Décrire les apprentissages mathématiques des étudiants à partir des exercices résolus en classe: un point de vue méthodologique

Stéphanie BRIDOUX

Université de Mons, Faculté des Sciences

Séminaire du CREM
20 avril 2012

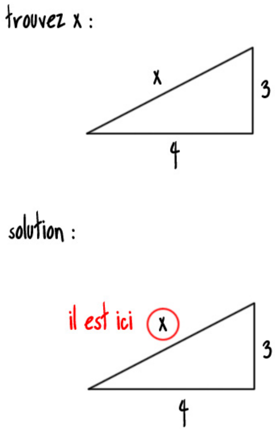
Des questions délicates pour un enseignant

Comprendre les liens entre l'enseignement et les apprentissages des élèves ?

Quand un enseignant peut-il se dire que ses élèves ont compris le cours ?

Des questions délicates pour un enseignant

Que signifie « comprendre » en mathématiques ?



Plan

Plan

Ce que l'enseignant se dit souvent...

Il comprend des choses... mais...

Quelques situations vécues par l'enseignant...

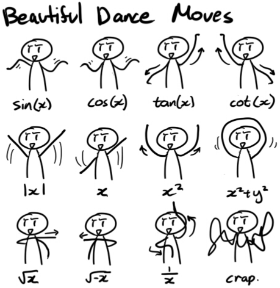
Les fonctions

Représenter les fonctions de référence

$f(x) = |x|, \ f(x) = \sqrt{x}, \ f(x) = 1/x, ...$

Définir la notion de fonction

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une relation qui à chaque réel x associe au plus un réel y noté $f(x)$.



Quelques situations vécues par l'enseignant...

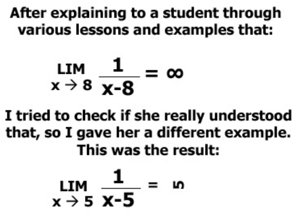
Les dérivées (1/2)

Calculer une dérivée

Calculer $\left(e^{\sqrt{x^2+x}} + \text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right)'$.

Définition

f est dérivable en a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.

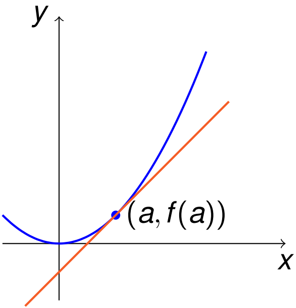


Quelques situations vécues par l'enseignant...

Les dérivées (2/2)

Interprétation géométrique

La dérivée de f en a est la pente de la tangente au graphe de f en $x = a$. Cette tangente a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

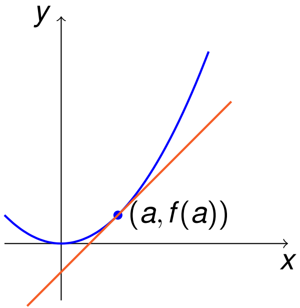


Quelques situations vécues par l'enseignant...

Les dérivées (2/2)

Interprétation géométrique

La dérivée de f en a est la pente de la tangente au graphe de f en $x = a$. Cette tangente a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.



Interprétation en physique

Dans l'étude des mouvements, la dérivée représente la vitesse instantanée à l'instant t.

Quelques situations vécues par l'enseignant...

À un niveau scolaire donné, pour une notion donnée

Les exemples montrent :

- l'importance des définitions ;
- l'existence de différentes interprétations de la notion ;
- le passage (obligé) par les gammes.

Quelques situations vécues par l'enseignant...

À un niveau scolaire donné, pour une notion donnée

Les exemples montrent :

- l'importance des définitions ;
- l'existence de différentes interprétations de la notion ;
- le passage (obligé) par les gammes.

CONSÉQUENCE : une tension entre le sens et la technique.

Mais aussi...

Le milieu d'un segment

Diverses caractérisations dans des domaines de travail variés

Le milieu d'un segment

- s'exprime à partir des coordonnées des deux extrémités du segment ;
- est caractérisé par une égalité vectorielle du type $AM = MB$ où $[AB]$ est le segment initial ;
- est un cas particulier du barycentre de deux points ;
- peut être considéré comme le centre d'une symétrie centrale qui échange A et B.

Mais aussi...

La valeur absolue

Différents types d'écritures pour caractériser la notion

La valeur absolue d'un nombre est

- dans la langue naturelle : le nombre sans son signe.
  ➙ danger de cette formulation : quid de $|2x - 1|$?
- géométriquement : distance entre x et 0.
- en analyse : $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Mais aussi...

Intégrer l'ancien dans le nouveau (1/2)

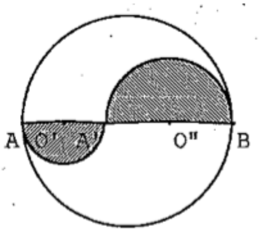
L'objet

Représenter la fonction $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$.

Concavité, axe de symétrie, sommet, racines,...

Mais aussi...

Intégrer l'ancien dans le nouveau (2/2)

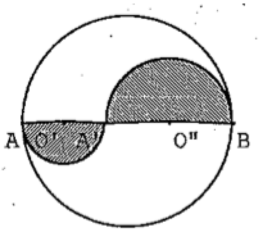


L'outil

Considérons la figure ci-contre : C est un cercle de rayon 1, $[AB]$ est un diamètre du cercle. On construit à l'intérieur de C deux demi-cercles de centres O' et O'' (voir figure). On cherche à déterminer le minimum de l'aire de la partie hachurée.

