Comment exploiter le pliage à la fin du primaire et au début du secondaire ?

Patricia Wantiez
Institut Pédagogique Defré
Haute-Ecole de Bruxelles

wantiez.patricia@gmail.com

Mathématiques et origami

- Proposer des expériences mathématiques actives et ludiques
- Travailler un grand nombre de notions de géométrie : droites parallèles ou perpendiculaires, médiatrice, bissectrice, symétries, propriétés des figures planes, triangles isométriques ou semblables, théorème de Pythagore ou de Thalès, trigonométrie, etc
- Confronter les démarches avec d'autres méthodes de construction.
- Communiquer avec un langage géométrique adéquat, argumenter, justifier.
- Découvrir des relations entre des côtés et des angles de figures lors d'une approche expérimentale, conjecturer puis démontrer.
- Adaptable selon le niveau des élèves.

Des compétences variées

- *Compétences transversales* :
  Ecouter, travailler en équipe, s’exprimer, poser des hypothèses.
  Agir sur des matériels divers.
  Exposer et comparer ses arguments, ses méthodes, confronter ses résultats avec ceux des autres.
  Distinguer ce dont on est sûr de ce qu’il faut justifier.
  Utiliser un vocabulaire correct.
- *Compétences disciplinaires* :
  Construire des figures simples avec du matériel varié.
  Dans un contexte de pliages, de découpages, relever la présence de régularités.
  Décrire les différentes étapes d’une construction en s’appuyant sur les propriétés des figures.
  Comprendre et utiliser dans leur contexte les termes usuels propres à la géométrie.

Les premiers pliages

- *Découvrir la symétrie* :

  - Plier une figure en deux parties qui se superposent
    Chercher les figures qui permettent cette manipulation
    → axe de symétrie
  - Découper dans une feuille pliée, puis ouvrir et observer
  - Chercher plusieurs façons de plier en deux parties égales une figure
    (ou en 4 parties égales…)
  - Etc.

Dès le début du primaire…

Les premiers pliages

- Pliages libres pour réaliser une figure (animal, fleur, objet, …)
→ sur base de modèles trouvés auprès des élèves, dans les livres, sur internet, …

  Observations :

  - Le pliage part souvent d'un carré
  - Les premiers plis sont très souvent les diagonales ou les médianes de ce carré
  - Ils permettent de partager le carré en figures identiques connues

  Prolongements :

  - Plier de façon semblable d'autres figures géométriques, étendre le problème à des découpages en parties égales (ou de la même famille) → étude des médianes ou diagonales d'un polygone, et de leurs propriétés.

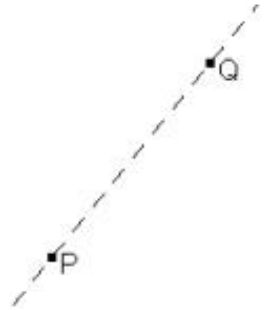
Les premiers pliages

- Des pliages plus mathématiques

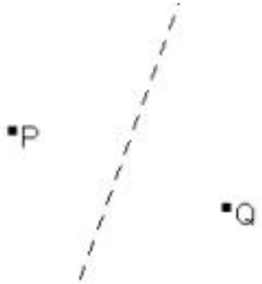
  - Plier une feuille de papier de forme quelconque pour obtenir un angle droit.
  - Plier un rectangle pour obtenir un carré.
  - Croiser puis plier des bandes et des angles pour obtenir les différents quadrilatères.
    → justifier, argumenter, chercher des façons d’obtenir la position précise des deux morceaux de papier
  - Plier un disque de papier pour obtenir un carré, un rectangle ou d’autres polygones.

