Quelle géométrie pour les instituteurs ?

N. Rouche*

La géométrie naît de perceptions et d'actions vécues par l'être humain dans un environnement marqué entre autres par la pesanteur, c'est-à-dire par la verticale et l'horizontale. Il s'agit au départ d'une géométrie naïve, quoique riche de relations, d'intuitions et d'inférences. Les instituteurs doivent être instruits *avant tout* de cette géométrie-là, proche de celle des enfants. Même s'il est hautement souhaitable qu'ils apprennent *ensuite* une géométrie axiomatisée globalement. Celle-ci n'a de sens qu'issue de la précédente.

Cet article s'appuie sur deux ouvrages publiés antérieurement : L. Lismont et N. Rouche coord. [2001] et N. Rouche et al. [2008]. Le "et al" renvoie à une équipe qui a travaillé ces matières pendant plusieurs années : Ginette Cuisinier, Lucie De Laet, Christine Docq, Jean-Yves Gantois, Christiane Hauchart, Manoëlle Tancré et Rosane Tossut.

1 Les droites, les plans, la pesanteur

Commençons par relever un certain nombre d'observations banales. À cause de la pesanteur, il existe de nombreuses droites verticales dans l'espace où nous vivons : les troncs d'arbre, les poteaux, les arêtes des murs, les pieds des tables, les montants des chambranles, le fil à plomb, etc. Toutes les droites verticales sont *parallèles*.

Beaucoup de droites verticales, toutes parallèles

De même, et de nouveau à cause de la pesanteur, il existe de nombreux plans horizontaux dans notre environnement : les surfaces des étangs (exemples classiques de plans à l'école primaire), les plaines, les planchers, les plateaux des tables, etc. L'action combinée de l'érosion et de la pesanteur transforme les montagnes en plateaux et en plaines au fil des millénaires. Les tables et les planchers sont horizontaux, car les objets posés sur un plan incliné

Beaucoup de plans horizontaux, tous parallèles

*Groupe d'Enseignement Mathématique, Louvain-la-Neuve, Belgique.

ont tendance à glisser ou à rouler. Tous les plans horizontaux sont *parallèles*. Montrer deux plans horizontaux est une façon claire d'illustrer la notion de parallélisme de deux plans.

Des droites horizontales sécantes, parallèles ou gauches

Toute droite située dans un plan horizontal est horizontale. Deux droites horizontales peuvent être *sécantes* (alors elles sont dans un même plan horizontal), *parallèles* (alors elles sont dans un même plan, pas nécessairement horizontal) ou *gauches* (autrement dit *non coplanaires*).

Tout plan qui contient une droite verticale est vertical. Deux plans verticaux peuvent être sécants ou parallèles.

L'horizontale et la verticale engendrent l'angle droit.

Toute droite verticale qui rencontre une droite horizontale forme avec celle-ci un *angle droit*. On rencontre fréquemment, dans l'environnement quotidien, des angles ainsi formés : ils peuvent servir à introduire la notion d'angle droit.

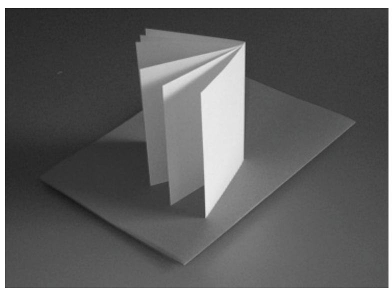


Figure 1:

Lorsqu'un cahier est disposé sur une table comme le montre la figure 1, on y voit une droite perpendiculaire à toutes les droites qui passent par son pied dans le plan. Cette propriété est encore vraie si le cahier n'est constitué que de deux pages.

Des droites et des plans dans toutes les positions possibles

Il existe d'autres droites que les verticales et les horizontales : certaines rampes d'escalier, un fil tendu dans une direction quelconque, une droite obtenue en pliant un papier tenu en main dans une position quelconque, etc.

De même, il existe d'autres plans que les horizontaux et les verticaux : les versants d'un toit en pente, un carton que l'on tient en main dans une position arbitraire, etc.

Les droites verticales orientées par la pesanteur

Revenons pour un moment aux droites verticales et horizontales. Les premières sont orientées par la pesanteur[1] : le *haut* et le *bas*. La pesanteur est un facteur physique.

[1] Dans les axiomatiques classiques de la géométrie, les droites ne sont pas orientées dès le départ.

Les droites horizontales ne sont pas a priori orientées, mais peuvent l'être. Quand un être humain avance droit devant lui, sa trajectoire possède un *avant* et un *arrière*. Cette orientation est d'origine biologique. L'être humain lui-même (comme les autres mammifères) possède un avant et un arrière, parce qu'il a la vocation de se déplacer. Il n'en va pas de même des végétaux, dont la plupart n'ont ni avant ni arrière.

Certaines droites horizontales orientées par l'avant et l'arrière

L'être humain en position debout se tient pour l'essentiel verticalement. Il a la tête en haut et les pieds en bas. Sa direction générale est orientée par la pesanteur. S'il se déplace droit devant lui sur un plan horizontal, sa trajectoire combinée à la verticale détermine un plan vertical. L'être humain est symétrique (il est pareil des deux côtés) par rapport à ce plan. Ceci pour l'essentiel et en apparence, car il est vrai que le cœur est d'un côté et le foie de l'autre.

L'être humain est symétrique.

Par ailleurs, on ne voit aucun facteur physique, aucune caractéristique des mouvements de l'être humain qui aurait pu orienter l'évolution vers une distinction marquée de la gauche et de la droite.