Mais aussi...

Intégrer l'ancien dans le nouveau (2/2)



L'outil

Considérons la figure ci-contre : C est un cercle de rayon 1, $[AB]$ est un diamètre du cercle. On construit à l'intérieur de C deux demi-cercles de centres O' et O'' (voir figure). On cherche à déterminer le minimum de l'aire de la partie hachurée.

En posant $AO' = x$, l'aire de la partie hachurée est égale à $\frac{\pi}{2}(2x^2 - 2x + 1)$.

Comment trouve-t-on le minimum ?

Mais aussi...

Au fil de l'enseignement, pour une notion donnée

Les exemples montrent :

- l'importance de prendre en compte les différents cadres (domaines de travail) dans lesquels apparaissent les notions ;
- l'importance de prendre en compte les différents registres d'écritures ;
- l'importance de continuer à solliciter des connaissances anciennes en les intégrant dans le nouveau.

LA TENSION ENTRE SENS ET TECHNIQUE EST OMNIPRÉSENTE.

La compréhension en mathématiques

Éléments participant à la compréhension en mathématiques

- donner du sens aux notions :

La compréhension en mathématiques

Éléments participant à la compréhension en mathématiques

- donner du sens aux notions :
  - en tant qu'outils et en tant qu'objets (Douady, 1981) ;

La compréhension en mathématiques

Éléments participant à la compréhension en mathématiques

- donner du sens aux notions :
  - en tant qu'outils et en tant qu'objets (Douady, 1981) ;
  - une certaine flexibilité entre les diverses représentations des notions en termes de cadres de travail et de registres d'écriture (Duval, 1995) ;

La compréhension en mathématiques

Éléments participant à la compréhension en mathématiques

- donner du sens aux notions :
  - en tant qu'outils et en tant qu'objets (Douady, 1981) ;
  - une certaine flexibilité entre les diverses représentations des notions en termes de cadres de travail et de registres d'écriture (Duval, 1995) ;
  - mises en fonctionnement correctes des notions dans des exercices variés et consistants.

La compréhension en mathématiques

Éléments participant à la compréhension en mathématiques

- donner du sens aux notions :
  - en tant qu'outils et en tant qu'objets (Douady, 1981) ;
  - une certaine flexibilité entre les diverses représentations des notions en termes de cadres de travail et de registres d'écriture (Duval, 1995) ;
  - mises en fonctionnement correctes des notions dans des exercices variés et consistants.
  - l'insertion des notions dans le bagage mathématique des étudiants.

La compréhension en mathématiques

Éléments participant à la compréhension en mathématiques

- donner du sens aux notions :
  - en tant qu'outils et en tant qu'objets (Douady, 1981) ;
  - une certaine flexibilité entre les diverses représentations des notions en termes de cadres de travail et de registres d'écriture (Duval, 1995) ;
  - mises en fonctionnement correctes des notions dans des exercices variés et consistants.
  - l'insertion des notions dans le bagage mathématique des étudiants.
- les entraînements techniques ;

La compréhension en mathématiques

Éléments participant à la compréhension en mathématiques

- donner du sens aux notions :
  - en tant qu'outils et en tant qu'objets (Douady, 1981) ;
  - une certaine flexibilité entre les diverses représentations des notions en termes de cadres de travail et de registres d'écriture (Duval, 1995) ;
  - mises en fonctionnement correctes des notions dans des exercices variés et consistants.
  - l'insertion des notions dans le bagage mathématique des étudiants.
- les entraînements techniques ;
- la manipulation de la langue naturelle.

La compréhension en mathématiques

Éléments participant à la compréhension en mathématiques

- donner du sens aux notions :
  - en tant qu'outils et en tant qu'objets (Douady, 1981) ;
  - une certaine flexibilité entre les diverses représentations des notions en termes de cadres de travail et de registres d'écriture (Duval, 1995) ;
  - mises en fonctionnement correctes des notions dans des exercices variés et consistants.
  - l'insertion des notions dans le bagage mathématique des étudiants.
- les entraînements techniques ;
- la manipulation de la langue naturelle.

La compréhension en mathématiques

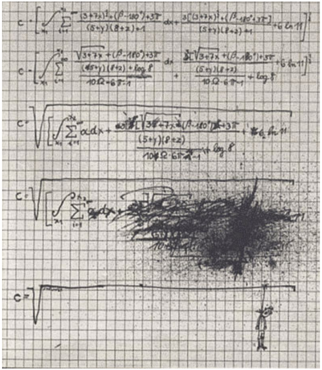
Éléments participant à la compréhension en mathématiques

- donner du sens aux notions :
  - en tant qu'outils et en tant qu'objets (Douady, 1981) ;
  - une certaine flexibilité entre les diverses représentations des notions en termes de cadres de travail et de registres d'écriture (Duval, 1995) ;
  - mises en fonctionnement correctes des notions dans des exercices variés et consistants.
  - l'insertion des notions dans le bagage mathématique des étudiants.
- les entraînements techniques ;
- la manipulation de la langue naturelle.

La conceptualisation est une notion relative et n'est jamais achevée. (Robert et Rogalski, 2004).

D'autres questions épineuses

N'aurait-on pas parfois tendance à être trop du côté de la technique, faute de temps ?