Différents types de plis (« axiomes de Huzita »)

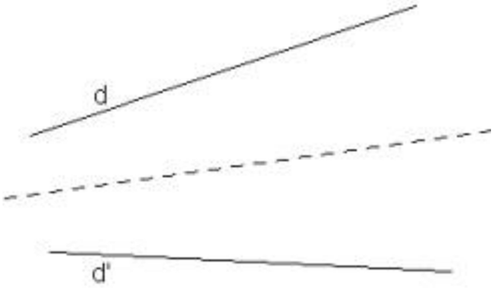
- Un pli passant par deux points fixes P et Q
  → la droite PQ



- Un pli qui amène un point P sur un point Q
  → la médiatrice de [PQ]

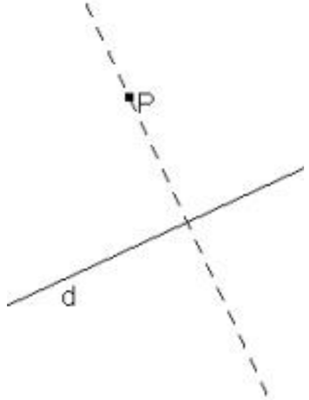


- Un pli qui superpose deux droites d et d’
  → une bissectrice de l’angle formé par les deux droites
  (si d // d’, le pli est la parallèle aux deux droites, et située à égale distance des deux droites)

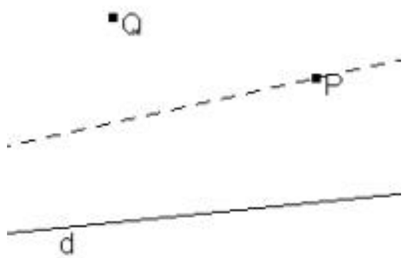


Différents types de plis (« axiomes de Huzita »)

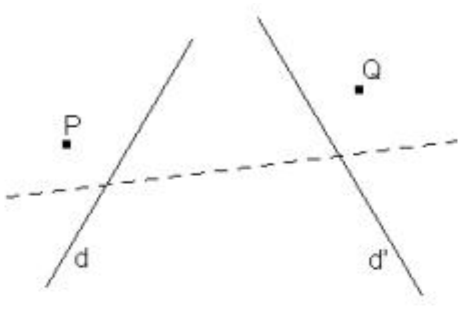
- Un pli qui passe par un point P et est orthogonal à une droite d
→ superposer la droite sur elle-même en faisant passer le pli par P



- Un pli qui passe par un point donné P et amène un point Q sur une droite d
(s'il existe)



- Un pli qui amène en même temps un point P sur une droite d et un point Q sur une droite d'
(s'il existe)



Notions de géométrie obtenues à partir de plis

- Une ligne droite = un pli
  (passant éventuellement par un ou deux points fixés)
- Une droite perpendiculaire à une droite donnée, et donc un angle droit
  (passant éventuellement par un point donné)
- La médiatrice d'un segment (axe de symétrie du segment)
- Une droite parallèle à une autre, éventuellement passant par un point donné → plier successivement 2 angles droits
- La bissectrice d'un angle (axe de symétrie de l'angle)
- Placer plusieurs points régulièrement espacés sur un segment donné → replier le segment sur lui-même à partir d'une extrémité, puis continuer en « accordéon »)

Plier des feuilles de forme quelconque pour obtenir des polygones

Matériel :

Des feuilles de formes variées : rectangle, carré, triangle isocèle ou équilatéral, disque, forme quelconque aux bords arrondis

(ni latte, ni compas, ni équerre)

Défi :

Obtenir un maximum de formes géométriques parmi les suivantes :

un carré, un rectangle, un losange, un parallélogramme, un trapèze de chacun des 3 types, un rhombe, un triangle isocèle, un triangle équilatéral, des polygones réguliers dont au moins le pentagone, l'hexagone et l'octogone.

Analyse de l'activité

- Choisir une forme de papier qui mènera à un réel défi
  On peut aussi proposer l'activité en n'utilisant que des feuilles de forme quelconque à bords arrondis
- Justifier, argumenter :
  Pourquoi es-tu sûr que c'est un angle droit?
  Pourquoi peux-tu dire que ces droites sont bien parallèles?
  Quelle(s) propriété(s) de la figure as-tu utilisée(s) pour y arriver?
  → distinguer ce dont on est sûr, ne pas se fier à l'œil, utiliser des propriétés géométriques pour y arriver de manière précise et pour justifier
- Confronter les trouvailles
- Mettre en évidence les figures obtenues par pliage qui présentent une propriété particulière, et donc chercher un pliage plus général
- Adapter les exigences au niveau des élèves