L'être humain possède donc un plan de symétrie. Lorsqu'il étend les bras latéralement, il détermine une droite horizontale qui, vu la symétrie, n'est pas d'office orientée. Mais elle peut l'être au moyen d'une convention. Un côté sera déclaré *gauche*, et l'autre *droit*. Cette convention est arbitraire.

La gauche et la droite, orientation conventionnelle

Pour enseigner la gauche et la droite à un enfant, un adulte lui demande de regarder dans la même direction que lui. Il lui montre son bras gauche, par exemple, et lui dit d'appeler *gauche* celui de ses deux bras qui se trouve du même côté. L'adulte ne peut, dans cette explication, s'appuyer sur aucun caractère anatomique visible. Tel n'est pas le cas du crabe[2] de la figure 2, qui peut enseigner plus facilement la gauche et la droite à ses petits.

Le cerf à deux têtes[3] de la figure 2 ressemble au dieu Janus : il n'a pas naturellement un avant et un arrière. Mais il pourrait, par une convention, se doter d'un avant et d'un arrière. Il suffirait qu'il attache un ruban à l'un de ses bois et décide que le côté du ruban sera nommé *l'avant*. Après avoir pris une telle convention, il pourrait, par une deuxième convention, nommer sans ambiguïté sa gauche et sa droite.

[2] *Pseudocarcinus gigas*, présent sur certaines côtes d'Australie.
[3] Dessiné d'après une sculpture préhistorique sarde, au musée de Cagliari.

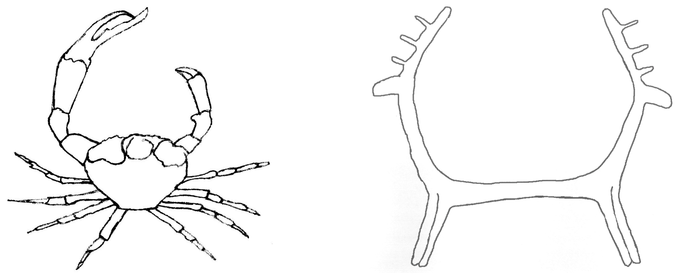


Figure 2:

Rappelons-le, tous les faits et observations rapportés jusqu'ici sont banals. Examinons maintenant de plus près quels rôles ils jouent dans l'émergence des premières notions de géométrie à partir du quotidien.

L'espace quotidien est anisotrope.

La pesanteur explique la fréquence autour de nous de droites verticales, de plans horizontaux, de droites et de plans parallèles, d'angles droits. L'espace autour de nous est *anisotrope*, c'est-à-dire qu'il a des propriétés différentes selon la direction. Cette anisotropie est à l'origine de la symétrie anatomo-physiologique des êtres vivants qui ont vocation de se déplacer. L'être humain est adapté à l'espace physique. On le constate entre autres au fait que les droites et les plans lui sont plus familiers que d'autres lignes ou surfaces, et qu'il reconnaît plus aisément les objets qui cadrent avec la pesanteur, ceux qui respectent la verticalité, l'horizontalité ainsi que le parallélisme et l'orthogonalité correspondants.

L'être humain est adapté à cette anisotropie.

Un sentiment esthétique

Cette familiarité avec certaines classes d'objets s'accompagne d'un sentiment, d'une impression esthétique. À propos des droites par exemple, E. Mach [1886] écrit : "La *droite*, en tous ses éléments, conserve la même direction, et excite partout *le même* type de sensation d'espace. C'est en cela que réside son intérêt esthétique. Par ailleurs, les droites qui se trouvent dans le plan médian[4] ou qui lui sont perpendiculaires se distinguent d'une façon qui leur est propre, en ce qu'elles occupent une position de symétrie et se comportent de la même manière par rapport aux deux moitiés de l'appareil visuel. On ressent toute autre position des droites comme "allant de travers", comme rompant la symétrie."

Quelle géométrie en apesanteur ?

On comprend mieux la prégnance de certaines directions dans l'environnement humain en imaginant une géométrie qui aurait pris naissance en apesanteur. On y trouverait sans doute des droites

[4]Le plan de symétrie de l'observateur.

et des plans, mais ils auraient toutes les directions possibles. Les parallèles et les angles droits n'y apparaîtraient pas naturellement. Dans un tel espace isotrope, l'être humain n'aurait pas de plan de symétrie. Son habitude de se déplacer lui aurait sans doute donné la forme d'un fuseau (une symétrie de rotation autour d'un axe), peut-être un seul œil devant, … On peut rêver.

Pas d'abord une géométrie plane : l'espace est là.

Notre première approche de la géométrie ne comporte aucun traitement séparé du plan et de l'espace. Nous n'avons pas évoqué *le plan*, au singulier, comme un cadre exclusif d'une première géométrie théorique. Nos droites et nos plans occupent l'espace vécu. Nous verrons ci-après que la géométrie commençante n'a pas, et pendant longtemps, vocation de se confiner à un plan, ou plutôt au plan. Commencer (recommencer) par la géométrie plane devient pertinent seulement plus tard, lorsque se fait sentir le besoin d'une reconstruction déductive du savoir acquis.

Un mélange de géométrie, de physique et de biologie

La géométrie n'existe pas, au départ, comme discipline ou forme de pensée indépendante. Elle s'occupe des formes et des grandeurs. Or les premières notions que nous avons rencontrées sont issues d'un milieu où interagissent non seulement les propriétés géométriques au sens strict, mais aussi la physique (la pesanteur) et la biologie (la forme du corps humain et de son appareil perceptif). Nous verrons, à la section suivante, que la géométrie ne se débarrasse pas facilement de la physique et du corps humain.