« Il faut d'abord maîtriser les bases ! Et après, avec la quantité de matière à voir dans les programmes, on voit s'il reste du temps... »

D'autres questions épineuses

Quels pourraient être les apports de séquences d'introduction des notions, de problèmes plus consistants à proposer aux élèves en les laissant travailler seuls ou en petits groupes ? Ce type d'activités ne permettrait-il pas de donner davantage de sens aux notions et de favoriser certains apprentissages ?

D'autres questions épineuses

Des objections immédiates à ce type d'activités en classe

- Des activités souvent jugées impossibles à mener en classe, faute de temps !

D'autres questions épineuses

Des objections immédiates à ce type d'activités en classe

- Des activités souvent jugées impossibles à mener en classe, faute de temps !
- Les élèves n'aiment pas.

D'autres questions épineuses

Des objections immédiates à ce type d'activités en classe

- Des activités souvent jugées impossibles à mener en classe, faute de temps !
- Les élèves n'aiment pas.
- Difficultés à gérer le bruit dans la classe lorsque les élèves travaillent en petits groupes.

D'autres questions épineuses

Un autre point de vue sur les apprentissages

- Ne pas se poser la question du temps à court terme... mais plutôt à moyen terme.

D'autres questions épineuses

Un autre point de vue sur les apprentissages

- Ne pas se poser la question du temps à court terme... mais plutôt à moyen terme.
- Il ne s'agit pas de révolutionner l'enseignement des mathématiques !

D'autres questions épineuses

Un autre point de vue sur les apprentissages

- Ne pas se poser la question du temps à court terme... mais plutôt à moyen terme.
- Il ne s'agit pas de révolutionner l'enseignement des mathématiques !
- Des petits changements, ponctuels.

Plan

Qu'est-ce-qui fait apprendre les élèves ?

Tout ce que l'enseignant organise en classe et qui engendre des activités mathématiques des élèves.

Qu'est-ce-qui fait apprendre les élèves ?

Tout ce que l'enseignant organise en classe et qui engendre des activités mathématiques des élèves.

PARTI PRIS DU DIDACTICIEN : « Ainsi nous admettons que l'enseignant a une certaine marge de manœuvre dans le choix des activités, dont dépend en partie l'apprentissage de ses élèves, même si beaucoup d'autres déterminants entrent en jeu (personnels, affectifs, sociaux). » (Robert et Rogalski, 2002)

Qu'est-ce-qui fait apprendre les élèves ?

Deux composantes de ce que l'enseignant propose en classe

- les contenus mathématiques (choix théoriques, choix d'exercices,...) ;
- les déroulements (formes de travail, les accompagnements pendant la résolution d'exercices,...).

Qu'est-ce-qui fait apprendre les élèves ?

Deux composantes de ce que l'enseignant propose en classe

- les contenus mathématiques (choix théoriques, choix d'exercices,...) ;
- les déroulements (formes de travail, les accompagnements pendant la résolution d'exercices,...).

→ les choix de l'enseignant engendrent de la variabilité dans les activités des élèves.
→ importance de prendre en compte ces deux composantes pour mieux comprendre les apprentissages des élèves à partir de leurs activités.

Un exemple du côté des déroulements en classe

Formules de trigonométrie (Robert, 2003)

Un triangle rectangle ABF est dessiné au tableau (rectangle en F).
Dans chacun des cas suivants, on connaît la mesure d'un angle aigu et la mesure d'un côté.

- Exprimer la longueur des deux autres côtés en fonction des deux données.
- Effectuer le calcul.

Suivent 4 cas numériques. Le premier est $\widehat{A} = 22^\circ,\ AB = 8\,\text{cm}$.

Un exemple du côté des déroulements en classe

TRAVAIL MATHÉMATIQUE ATTENDU :

- Appliquer correctement une formule trigonométrique adaptée à chaque cas pour exprimer un côté inconnu en fonction des données (angle et mesure d'un côté).
- Possibilité d'utiliser le théorème de Pythagore.
- Travailler sur des données formelles, puis passer au numérique : changement de cadre de travail.

Un exemple du côté des déroulements en classe

TRAVAIL MATHÉMATIQUE ATTENDU :

- Appliquer correctement une formule trigonométrique adaptée à chaque cas pour exprimer un côté inconnu en fonction des données (angle et mesure d'un côté).
- Possibilité d'utiliser le théorème de Pythagore.
- Travailler sur des données formelles, puis passer au numérique : changement de cadre de travail.

→ articulation de connaissances.

Un exemple du côté des déroulements en classe

Bilan

- Plusieurs modifications de la tâche initiale sont provoquées par l'enseignant, par des prises de parole ou par un jeu de questions-reponses dans les phases de recherche.
- La tâche initiale est séquentialisée en sous-questions intermédiaires isolées que l'enseignant présente dans le bon ordre.
- La tâche initiale est simplifiée.

Un exemple du côté des contenus

Identités remarquables

1. Montrer, en utilisant les identités remarquables, que le produit de deux nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers est encore la somme de deux carrés d'entiers.
2. Montrer que le produit de deux nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers est encore la somme de deux carrés d'entiers.
3. Est-ce-que le produit de deux nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers est encore la somme de deux carrés d'entiers ?
4. En utilisant les nombres complexes, montrer que le produit de deux nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers est encore la somme de deux carrés d'entiers.