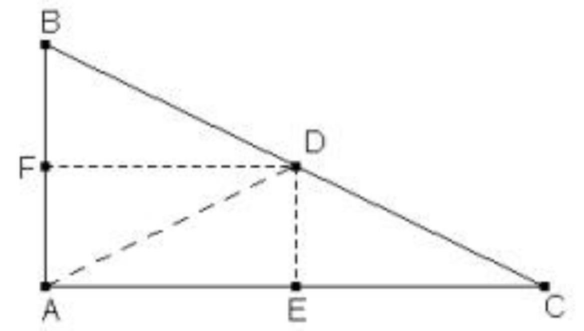
Comparaison avec d'autres méthodes de construction

- *<u>Par rapport aux constructions aux instruments</u>* :
  Pas de mesure, on s'appuie entièrement sur des propriétés géométriques.
  Approche intuitive et visuelle, permettant de nombreuses expériences.

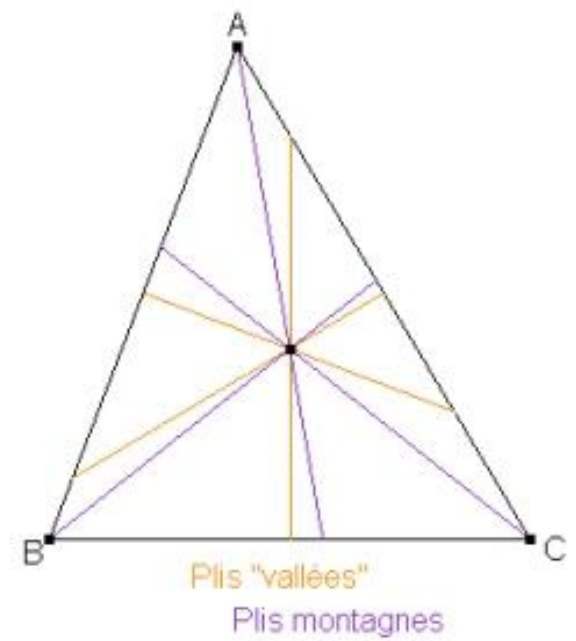
- *<u>Par rapport aux constructions à la règle et au compas</u>* :
  Approche similaire, les 5 premiers plis de base sont en fait des construction réalisables à la règle et au compas.
  Le 6^{e} pli de base, par contre, n'est pas constructible à la règle et au compas (il est basé sur la recherche de la tangente commune à deux paraboles)

Des pliages pour constater des propriétés

- Etant donné un triangle rectangle ABC, plier pour trouver le milieu D de l'hypoténuse, marquer ensuite le pli [AD].
  Plier et constater les égalités de longueurs
  |AD| = |BD| = |CD|
  Qu'en déduire ?
  Démontrer…

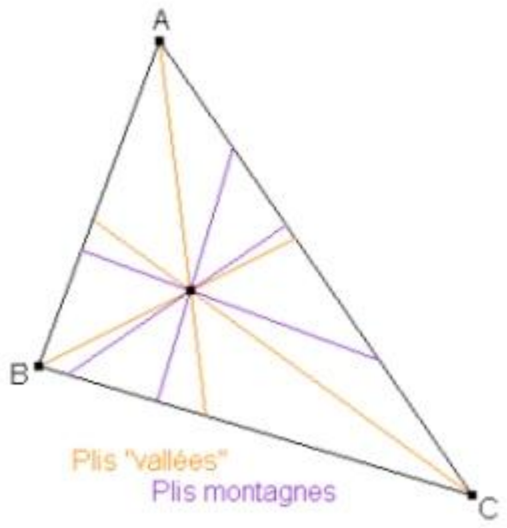


- Dans un triangle quelconque, marquer les plis correspondant aux médiatrices des côtés : qu'observe-t-on ?
  En retournant le triangle, marquer des plis du point trouvé à chacun des sommets.
  Le pliage permet alors d'observer des égalités de longueurs.
  Démontrer…



Des pliages pour constater des propriétés

- Dans un triangle quelconque, marquer les plis correspondant aux bissectrices des angles : qu'observe-t-on ?
  En retournant le triangle, marquer des plis passant par le point trouvé et perpendiculairement à chacun des côtés.
  Le pliage permet alors d'observer des égalités de longueurs.
  Démontrer…



- Quels plis réaliser pour observer les propriétés des médianes d'un triangle ?