Une géométrie fausse à grande et petite échelle

D'autre part, cette géométrie physique que nous avons esquissée est fausse. Elle est fausse en grand car, si on essaie de la penser à l'échelle de la terre, force est de constater que les verticales ne sont plus parallèles, et les plans horizontaux non plus. Un autre ordre prévaut à cette échelle.

Elle est fausse en petit aussi, car si on descend en imagination à l'échelle des molécules et des atomes, on n'y voit plus les droites et les plans si présents à l'échelle humaine et la pesanteur n'y joue plus de rôle notable.

Ainsi, la géométrie ordinaire naît dans l'espace restreint constitué par l'environnement quotidien. Quoi d'étonnant donc à ce qu'elle s'avère inadéquate en dehors du domaine où elle a pris naissance ?

Pourquoi d'abord des droites et des plans ?

Demandons-nous aussi pourquoi, dans notre premier coup d'œil sur l'environnement quotidien, nous n'avons relevé que des objets aussi pauvres que des droites et des plans. Pourquoi ne pas avoir attiré l'attention sur les formes géométriques les plus simples et les plus répandues, telles que les rectangles et les cercles ?

Il y a deux raisons. La première est que les droites et les plans sont les éléments géométriques qui permettent le mieux d'expliquer la prégnance de la pesanteur dans l'environnement. Or, nous le verrons dès la section suivante, les directions privilégiées par la pesanteur et la symétrie du corps humain interviennent de façon essentielle dans la perception des formes de toutes sortes. La deuxième raison est que les droites et les plans (au sens familier que nous avons donné ici à ces deux termes) sont des éléments constitutifs des figures et des solides habituellement qualifiés de *géométriques*. On ne peut comprendre ceux-ci (voir section 4) qu'en s'appuyant sur les notions de droite (côté, arête), plan (face), parallèle et perpendiculaire.

Des objets mentaux, pas de concepts formels

Nous avons parlé de plans et de droites, mais c'est par abus de langage. Il s'agit de lignes droites et de surfaces planes physiques, pas de ce que l'on appelle *droites* et *plans* dans la théorie géométrique. Dans une telle théorie, les droites et les plans sont définis par des axiomes, ce sont des objets idéalisés dont on donne une idée en évoquant d'une part un fil tendu de section nulle et s'étendant à l'infini dans les deux sens et, d'autre part, une surface qui ressemble à celle d'un lac lorsqu'il n'y a pas de vent, surface que l'on étend mentalement à l'infini dans toutes les directions. La seule raison d'évoquer de tels objets est qu'ils illustrent – plus ou moins – le fait que lorsque deux droites se coupent, elles le font en un seul point (même si elles sont quasiment parallèles), que lorsqu'une droite contient deux points d'un plan, elle est toute entière contenue dans ce plan, et d'autres propositions analogues[5]. Il s'agit des axiomes dont on peut déduire la géométrie. Nous n'en sommes pas là. Ces objets idéalisés sont des *concepts de fondement* : nous ne pouvons pas songer à fonder une géométrie qui, pour nous, commence seulement à exister.

De même, nous avons parlé de parallèles et de perpendiculaires. Mais ici aussi, il s'agit de relations physiques, dont on acquiert la connaissance par des exemples et non par des définitions. De la même façon, des notions telles que celles de *table* ou *cheval* s'acquièrent pas des exemples[6].

Les droites, les plans, les perpendiculaires ne sont pas pour nous, à ce stade, des concepts définis mathématiquement, adaptés

[5]Sur la nature et le rôle des objets idéalisés en géométrie, voir GEM [1981].

[6]*Plus tard*, les droites et les plans, les parallèles et les perpendiculaires seront définis univoquement et pourront, de ce fait, être engagés dans un exposé déductif. Il n'en va pas de même pour les tables et les chevaux.

à la construction d'une théorie de longue haleine. Ce sont ce que Freudenthal [1983] appelle des *objets mentaux*, c'est-à-dire *des notions qui, pour n'être pas univoquement définies, n'en sont pas moins de bons instruments pour organiser et comprendre un champ de phénomènes.* Il n'y a pas besoin de définition univoque pour comprendre des phrases telles que : toutes les droites verticales sont parallèles, ou pour comprendre ce que nous avons dit des figures 1 et 2.

2 La congruence

La congruence, relation de base

La géométrie commençante s'occupe de la forme et de la grandeur des objets. Il est donc naturel qu'une démarche de base – sans doute *la démarche de base* – de la géométrie à son début consiste à établir que deux objets ont même forme et même grandeur[7]. Nous disons de tels objets qu'ils sont *congruents*[8].

La mesure présuppose la congruence.

On réalise aussi le caractère fondamental de la congruence en se souvenant qu'elle est à l'origine de l'idée de mesure[9]. En effet, par exemple pour mesurer la longueur d'un segment, on installe bout à bout le long de celui-ci des segments congruents (des unités de longueur). De même, pour mesurer l'aire d'une surface, on recouvre celle-ci (ou on tente de la recouvrir) avec des carrés congruents (des unités d'aire).

D'abord les formes planes

Les objets congruents abondent dans l'univers quotidien. Par ailleurs, reconnaître la congruence de deux objets est plus facile dans le cas d'objets plans que dans celui d'objets à trois dimensions. Voyons cela.

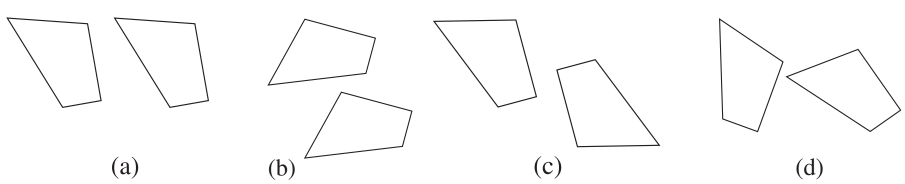


Figure 3:

La congruence estimée à vue

On peut sinon établir, du moins conjecturer à vue la congruence

[7]Sur la genèse des notions de forme et de grandeur, voir l'appendice.