Un exemple du côté des contenus

ÉNONCÉ 1

- Adapter les identités remarquables.
  Soient m^2+n^2 et p^2+q^2 les deux nombres (où $m,\ n,\ p,\ q$ sont des entiers).
  On a : $$\begin{aligned}(m^2+n^2)(p^2+q^2) &= m^2p^2+n^2p^2+m^2q^2+n^2q^2\\ &= (mp+nq)^2+(mq-np)^2\end{aligned}$$
- Reconnaître deux carrés à interpréter comme le « début » d'un nouveau carré. Reconnaître aussi qu'il faut utiliser une somme et une différence.

ÉNONCÉ 2

Trouver une méthode pour démontrer le résultat.

Un exemple du côté des contenus

Énoncé 3

- Expérimenter pour se faire une idée du résultat (vrai ou faux).
- Un travail sur les connaissances numériques, qui ne met d'ailleurs pas nécessairement sur la voie d'un outil pour démontrer.

Énoncé 4

Reconnaître que $m^2 + n^2 = |m + \boldsymbol{i}n|^2$ puis utiliser le résultat sur le produit des modules.

Un exemple du côté des contenus

Bilan

- Ce ne sont pas les mêmes connaissances qui sont sollicitées dans les énoncés, ou en tout cas pas de la même façon (calculs, conjectures, adaptations de résultats).

Un exemple du côté des contenus

Bilan

- Ce ne sont pas les mêmes connaissances qui sont sollicitées dans les énoncés, ou en tout cas pas de la même façon (calculs, conjectures, adaptations de résultats).
- Importance de prévoir les mises en fonctionnement des connaissances.

Un exemple du côté des contenus

Bilan

- Ce ne sont pas les mêmes connaissances qui sont sollicitées dans les énoncés, ou en tout cas pas de la même façon (calculs, conjectures, adaptations de résultats).
- Importance de prévoir les mises en fonctionnement des connaissances.
- Importance de mettre en relation l'utilisation demandée dans un exercice et le bagage des connaissances actuelles des élèves.

Quelques éléments sur les apprentissages mathématiques

Un point de vue méthodologique

- Les activités des élèves permettent d'inférer des éléments sur leurs apprentissages.
- Nous nous intéressons davantage à la phase d'élaboration de la résolution.
- Nous étudions les mises en fonctionnement des connaissances, en fonction de l'enseignement donné.
- « Une certaine variabilité des activités proposées aux élèves, obtenue grâce à des énoncés diversifiés, adaptés à la notion visée et à la classe considérée, accompagnés par une gestion adéquate, peut favoriser les apprentissages, en améliorer la qualité, notamment pour les élèves moyens. » (Robert et Rogalski, 2002)

Plan

Du côté du sens

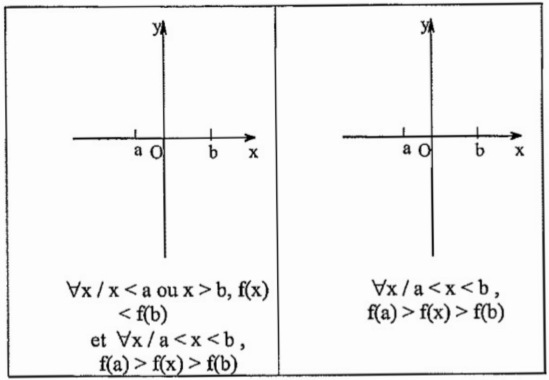
OBJECTIF : étudier quelques exemples de tâches (introduction des notions ou exercices) qui tendent à donner davantage de sens à certaines notions.

- Les fonctions (Bloch, 2002) ;
- Le théorème de Thalès (Robert, 2003) ;
- Les équations de plans dans l'espace (Schneider, 2009).

Les fonctions (1/5)

Énoncé

Représenter graphiquement une fonction *f* vérifiant les conditions données.



Les fonctions (2/5)

Des questions qui peuvent être traitées

- Une réponse fréquente pour l'exemple 2 : « f est décroissante entre a et b ».
- D'où la question : la condition $\forall x : a < x < b, f(a) > f(x) > f(b)$ est-elle équivalente à f décroissante sur $]a, b[$?
- Production de contre-exemples.
- Un travail sur les quantificateurs.
- Une amorce pour le théorème des valeurs intermédiaires.

Les fonctions (3/5)

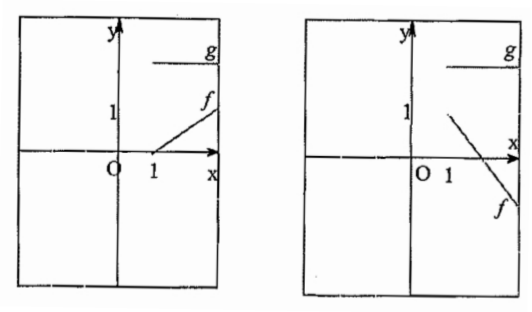
Quelques possibles conséquences sur les apprentissages

- Utiliser le registre graphique pour travailler sur les objets.
- Appui sur le registre graphique pour passer aux modes de validation formels de certaines propriétés des fonctions.
- Élargir le stock de référence des fonctions.
- Aborder de nouvelles questions.
- Des exemples qui peuvent servir de référence pour des nouvelles notions.

Les fonctions (4/5)

Énoncé

Dans chacun des cas ci-dessous, représentez graphiquement la fonction produit $f.g$.



Les fonctions(5/5)

Des questions qui peuvent être traitées

- Et si g est une fonction du premier degré ?
- Le dessin est alors un moyen de validation.

Les fonctions(5/5)

Des questions qui peuvent être traitées

- Et si g est une fonction du premier degré ?
- Le dessin est alors un moyen de validation.