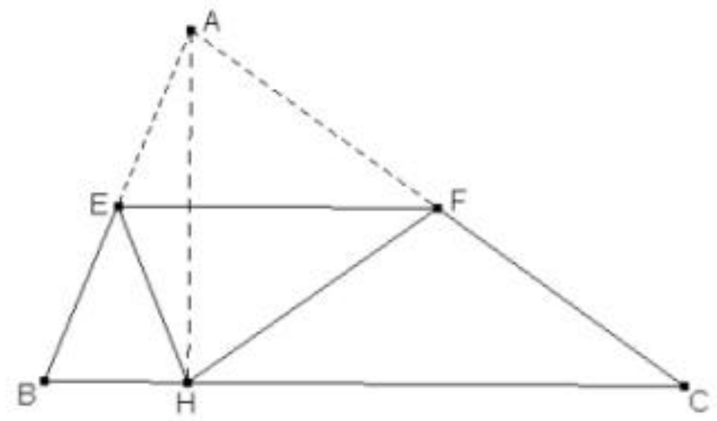
Des pliages pour constater des propriétés

- Etant donné un triangle quelconque ABC, plier pour obtenir la hauteur [AH] issue de A
  Plier pour amener A en H. Le pli est le segment [EF].

  Par pliage, comparer alors les longueurs |EB| et |EH|, puis les longueurs |FC| et |FH|. Que peut-on dire des triangles EBH et FCH ?

  Plier pour ramener B sur H, puis C sur H.
  Que peut-on observer ?

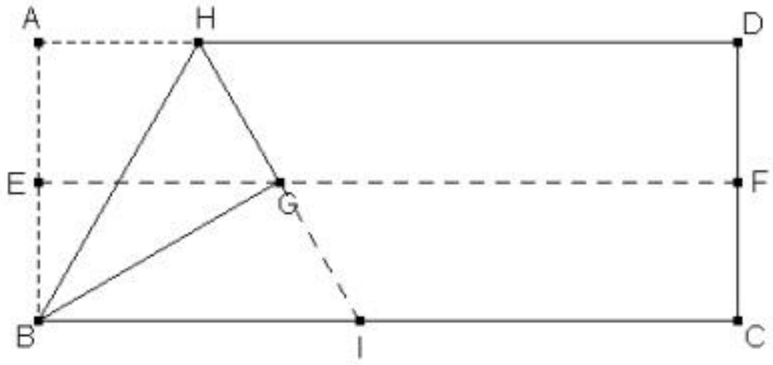
  Démontrer les observations…



Des pliages pour démontrer

- Pour construire un triangle équilatéral à partir d'une bande de papier rectangulaire ABCD :

  Plier pour obtenir la médiane [EF]



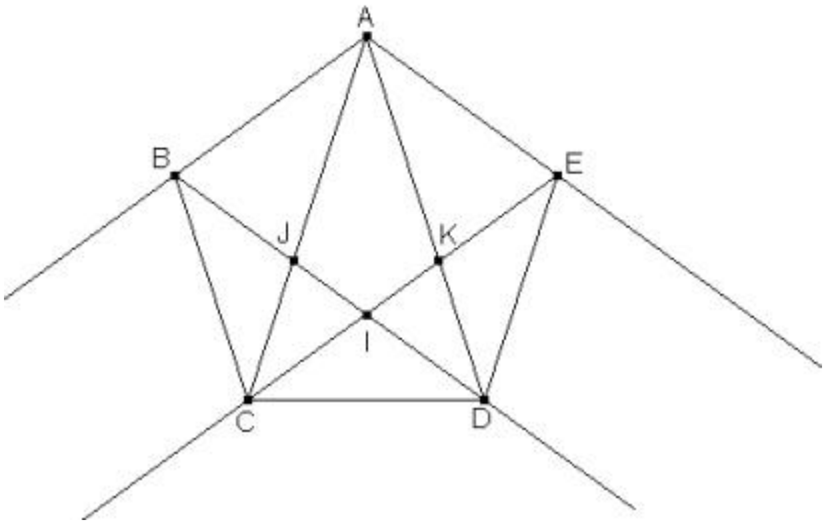
Plier pour amener le point A sur la médiane en un point G. Plier le long de HG pour obtenir le point I. Démontrer que le triangle BHI est équilatéral.