[8]Nous préférons dire *congruents* plutôt qu'*isométriques*, parce que ce dernier terme renvoie à l'idée de mesure, étrangère à notre propos.

[9]La genèse des mesures sort du cadre de cet exposé. Nous avons traité cette question dans N. Rouche [2006] et [2008].

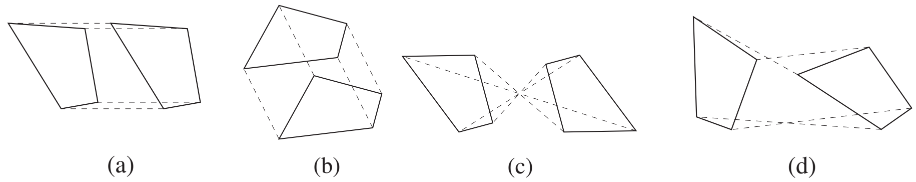


Figure 4:

de deux formes[10] planes situées par rapport à l'observateur dans un plan frontal. Toutefois, la congruence est reconnue avec une difficulté variable selon la disposition des deux formes dans le plan. La difficulté va croissant lorsqu'on passe du cas (a) au cas (d) de la figure 3. Un explication possible de cette difficulté variable réside dans la configuration des chemins rectilignes que le regard emprunte pour joindre l'un à l'autre les points homologues des deux formes (figure 4). Il apparaît que le déplacement horizontal du regard est le plus naturel, le moins perturbant (voir[11] E. Mach [1886]).

Deux orientations

Si maintenant on compare les figures 3 et 5, on s'aperçoit qu'il y a deux sortes de congruence des formes planes : dans un premier cas (figure 3), on pourrait superposer les deux formes en les glissant dans le plan où elles se trouvent ; dans le second (figure 5), elles apparaissent comme les images l'une de l'autre dans un miroir, ou encore elles sont telles qu'on ne pourrait les superposer qu'en retournant l'une d'elles[12].

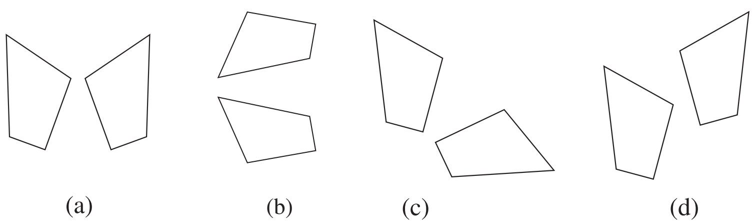


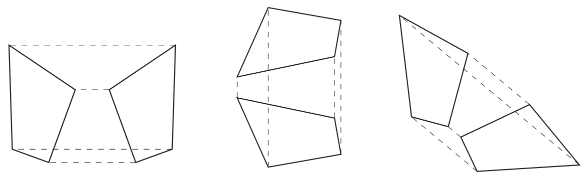
Figure 5:

Pour ces dernières formes aussi, la congruence est conjecturée avec une difficulté croissante lorsque l'on passe du cas (a) au cas

[10] Nous disons *formes* et non *figures* pour éviter la confusion entre les objets géométriques et les figures qui illustrent le texte.

[11] Les observations de Mach sont confirmées et développées par I. Rock [1973].

[12] Le fait d'évoquer un retournement nous confirme dans l'idée que la géométrie des formes planes à son début n'est pas une géométrie *du plan.* Ces formes planes voyagent dans l'espace.



(a) (b) (c) (d)

Figure 6:

(d) de la figure 5 ou de la figure 6. Les trois premiers cas montrent deux formes disposées symétriquement par rapport à un axe. Cet axe n'est pas dessiné, il existe virtuellement, mais on pourrait le construire. Il nous confirme, en montrant un de leurs rôles, la présence des droites dans la géométrie commençante.

La notion de droite apparaît dans un rôle nouveau.

Ce deuxième type de congruence conduit aux formes symétriques. Lorsqu'une forme possède un axe de symétrie, c'est que ses deux moitiés, situées de part et d'autre de l'axe, peuvent être superposées par retournement. L'existence des formes symétriques[13] est un élément majeur de la géométrie à son début. Au rebours de toutes les autres formes, celles-ci peuvent être superposées soit par simple glissement dans leur plan, soit après retournement de l'une d'elles.

Les formes symétriques et la notion d'objet

Nous venons d'examiner comment estimer à vue la congruence de deux formes planes. Mais au passage, nous avons aussi évoqué la superposition de ces formes par glissement dans leur plan, soit directement, soit après retournement de l'une d'elles. La superposition est une façon plus précise que la reconnaissance à vue pour établir la congruence de deux formes.

La congruence vérifiée par superposition

Une troisième façon d'établir la congruence de deux formes est de recourir à un théorème, par exemple un des trois théorèmes classiques sur la congruence des triangles. Mais évidemment, de tels théorèmes n'appartiennent pas à la géométrie commençante. Ils se trouvent dans son horizon[14].

La congruence établie par un théorème

Après avoir traité des formes planes, venons-en aux objets à

On en arrive aux solides.

[13]Au niveau du sens commun, deux formes disposées symétriquement ne sont pas la même chose qu'une forme symétrique, c'est-à-dire un objet *d'un seul tenant* possédant un axe de symétrie. La notion commune d'objet est en cause ici. Mais cette distinction est ignorée par la géométrie.