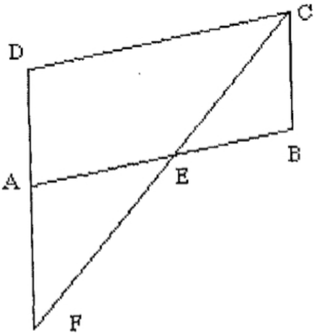
Quelques possibles conséquences sur les apprentissages des élèves

- Mobilisation de connaissances numériques dans le cadre géométrique : redécouvrir dans un environnement différent les rapports au zéro et à l'unité.
- Le registre numérique comme moyen de validation.

Le théorème de Thalès (1/4)

Énoncé

ABCD est un parallélogramme, une droite passant par *C* coupe *AB* en *E* et *AD* en *F* (voir figure). Montrer que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} - \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = 1$.



Le théorème de Thalès (2/4)

On écrit deux fois le théorème de Thalès et on soustrait :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{FE}}, \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EF}}$$

Donc $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} - \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{FE}} - \frac{\overline{EC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{FE}} = 1$

Le théorème de Thalès (2/4)

On écrit deux fois le théorème de Thalès et on soustrait :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{FE}}, \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EF}}$$

Donc $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} - \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{FE}} - \frac{\overline{EC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{FE}} = 1$

✧ ADAPTATION DES CONNAISSANCES : appliquer le théorème plusieurs fois, et de manière non indépendante, pour résoudre une même question.

Le théorème de Thalès (3/4)

Énoncé

On donne trois longueurs a, b et c. Construire un segment de longueur d tel que $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Le théorème de Thalès (3/4)

Énoncé

On donne trois longueurs a, b et c. Construire un segment de longueur d tel que $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$.

Tracer deux demi-droites sécantes en O, placer un segment de longueur a sur la première, noté $[OA]$, puis un point C sur cette demi-droite tel que $\overline{AC} = c$ puis tracer B sur l'autre demi-droite tel que $\overline{OB} = b$. On mène alors par C la parallèle à AB qui coupe la demi-droite $[OC$ en D.

Le théorème de Thalès (4/4)

Quelques possibles conséquences sur les apprentissages des élèves

- Traduction de données.
- Introduction d'intermédiaires pour reconstituer une configuration de Thalès.

MAIS... une gestion spécifique de la part de l'enseignant : aides apportées, recours aux commentaires méta-mathématiques,...

Plans dans l'espace (1/4)

DIFFICULTÉ RÉCURRENTE : interpréter une équation de la forme $ax+by+cz=d$ comme une équation cartésienne d'un plan dans l'espace(Maurel (2001), Schneider (2010)).

Plans dans l'espace (1/4)

DIFFICULTÉ RÉCURRENTE : interpréter une équation de la forme $ax + by + cz = d$ comme une équation cartésienne d'un plan dans l'espace(Maurel (2001), Schneider (2010)).

➞ Interprétation géométrique d'équations connues

Plans dans l'espace (1/4)

DIFFICULTÉ RÉCURRENTE : interpréter une équation de la forme $ax + by + cz = d$ comme une équation cartésienne d'un plan dans l'espace(Maurel (2001), Schneider (2010)).
➙ Interprétation géométrique d'équations connues

Contenus

Dans $\mathbb{R}^2$, considérons l'ensemble E des points (x, y) qui vérifient l'équation $2x + 3y = 6$.

- Donnez quelques points qui vérifient cette équation.
- Représentez graphiquement l'ensemble E.

✧ réactivation de connaissances sur les droites du plan.

Plans dans l'espace (1/4)

DIFFICULTÉ RÉCURRENTE : interpréter une équation de la forme $ax + by + cz = d$ comme une équation cartésienne d'un plan dans l'espace(Maurel (2001), Schneider (2010)).
→ Interprétation géométrique d'équations connues

Contenus

Dans $\mathbb{R}^2$, considérons l'ensemble E des points (x, y) qui vérifient l'équation $2x + 3y = 6$.

- Donnez quelques points qui vérifient cette équation.
- Représentez graphiquement l'ensemble E.

✧ réactivation de connaissances sur les droites du plan.

Déroulement

Discussion collective avec les élèves.

Plans dans l'espace (2/4)

Contenus

- Dans $\mathbb{R}^3$, considérons l'ensemble E des points (x, y, z) qui vérifient l'équation $2x + 3y = 6$. Mêmes questions.
- Idem avec l'équation $x = 2$.

✧ émergence des équations de plans parallèles à un axe de coordonnées, puis parallèles à un plan de coordonnées.

Plans dans l'espace (2/4)

Contenus

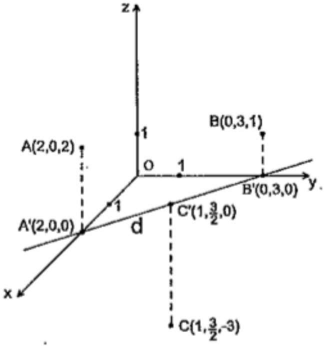
- Dans $\mathbb{R}^3$, considérons l'ensemble E des points (x, y, z) qui vérifient l'équation $2x + 3y = 6$. Mêmes questions.
- Idem avec l'équation $x = 2$.