Par les pliages effectués, on a |AB| = |BG| = |AG|, donc le triangle ABG est équilatéral. De plus, BH est bissectrice de l'angle ABG. Donc l'angle ABH mesure 30°, et l'angle BHA mesure 60°.
On en déduit que les angles HBI et BHG mesurent également 60°, ce qui justifie que le triangle BHI est équilatéral.

Des pliages pour démontrer

- Pour construire un pentagone régulier, il suffit de faire un nœud dans une bande de papier…

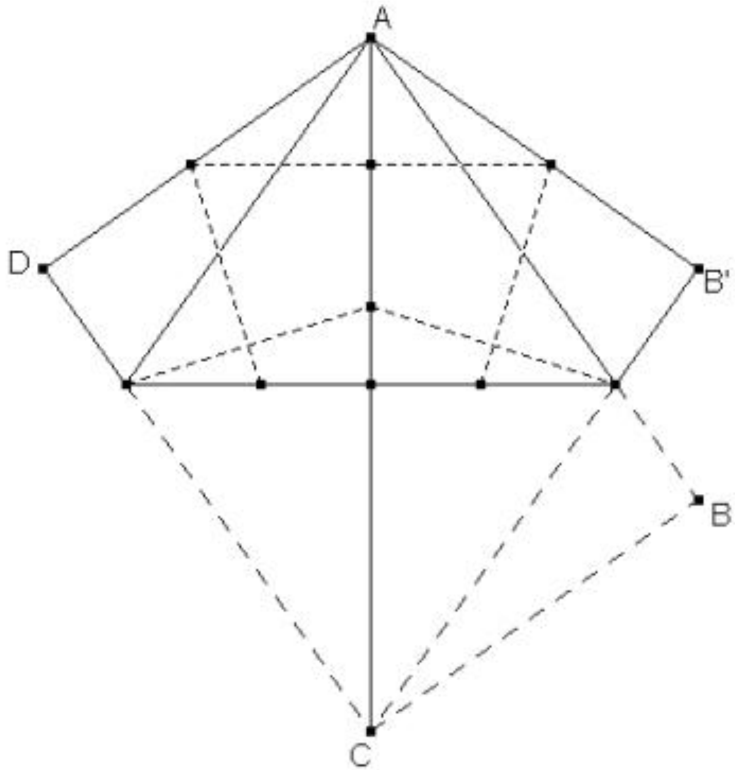
  Pour le démontrer, on utilise la propriété suivante : le quadrilatère situé au croisement de deux bandes de même largeur est un losange



La figure montre donc 3 losanges : ABIE, ABCK et AJDE
Donc |AB| = |BC| = |AE| = |DE| = |EI|.
Comme une diagonale d’un losange est également bissectrice, et en utilisant les angles alternes-internes, on peut démontrer que le petit triangle isocèle EID a ses angles à la base d’amplitude double de celle de l’angle au sommet, autrement dit il possède un angle de 36° et deux angles de 72°. En étudiant de la même façon d’autres triangles, on prouve que les angles CBA, BAE et AED mesurent 108°, et donc le pentagone est régulier.