[14]Parlant de la reconnaissance des congruences, E. Mach [1886] distingue trois stades : la reconnaissance *à vue*, la reconnaissance par une action qu'il appelle *mécanique* (la superposition), et la reconnaissance *intellectuelle* (c'est-à-dire par un théorème).

trois dimensions, ceux que l'on appelle habituellement des solides.

Avant d'examiner la congruence de deux solides, observons qu'il est plus difficile de connaître un solide qu'une forme plane. Si on est assuré qu'une forme est plane, on ne doit pas la retourner pour en connaître la forme et la grandeur. Par ailleurs, comme on ne voit jamais un solide que d'un seul côté, il faut, pour s'en faire une idée, le tourner devant soi ou tourner autour de lui pour voir comment il est fait de tous côtés. L'idée qu'on en a comme d'un objet unique résulte alors de l'intégration par la pensée de toutes les vues partielles recueillies en cours de route.

De la difficulté de connaître un solide

Bien entendu, on n'a pas besoin de toutes ces étapes pour reconnaître un solide appartenant à une catégorie familière. Lorsqu'on voit un ballon ou une bouteille d'une seul côté, on devine, en puisant dans sa mémoire, comment il ou elle est de toute part.

On reconnaît sans peine les solides familiers.

Comment alors reconnaître la congruence de deux solides ? On peut, avec plus ou moins de succès, la reconnaître à vue. Deux constats s'imposent.

Premièrement, il existe deux sortes de congruences, selon que l'un des deux solides, n'importe lequel, est ou non image de l'autre dans un miroir. On parle de *congruence directe* lorsqu'on peut, par la pensée, faire coïncider un solide avec l'autre : tel est le cas, par exemple, des deux solides de gauche de la figure 7. On parle de *congruence inverse* lorsqu'une telle superposition n'est pas possible et que, pour faire coïncider en pensée les deux solides, il faut recourir à un miroir, par exemple comme pour les deux solides de gauche de la figure 8. De deux solides que l'on ne peut pas faire coïncider en pensée directement, mais qui sont images l'un de l'autre dans un miroir, on dit qu'ils forment un couple *énantiomorphe*.

Congruence directe et congruence inverse ; les couples énantiomorphes

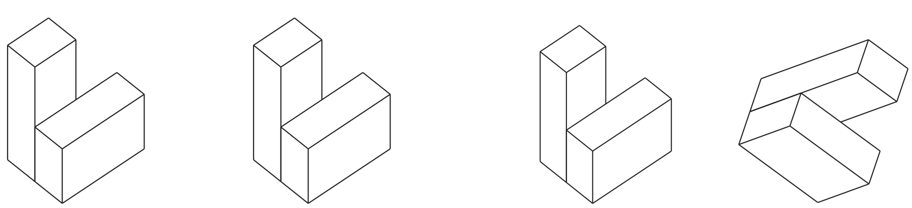


Figure 7:

Un cas particulier de congruence est celui de deux solides congruents possédant chacun un plan de symétrie. Si tel est le cas, on les amène à coïncider en pensée indifféremment sans recourir ou en recourant à un miroir.

Solides possédant un plan de symétrie

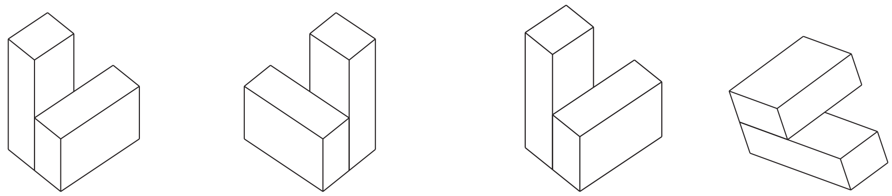


Figure 8:

Deuxième constat. La reconnaissance à vue, toujours un peu hasardeuse, de la congruence directe de deux solides est la plus facile lorsque ceux-ci sont translatés l'un de l'autre (figure 7, côté gauche). S'il s'agit de la congruence inverse, la reconnaissance est la plus facile lorsque les deux solides sont disposés symétriquement par rapport à un plan vertical qui est aussi le plan de symétrie de l'observateur (figure 8, côté gauche).

Estimer à vue la congruence de deux solides est plus ou moins facile selon leur disposition.

Reconnaître la congruence de deux solides en les superposant est impossible, puisque les solides sont impénétrables, ce qui est une donnée physique. Qui plus est, alors qu'on pouvait retourner une forme plane, on ne peut pas "retourner" un solide pour l'amener à coïncider avec son correspondant dans un couple énantiomorphe. Et donc on peut dire, en suivant la distinction de Mach, qu'il n'y a pas d'action mécanique possible pour établir la congruence de deux solides. Restent les théorèmes, qui s'appuient souvent sur des mesures. Si c'est le cas, on pourra trouver raisonnable de remplacer le terme de *congruence* par celui d'*isométrie*. Mais nous n'en sommes pas encore là.

Les solides sont impénétrables.

On ne peut pas "retourner" un solide.

Établir la congruence grâce à un théorème

Pour en terminer avec la congruence, rappelons que nous avons retourné certaines formes planes pour les superposer. Donc la géométrie des formes planes à son début n'est pas une géométrie *du plan*. Ces formes voyagent dans l'espace.

Les formes planes sont perçues dans l'espace.

En outre, la perception plus ou moins facile des congruences s'explique dans le cadre de l'espace anisotrope. Cette perception mobilise en effet les directions privilégiées par la pesanteur et la symétrie du corps humain.