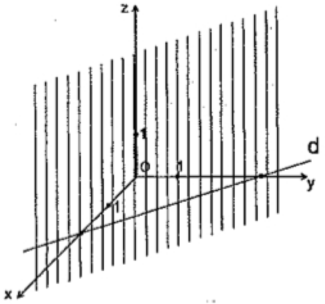
✧ émergence des équations de plans parallèles à un axe de coordonnées, puis parallèles à un plan de coordonnées.

Déroulement

- Les étudiants travaillent seuls.
- Correction mettant en évidence l'importance du dessin pour comprendre les objets qu'on manipule.

Plans dans l'espace (3/4)





Plans dans l'espace (4/4)

Quelques possibles conséquences sur les apprentissages des élèves

- Réactivation de connaissances anciennes.
- Une généralisation qui amène une rupture dans les conceptions des élèves.
- Une petite séquence qui sert de référence dans le chapitre.

Plan

Contexte du travail

Un enseignement de topologie

- Première année d'université.
- Une introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$: intérieur et adhérence d'un ensemble, ensemble ouvert, ensemble fermé.
- Constat d'échec aux évaluations :
  - des erreurs fréquentes dans la restitution des définitions,
  - des difficultés repérées dans la manipulation du formalisme.

Contexte du travail

Un enseignement de topologie

- Première année d'université.
- Une introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$: intérieur et adhérence d'un ensemble, ensemble ouvert, ensemble fermé.
- Constat d'échec aux évaluations :
  - des erreurs fréquentes dans la restitution des définitions,
  - des difficultés repérées dans la manipulation du formalisme.

→ mieux comprendre ce constat d'échec (Bridoux,2005)

Contexte du travail

Un enseignement de topologie

- Première année d'université.
- Une introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$: intérieur et adhérence d'un ensemble, ensemble ouvert, ensemble fermé.
- Constat d'échec aux évaluations :
  - des erreurs fréquentes dans la restitution des définitions,
  - des difficultés repérées dans la manipulation du formalisme.

→ mieux comprendre ce constat d'échec (Bridoux,2005)
→ réfléchir à des pistes de remédiation

Contexte du travail

Un enseignement de topologie

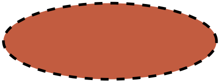
- Première année d'université.
- Une introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$: intérieur et adhérence d'un ensemble, ensemble ouvert, ensemble fermé.
- Constat d'échec aux évaluations :
  - des erreurs fréquentes dans la restitution des définitions,
  - des difficultés repérées dans la manipulation du formalisme.

➞ mieux comprendre ce constat d'échec (Bridoux,2005)
➞ réfléchir à des pistes de remédiation
➞ élaboration d'un dispositif didactique (Bridoux, 2011)

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (1/2)

Le mot « topologie » :
logos : étude, discours ; *topos* : lieu
➙ étude du lieu



ensemble ouvert

ensemble fermé

- A est ouvert ssi $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$;
- A est fermé ssi $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$.

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$

A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

- sont caractérisées avec un formalisme en partie nouveau pour les étudiants ;

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

- sont caractérisées avec un formalisme en partie nouveau pour les étudiants ;
- sont caractérisées avec un formalisme qui mélange différents symbolismes :
  - Logique : quantificateurs, implication
  - Théorie des ensembles : inclusion, appartenance, intersection, ensemble vide.

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

- sont caractérisées avec un formalisme en partie nouveau pour les étudiants ;
- sont caractérisées avec un formalisme qui mélange différents symbolismes :
  - Logique : quantificateurs, implication
  - Théorie des ensembles : inclusion, appartenance, intersection, ensemble vide.

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

- sont caractérisées avec un formalisme en partie nouveau pour les étudiants ;
- sont caractérisées avec un formalisme qui mélange différents symbolismes :
  - Logique : quantificateurs, implication
  - Théorie des ensembles : inclusion, appartenance, intersection, ensemble vide.

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

- sont caractérisées avec un formalisme en partie nouveau pour les étudiants ;
- sont caractérisées avec un formalisme qui mélange différents symbolismes :
  - Logique : quantificateurs, implication
  - Théorie des ensembles : inclusion, appartenance, intersection, ensemble vide.

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

- sont caractérisées avec un formalisme en partie nouveau pour les étudiants ;
- sont caractérisées avec un formalisme qui mélange différents symbolismes :
  - Logique : quantificateurs, implication
  - Théorie des ensembles : inclusion, appartenance, intersection, ensemble vide.

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

- sont caractérisées avec un formalisme en partie nouveau pour les étudiants ;
- sont caractérisées avec un formalisme qui mélange différents symbolismes :
  - Logique : quantificateurs, implication
  - Théorie des ensembles : inclusion, appartenance, intersection, ensemble vide.

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

- sont caractérisées avec un formalisme en partie nouveau pour les étudiants ;
- sont caractérisées avec un formalisme qui mélange différents symbolismes :
  - Logique : quantificateurs, implication
  - Théorie des ensembles : inclusion, appartenance, intersection, ensemble vide.
- mobilisent des connaissances en cours d'acquisition : boule de centre x et de rayon r.

L'enseignement de la topologie

Caractérisations des notions (2/2)

A est ouvert si $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \implies (x \in A)$

Les notions de topologie

- sont caractérisées avec un formalisme en partie nouveau pour les étudiants ;
- sont caractérisées avec un formalisme qui mélange différents symbolismes :
  - Logique : quantificateurs, implication
  - Théorie des ensembles : inclusion, appartenance, intersection, ensemble vide.
- mobilisent des connaissances en cours d'acquisition : boule de centre x et de rayon r.