Des pliages pour démontrer

- On peut construire un pentagone à partir d'une feuille A4 :



Ce pentagone est presque régulier. Pour le vérifier, il faut connaître le format d'une feuille A4 : le rapport entre la longueur et la largeur vaut $\sqrt{2}$

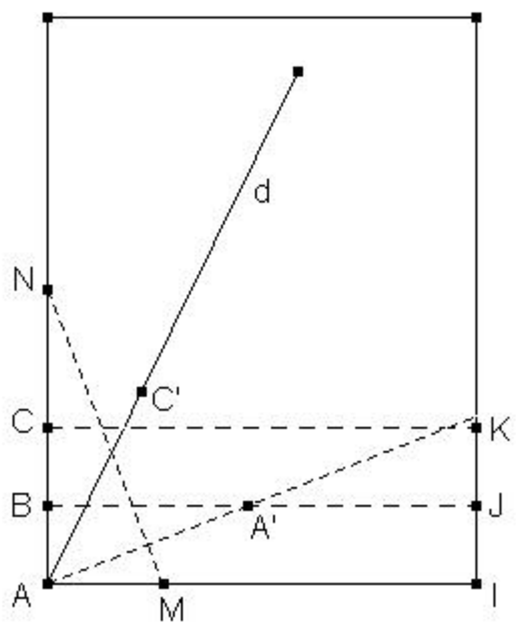
Par symétrie, les triangles ACB et ACB' sont isométriques et rectangles.
On a alors

$$\text{tg } CAB' = |CB'| / |AB'|$$
$$= |CB| / |AB| = \sqrt{2}$$

Et donc CAB' = 54,7356 ° ce qui est un peu plus que les 54° attendus.

Des pliages pour démontrer

- Trisection d'un angle par pliage d'une feuille rectangulaire



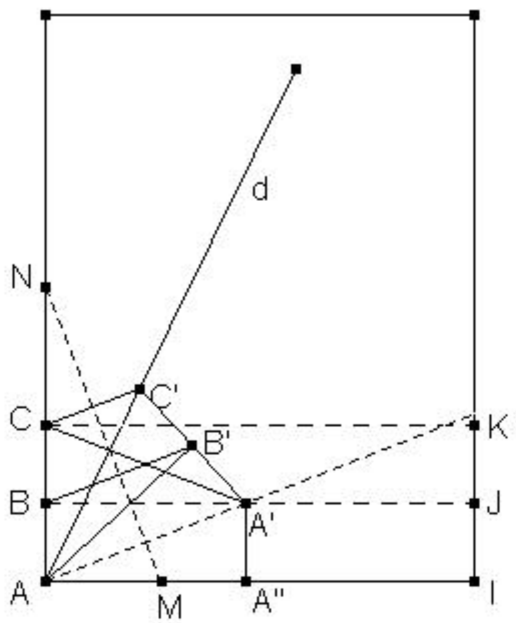
L'angle à trisecter est tracé sur la feuille, un de ses côtés étant le bord inférieur de la feuille, l'autre côté est la demi-droite d.

Par pliage, on détermine deux bandes horizontales de même largeur en bas de la feuille, délimitées par le côté [AI] de l'angle, et par les segments [BJ] et [CK].

On plie alors de manière à amener A sur [BJ] en A', et C sur d en C'

La demi-droite [AA' est alors une trisectrice de l'angle de départ.

Des pliages pour démontrer



Considérons la symétrie d'axe MN : elle envoie A sur A', B sur B', C sur C'.

Le triangle AA'C' est isocèle car |AA'| = |CA'| = |C'A|

Comme B' est milieu de [A'C'], la demi-droite AB' est la bissectrice de A'AC', et les angles A'AB' et B'AC' sont de même amplitude.

Notons A'' le projeté orthogonal de A' sur AI.

On a |A'A''| = |AB| = |A'B'| et |AA''| = |BA'| = |B'A|

Donc les triangles AA'A'' et AA'B' sont isométriques et donc les angles A''AA' et A'AB' sont isométriques.

On en déduit que les demi-droites [AA' et [AB' sont Les deux trisectrices de l'angle de départ.

Références

- L. Ninove, « L'origami et la géométrie en 3e année : explorer, conjecturer et démontrer », Formation CECAFOC, janvier 2011
- A.T. Olson, « Mathematics through paper folding », University of Alberta (article en format pdf)
- http://debart.pagesperso-orange.fr/geoplan/construc_pliage.html#ch3b
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Math%C3%A9matiques_des_origamis
- http://www.dms.umontreal.ca/~rousseac/Origami.pdf