Encore l'espace anisotrope et le sentiment esthétique

De plus, le sentiment esthétique évoqué ci-dessus à propos des droites et des plans s'étend aux figures congruentes : les situations de translation et de symétrie, parce qu'elle facilitent la reconnaissance des congruences, sont une source de satisfaction intime.

Notons enfin que la congruence, telle que nous l'avons appré-

Encore un objet mental

hendée, est un objet mental et non un concept formel. Nous l'avons saisie à travers l'action quotidienne de superposer[15].

3 Les mouvements

Nous l'avons vu, la notion de congruence s'appuie sur celle de superposition. Bornons-nous ici aux formes planes, les seules qui soient effectivement superposables. Pour superposer deux formes, il faut déplacer au moins l'une des deux, ce qui nous amène à considérer les mouvements.

Il faut un mouvement pour superposer deux formes.

Pour superposer deux formes en carton, on passe souvent par les mouvements les plus libres, désordonnés, difficiles à décrire. On peut toutefois distinguer trois types de mouvements simples, jouant chacun un rôle spécifique dans l'exploration des congruences.

Les mouvements spontanés sont difficiles à analyser.

> On glisse une forme vers une autre, *sans la tourner*. On la rapproche de celle-ci parce que la proximité facilite la perception de la congruence. Un tel mouvement s'appelle *mouvement de translation*.

Glisser

> On tourne une forme pour lui donner la même orientation qu'une autre[16], puisque le fait d'avoir la même orientation facilite aussi la perception de la congruence.

Tourner

> Enfin, dans certains cas, on retourne une forme simplement pour permettre de la superposer à une autre.

Retourner

Ces trois mouvements canoniques se composent de façon plus ou moins désordonnée dans le mouvement familier de la main qui superpose une forme à une autre. Et donc ils sont peu reconnus dans le quotidien. Ils ont pourtant des fonctions distinctes dans la formation de la pensée géométrique.

Le logiciel Apprenti Géomètre[17], en n'autorisant que chacun de ces mouvements séparément, contribue à leur identification et à la reconnaissance de leur rôle propre.

Ces trois mouvements sont une préfiguration, lointaine, des transformations du plan que sont les translations, les rotations et les

Trois mouvements préfigurant la translation, la rotation et la symétrie orthogonale.

[15] Cette action relève de *l'intelligence pratique* ou *intelligence des situations*, au sens de H. Wallon [1970]

[16] C'est-à-dire pour qu'on puisse passer de l'une à l'autre en la glissant sans la tourner.

[17] Logiciel téléchargeable à partir du site www.enseignement.be/geometre.

symétries orthogonales. Pour en arriver à celles-ci, la géométrie aura évacué les mouvements.

4 Les figures simples

Rappelons que la congruence concerne des objets quelconques, pas nécessairement des formes ou des solides géométriques au sens traditionnel de ces locutions. Maintenant, nous en arrivons à ces formes simples.

Les plus simples des polygones

À titre d'exemple, considérons un carré. On peut le couper en deux suivant une médiane ou une diagonale, en quatre suivant ses deux médianes ou ses deux diagonales, en quatre aussi suivant une médiane et une diagonale, etc. On peut découper chacun des morceaux de diverses façons. On peut assembler des carrés ou des morceaux de carré, les assemblages les plus intéressants, ceux qui posent question, étant ceux où deux formes se côtoient le long de tout un côté. On peut fusionner les nouvelles formes ainsi créées. *Découper, assembler* et *fusionner* apparaissent comme des actions de base de la géométrie commençante. Ce sont d'ailleurs les actions fondatrices des géométries anciennes chinoise et indienne. On se souviendra, à tire d'exemple, des multiples preuves chinoises du théorème de Pythagore recourant au découpage et au réassemblage de morceaux de carré bien choisis.

Découper, assembler, fusionner

Les géométries anciennes chinoise et indienne.

Des rapports simples de longueurs, d'aires et d'angles

La *famille* de formes que l'on obtient en découpant un carré ou en assemblant des carrés congruents ou des morceaux de carrés, a ceci d'original qu'entre les formes ainsi créées existent des rapports simples de longueurs, d'aires et d'angles. Cela explique le nombre élevé de combinaisons intéressantes que l'on peut obtenir en ajustant ces formes entre elles de toutes sortes de façons[18].

La *famille* du carré : des polygones variés

Cette famille de formes issues du carré comporte des triangles rectangles, des triangles isocèles, des trapèzes et parallélogrammes divers, etc. Il ne s'agit donc pas d'une famille de polygones au sens habituel des manuels de géométrie, à savoir, par exemples, celle formée de toutes les sortes de triangles, ou de toutes les sortes de quadrilatères, etc. Ces familles en un sens plus classique se prêtent moins immédiatement à des combinaisons significatives. Dans la famille du carré par contre, et dans les autres familles analogues, ont voit apparaître des formes de toutes sortes, dont les ajustements

[18] H. Freudenthal [1973] a montré l'intérêt de ces ajustements, ces assemblages *qui tombent juste*. Il les appelle, en anglais, des *fittings*.

préludent à leur analyse en termes de parallèles, perpendiculaires, etc.

La *famille* du triangle équilatéral

Ce que nous venons d'expliquer au départ d'un carré peut être répété, *mutatis mutandis*, à partir d'un triangle équilatéral. Par découpage, assemblage et fusion, on crée une multitude de formes significatives, possédant entre elles des rapports simples de longueurs, d'aires et d'angles. La famille du triangle équilatéral comprend l'hexagone régulier dans sa relation familière avec le cercle.

Les *familles* issues des rectangles

On peut de même créer une famille de formes au départ de chaque rectangle.