L’enseignement de la topologie

Les exercices (1/3)

NATURE DES EXERCICES À RÉSOUDRE : manipuler les définitions sur des ensembles simples dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^2$.

- $[-1,3]$ est-il ouvert ? Fermé ?
- $\{1/n : \ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ est-il ouvert ? Fermé ?
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < y\}$ est-il ouvert ? Fermé ?

OBJECTIF : donner du sens aux notions.

L'enseignement de la topologie

Les exercices (2/3)

Énoncé

Montrez que $]-1,2[$ est un ensemble ouvert.

À prouver : $\forall x \in\,]-1,2[,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq\,]-1,2[$.
Soit $x \in\,]-1,2[$.
Prenons $r = \min\{x+1, 2-x\}$. On a bien $r > 0$ car $x \in\,]-1,2[$.
On a $B(x,r) \subseteq\,]-1,2[$.
En effet, soit $y \in B(x,r)$, c'est-à-dire $x - r < y < x + r$.
Si $r = x+1$, alors on a, en remplaçant, $x-(x+1) < y < x+(x+1)$.
La première inégalité dit $-1 < y$. Comme $x+1 \leqslant 2-x$ par définition du minimum, la deuxième inégalité implique $y < x+(2-x)$, c'est-à-dire $y < 2$.
Donc $y \in\,]-1,2[$.
Si $r = 2-x$, on démontre de manière analogue que $y \in\,]-1,2[$.

L'enseignement de la topologie

Les exercices (3/3)

ANALYSES A PRIORI (ROBERT, 1998) : des analyses qui renseignent sur les connaissances mises en jeu et sur les adaptations à réaliser sur ces connaissances.

L'enseignement de la topologie

Les exercices (3/3)

ANALYSES A PRIORI (ROBERT, 1998) : des analyses qui renseignent sur les connaissances mises en jeu et sur les adaptations à réaliser sur ces connaissances.

L'ensemble des exercices proposés

- met en jeu des connaissances souvent peu disponibles chez les étudiants (inégalités sur $\mathbb{R}$, convergence des suites...) ;
- nécessitent des adaptations complexes et variées : organisation du raisonnement, traductions, mises en relation...
- mobilisent les cadres de la logique, de la théorie des ensembles, de l'analyse sur $\mathbb{R}$;
- ne met pas en jeu de réelles connaissances en topologie.

L'enseignement de la topologie

Les évaluations (1/3)

Restitution des définitions

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
Définissez « A est fermé ».

80% des étudiants répondent :

$$\forall x \in A,\ \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing$$

L'enseignement de la topologie

Les évaluations (2/3)

Manipulation des définitions

L'ensemble $\{1/n : n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$ est-il fermé ?

$\{1/n, n \in \mathbb{N}_0\}$ est fermé ?

càd $\forall x_0 \in \{1/n, n \in \mathbb{N}_0\}$ $\forall r > 0$ $B[x_0, r] \cap \{1/n, n \in \mathbb{N}_0\} \neq \phi$?

Soit $x_0 \in \{ — \}$

càd $x_0 = \frac{1}{n_1}, n_1 \in \mathbb{N}_0$

Soit $r > 0$

A-t-on $B[x_0, r] \cap \{1/n, n \in \mathbb{N}_0\} \neq \phi$?

càd $[x_0 - r, x_0 + r] \cap \{1/n, n \in \mathbb{N}_0\} \neq \phi$?

càd $[\frac{1}{n_1} - r, \frac{1}{n_1} + r] \cap \{1/n, n \in \mathbb{N}_0\} \neq \phi$?

oui car $\frac{1}{n_1} \in [\frac{1}{n_1} - r, \frac{1}{n_1} + r]$ et $\frac{1}{n_1} \in \{ — \}$

$\Rightarrow \{1/n, n \in \mathbb{N}_0\}$ est fermé $\Rightarrow$ VRAI

Diagnostic de l’enseignement de topologie

Caractéristiques de l’enseignement

- Un travail sur les définitions qui ne permet pas de revenir au sens des notions.
- Les étudiants manipulent des symboles qui ne représentent rien pour eux.
- Pas de dynamique productive entre le sens et la technique.

Objectifs visés

Comment élaborer un enseignement

- susceptible de favoriser les apprentissages des étudiants ?
- qui tient compte des contraintes institutionnelles ?

Quelques caractéristiques du dispositif

Élargissement des notions à enseigner

- intérieur et adhérence d'un ensemble,
- ensemble ouvert, ensemble fermé.

Quelques caractéristiques du dispositif

Élargissement des notions à enseigner

- **point intérieur, point adhérent à un ensemble**,
- intérieur et adhérence d'un ensemble,
- ensemble ouvert, ensemble fermé.

Quelques caractéristiques du dispositif

Formalisations des notions

Point intérieur

- p est un point intérieur à A si p a un peu de place autour de lui dans A.
- p est un point intérieur à A si A contient une boule ouverte de centre p.
- p est un point intérieur à A si $\exists r > 0,\ B(p, r) \subseteq A$.

Quelques caractéristiques du dispositif

Formalisations des notions

Point intérieur

- p est un point intérieur à A si p a un peu de place autour de lui dans A.
- p est un point intérieur à A si A contient une boule ouverte de centre p.
- p est un point intérieur à A si $\exists r > 0,\ B(p,r) \subseteq A$.

