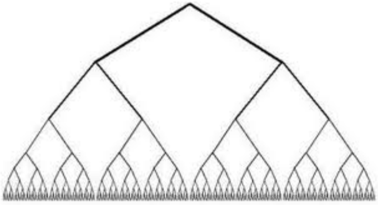
Un arbre infini

Et si $A = \mathbb{N}$ ou tout autre ensemble infini dénombrable ?

Par analogie, on peut identifier une partie S de $\mathbb{N}$ à une suite **infinie** $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$, avec $b_k := 1$ si $k \in S$, $b_k := 0$ sinon.

Par exemple, $\emptyset \equiv (000000\ldots)$, $2\mathbb{N} \equiv (1010101\ldots)$, etc.

Aussi, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ s'identifie à $\underline{2}^{\mathbb{N}}$, qui peut se représenter sous forme d'arbre binaire infini :



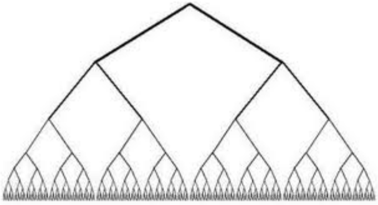
Un arbre infini

Et si $A = \mathbb{N}$ ou tout autre ensemble infini dénombrable ?

Par analogie, on peut identifier une partie S de $\mathbb{N}$ à une suite **infinie** $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$, avec $b_k := 1$ si $k \in S$, $b_k := 0$ sinon.

Par exemple, $\emptyset \equiv (000000\ldots)$, $2\mathbb{N} \equiv (1010101\ldots)$, etc.

Aussi, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ s'identifie à $\underline{2}^{\mathbb{N}}$, qui peut se représenter sous forme d'arbre binaire infini :



Les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ s'identifient aux branches de cet arbre.

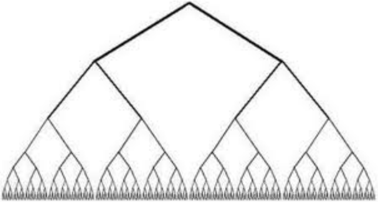
Un arbre infini

Et si $A = \mathbb{N}$ ou tout autre ensemble infini dénombrable ?

Par analogie, on peut identifier une partie S de $\mathbb{N}$ à une suite **infinie** $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$, avec $b_k := 1$ si $k \in S$, $b_k := 0$ sinon.

Par exemple, $\emptyset \equiv (000000\ldots)$, $2\mathbb{N} \equiv (1010101\ldots)$, etc.

Aussi, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ s'identifie à $\underline{2}^{\mathbb{N}}$, qui peut se représenter sous forme d'arbre binaire infini :



Les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ s'identifient aux branches de cet arbre.
Question : y a-t-il encore plus de noeuds que de branches ?

L'argument diagonal généralisé

On sait qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, alias $\underline{2}^{\mathbb{N}}$.

L'argument diagonal généralisé

On sait qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, alias $\underline{2}^{\mathbb{N}}$.
En voici une version bien plus générale :

Théorème (Cantor)

Soit A un ensemble quelconque.
Si $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$, alors il existe $R \subseteq A$ tel que $R \notin \mathrm{Im}(f)$.

L'argument diagonal généralisé

On sait qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, alias $\underline{2}^{\mathbb{N}}$.
En voici une version bien plus générale :

Théorème (Cantor)

Soit A un ensemble quelconque.
Si $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$, alors il existe $R \subseteq A$ tel que $R \notin \mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.

Soit $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$; aussi, pour tout $a \in A$, $f(a) \subseteq A$. Posons

$$R := \{x \in A \mid x \notin f(x)\}.$$

Alors $R \notin \mathrm{Im}(f)$. Sinon, $R = f(a)$ pour un certain $a \in A$, et on a :

$$a \in R \Longleftrightarrow a \in f(a) \Longleftrightarrow a \notin R \quad !?!$$

Corollaire

Il n'existe pas de surjection (a fortiori de bijection) de A sur $\mathcal{P}(A)$.

L'infini est... infini !

Corollaire

Il n'existe pas de surjection (a fortiori de bijection) de A sur $\mathcal{P}(A)$.

Notons que $a \longmapsto \{a\}$ définit une injection de A dans $\mathcal{P}(A)$.

Corollaire

Il n'existe pas de surjection (a fortiori de bijection) de A sur $\mathcal{P}(A)$.

Notons que $a \longmapsto \{a\}$ définit une injection de A dans $\mathcal{P}(A)$.

Il résulte de ce qui précède que

$$|\mathbb{N}|, |\mathcal{P}(\mathbb{N})|, |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|, |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))|, \ldots$$

constitue une suite strictement croissante de cardinaux infinis.

Corollaire

Il n'existe pas de surjection (a fortiori de bijection) de A sur $\mathcal{P}(A)$.

Notons que $a \longmapsto \{a\}$ définit une injection de A dans $\mathcal{P}(A)$.

Il résulte de ce qui précède que

$$|\mathbb{N}|, |\mathcal{P}(\mathbb{N})|, |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|, |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))|, \ldots$$

constitue une suite strictement croissante de cardinaux infinis.

Question : y a-t-il un infini entre $|\mathbb{N}|(= \aleph_0)$ et $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|(= \mathfrak{c})$?

Corollaire

Il n'existe pas de surjection (a fortiori de bijection) de A sur $\mathcal{P}(A)$.

Notons que $a \longmapsto \{a\}$ définit une injection de A dans $\mathcal{P}(A)$.

Il résulte de ce qui précède que

$$|\mathbb{N}|, |\mathcal{P}(\mathbb{N})|, |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|, |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))|, \ldots$$

constitue une suite strictement croissante de cardinaux infinis.

Question : y a-t-il un infini entre $|\mathbb{N}|(= \aleph_0)$ et $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|(= \mathfrak{c})$?

Cantor a conjecturé que non et a cherché en vain à le démontrer.
C'est la fameuse **Hypothèse du Continu** :

"Toute partie infinie de $\mathbb{R}$ est équipotente soit à $\mathbb{N}$, soit à $\mathbb{R}$."

- 1873 : Les réels ne sont pas dénombrables (donc l'ensemble des nombres transcendants ne l'est pas non plus).
- 1877 : Le nombre de points d'une "variété continue" de dimension n ne dépend pas de n.
- 1880-1884 : Preuve de l'hypothèse du continu pour les sous-ensembles fermés infinis.
- 1890 : Le nombre de parties d'un ensemble est strictement supérieur au nombre de ses éléments.

C'est FINI.