En quoi ces expériences et ces créations ont-elles une valeur générale ? Tous les carrés sont semblables, et donc on imagine facilement pouvoir refaire au départ d'un carré quelconque ce que l'on a fait au départ d'un carré particulier. La perception (pas la théorie) de la similitude est en cause ici. Nous avons longuement traité ci-dessus de la congruence. Mais il est remarquable que la capacité de percevoir les similitudes soit précoce et parente de la perception des congruences. Deux formes semblables sont aisément reconnues comme telles lorsqu'elles sont présentées côte à côte dans un plan frontal, et disposées de la même façon.

On perçoit facilement les similitudes.

Pour la même raison, tout ce que l'on a fait au départ d'un triangle équilatéral peut être reproduit au départ de n'importe quel autre.

On parcourt facilement en imagination l'ensemble des rectangles.

Le cas des rectangles est un peu différent, car tous les rectangles ne sont pas semblables. Ils diffèrent entre eux non seulement par la taille, mais encore par le rapport des longueurs de leurs côtés. Il n'empêche, on peut facilement parcourir en imagination l'ensemble des rectangles, surtout si on les suppose disposés dans un plan frontal avec deux côtés horizontaux. Donc on se convainc que ce que l'on a fait avec un rectangle, on pourrait le faire avec n'importe quel autre.

Des assemblages dans l'espace ; le plan et l'espace se côtoient.

Nous avons parlé ci-dessus d'assemblages plans. Mais tout naturellement on passe à des assemblages dans l'espace. Avec des carrés, on fait un cube, avec des triangles équilatéraux on fait un tétraèdre régulier, puis un octaèdre et bien d'autres solides, avec des rectangles on fait des parallélépipèdes, etc. Ainsi la frontière entre le plan et l'espace est aisément franchie, même si le passage à trois dimensions amène de nouvelles questions.

Des formes données, pas construites

Terminons par quelques observations. Tout d'abord, nous sommes entrés dans la géométrie avec des formes toutes faites, que l'on découpe et assemble, non avec des formes à construire aux instruments, ce qui est une étape plus avancée (voir section 8).

Nous avons introduit des formes simples : il s'agit de formes dont on peut parcourir en imagination, sans trop de peine, les cas de figure. Commentons cela. Tous les carrés sont semblables. Tous les triangles rectangles isocèles aussi, et tous les triangles équilatéraux également. De ces formes, nous dirons qu'à similitude près, elles ont *zéro degré de liberté*. L'ensemble des rectangles est défini, à similitude près, par un seul paramètre (le rapport de ses côtés). Nous dirons qu'à similitude près, les rectangles ont *un degré de liberté*. Les parallélogrammes en ont *deux*, les quadrilatères généraux *quatre*. Plus une forme a de degrés de liberté, plus il est difficile de parcourir en imagination l'ensemble de ses variantes. Les formes à peu de degrés de liberté sont saisies par l'intuition. Plus une forme a de degrés de liberté, plus il est nécessaire de raisonner pour connaître certaines de ses propriétés.

Des formes à peu de degrés de liberté

Par ailleurs, nous n'avons toujours pas recouru aux concepts de point, droite et plan au sens des fondements de la géométrie. Les notions de sommet, côté, arête et face suffisent au stade où nous nous trouvons.

Toujours pas de concepts de fondement

Enfin, la géométrie dont nous parlons est une géométrie de relations (les congruences), d'actions (découper, assembler), de phénomènes (les assemblages). Ce n'est pas d'abord une géométrie d'objets, de concepts, de définitions et de classifications, comme celle qui s'occupe du classement des sortes de triangles, de quadrilatères, etc. Dans notre introduction des familles du carré, du triangle équilatéral et du rectangle, les concepts, ou plus modestement les objets mentaux (voir ci-dessus), sont des instruments pour comprendre et communiquer, pas des pièces de musée à décrire.

Des relations, des actions, des phénomènes, plutôt que des concepts, des définitions et des classifications

5 Les pavages et les angles

Les pavages, assemblages infinis

Après avoir évoqué la découverte en grand nombre d'assemblages de polygones bien ajustés entre eux, venons-en à ces assemblages infinis que constituent les pavages. On parle de *pavage* lorsqu'un plan est recouvert par des polygones sans chevauchements ni lacunes[19].

Commençons par un constat élémentaire : on peut paver le plan avec des copies d'un triangle équilatéral. On peut aussi le faire avec des copies d'un carré, ou avec des copies d'un hexagone régulier. Ces trois pavages sont appelés *pavages réguliers*. Dans

[19] Cette section est inspirée par Chr. De Block-Docq [1994].

le premier cas, on trouve 6 triangles assemblés autour de chaque nœud du pavage. On en déduit que l'angle du triangle équilatéral vaut $\frac{1}{6}$ de tour. De la même façon, on vérifie que l'angle du carré vaut $\frac{1}{4}$ de tour, autrement dit un angle droit. Et de même l'angle de l'hexagone régulier vaut $\frac{1}{3}$ de tour.

Les pavages réguliers donnent les angles du triangle équilatéral, du carré et de l'hexagone régulier.

Un phénomène intrigant est que l'on peut paver le plan avec des polygones réguliers à 3, 4 et 6 côtés, mais non à 5, 7, 8, 9, ... côtés. Il suffit d'essayer pour s'en convaincre. Conclusion : nous connaissons l'angle du triangle équilatéral, du carré et de l'hexagone régulier, mais pas celui d'un quelconque autre polygone régulier.