Intérieur d'un ensemble

- Idée de considérer, pour un ensemble A, l'ensemble des points intérieurs à A.
- $\operatorname{int} A = \{x \in A : \ \exists r > 0, B(x,r) \subseteq A\}$

Quelques caractéristiques du dispositif

Formalisations des notions

Point intérieur

- p est un point intérieur à A si p a un peu de place autour de lui dans A.
- p est un point intérieur à A si A contient une boule ouverte de centre p.
- p est un point intérieur à A si $\exists r > 0,\ B(p,r) \subseteq A$.

Intérieur d'un ensemble

- Idée de considérer, pour un ensemble A, l'ensemble des points intérieurs à A.
- $\operatorname{int} A = \{x \in A :\ \exists r > 0, B(x,r) \subseteq A\}$

Ensemble ouvert

- Idée de considérer des ensembles qui coïncident avec leur intérieur.
- A est ouvert si $A = \operatorname{int} A$.

Quelques caractéristiques du dispositif

L'exemplification

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, on donne un point p et un ensemble A. Dites si le point p est intérieur à A ou non, est adhérent à A ou non. Justifiez votre réponse.

1. $p = 1/3,\ A = [0,1]$
2. $p = -\sqrt{2},\ A = [-2,1]$
3. $p = 1,\ A = [0,1[$
4. $p = 1/2,\ A = \{1/n : n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$
5. $p = 0,\ A = \{1/n : n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$
6. $p = (2,4),\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$
7. pour $x, y \in \mathbb{R}$, $p = (x, y - r/3),\ A = B_{|.|_\infty}((x,y),r)$

Exercice 2

Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? Fermés ? Justifiez votre réponse.

1. $[\pi, +\infty[$
2. $]-\infty, -2[$
3. $\{3\}$
4. $\{1/n : n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$
5. $\{(x,y) \in \mathbb{R},\ 3x + 2y = 6\}$

Tâches de manipulation des définitions

Analyses a priori (1/2)

$1/2$ est-il intérieur à $A = \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

- Organisation du raisonnement : prouver la négation de l'écriture quantifiée caractérisant un point intérieur : $\forall r > 0,\ B(1/2, r) \not\subseteq A$.
- Existence d'un choix : chercher un réel $y \in B(1/2, r)$ et $y \notin A$.
- Connaissances anciennes à articuler : manipulation d'inégalités, ordre sur $\mathbb{R}$.

$A = \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ est-il ouvert ?

- Organisation du raisonnement : prouver que $A \not\subseteq \operatorname{int} A$.
- Existence d'un choix : trouver un réel $y \in A$ et $y \notin \operatorname{int} A$.
- On est ramené à l'exercice 1.

Tâches de manipulation des définitions

Analyses a priori (2/2)

Des analyses semblables en termes d'adaptations :

- Les mises en fonctionnement des connaissances nécessitent des adaptations complexes et variées de ces connaissances.
- Des connaissances en logique et en théorie des ensembles sont largement sollicitées.

Tâches de manipulation des définitions

Gestion de l'enseignant

DES GESTIONS DIFFÉRENTES EN CLASSE :

Exercice 1

- une courte recherche individuelle pour lire l'énoncé ;
- une correction prise en charge par l'enseignant :
  - réalisation de dessins au démarrage,
  - insistance sur la langue naturelle,
  - recours au méta pour montrer le travail mathématique attendu,
  - langage symbolique dans sa fonction d'économie d'écriture.

Tâches de manipulation des définitions

Gestion de l'enseignant

DES GESTIONS DIFFÉRENTES EN CLASSE :

Exercice 1

- une courte recherche individuelle pour lire l'énoncé ;
- une correction prise en charge par l'enseignant :
  - réalisation de dessins au démarrage,
  - insistance sur la langue naturelle,
  - recours au méta pour montrer le travail mathématique attendu,
  - langage symbolique dans sa fonction d'économie d'écriture.

Exercice 2

Une longue recherche individuelle suivie d'une correction collective.

Apprentissages des étudiants

Deux évaluations

- Deux évaluations : juin et août.
- Des questions semblables pour la topologie : une tâche de manipulation et une tâche complexe.
- 23 étudiants.
- Résultats globaux : 80% de réussite sur les tâches de manipulation, 20% de réussite sur les tâches complexes.

Bilan de la recherche

Bilan de la recherche

- Un enseignement qui tient ses promesses sur les tâches de manipulation.
- Limite : un enseignement qui ne prend pas en compte la dimension outil des notions.
  ➙ la question du sens des notions est encore ouverte !
- Une recherche qui montre l'importance de l'inscription des contraintes institutionnelles dans un travail en didactique des mathématiques.

Plan

Conclusion

À méditer...

- Accepter, au fil du temps, de bouleverser certaines habitudes (dans la préparation du cours, dans la classe, dans l'évaluation,...).

Conclusion

À méditer...

- Accepter, au fil du temps, de bouleverser certaines habitudes (dans la préparation du cours, dans la classe, dans l'évaluation,...).
- Varier, à certains moments, choisis par l'enseignant les formes de travail : un bénéfice pour les apprentissages et le développement de compétences.

Conclusion

À méditer...

- Accepter, au fil du temps, de bouleverser certaines habitudes (dans la préparation du cours, dans la classe, dans l'évaluation,...).
- Varier, à certains moments, choisis par l'enseignant les formes de travail : un bénéfice pour les apprentissages et le développement de compétences.
- Les manuels scolaires ne sont pas la seule source pour concevoir des exercices et des séquences d'introduction.