Des questions ouvertes

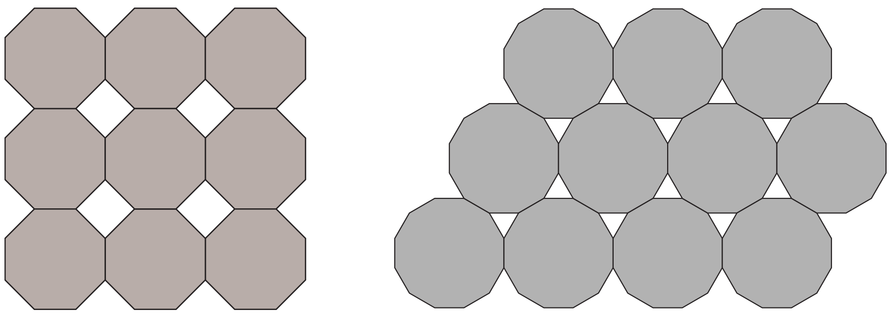


Figure 9:

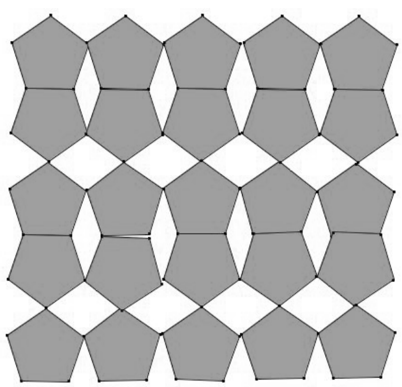


Figure 10:

Toutefois, certains essais de pavage nous permettent d'avancer, même s'ils ne réussissent pas. Lorsqu'on essaie de paver le plan avec des octogones réguliers, on obtient ce que montre la partie gauche de la figure 9. On constate que deux octogones et un carré sont

Deux résultats glanés au passage

rassemblés autour d'un point. Donc, l'angle de l'octogone vaut la moitié de $\frac{3}{4}$ de tour, ou encore 135°.

De même, un essai pour paver le plan avec des dodécagones réguliers conduit à ce que montre la partie droite de la figure 9. On y trouve, autour d'un point, deux dodécagones et un triangle équilatéral. Donc, l'angle du dodécagone vaut la moitié d'un tour complet dont on a ôté $\frac{1}{6}$ de tour, ce qui fait 150°.

Nous connaissons donc maintenant les angles des polygones réguliers à 3, 4, 6, 8 et 12 côtés. Que penser des autres, à commencer par le pentagone ? Les essais de pavage avec ce dernier ou avec d'autres conduisent à des résultats souvent jolis comme, par exemple, celui que montre la figure 10. Mais ces essais ne donnent la valeur d'aucun angle. Une impasse ?

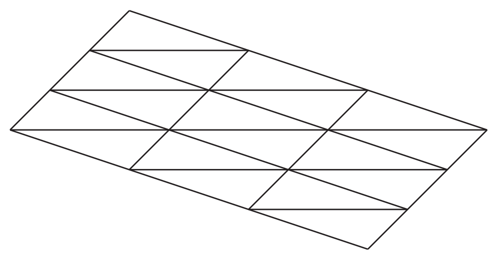


Figure 11:

Un changement de cap radical

Partons sur une autre piste. Peut-on paver avec des copies de certains polygones non réguliers ? Commençons par le premier d'entre eux, le triangle. On constate qu'on peut paver le plan avec des copies d'un triangle quelconque[20], ce dont la figure 11 donne un exemple. Dans un tel pavage, on trouve rassemblés autour de chaque nœud deux copies de chacun des angles du triangle. Donc la somme des angles du triangle fait un demi-tour, c'est-à-dire un angle plat ou 180°.

Une question ouverte

Question suivante : peut-on paver le plan avec des copies d'un quadrilatère quelconque ? La première impression est que ce n'est pas possible, le quadrilatère étant une figure trop libre pour se prêter à un assemblage aussi régulier qu'un pavage. Reportons donc la question à plus tard.

Revenons aux polygones réguliers, et choisissons l'ennéagone (polygone à 9 côtés) comme exemple. La figure 12 de gauche montre qu'on peut le découper en $9 - 2 = 7$ triangles. Donc la somme

[20]Sur le fondement de ce constat, voir la section 6.

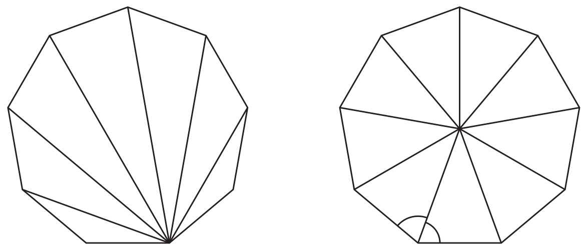


Figure 12:

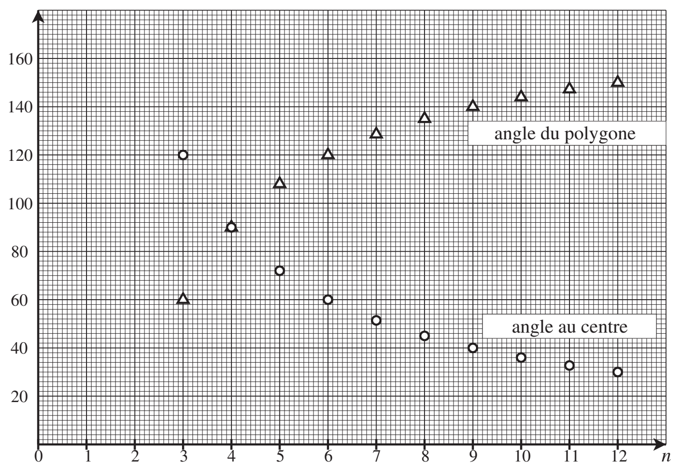


Figure 13:

de tous ses angles vaut $(9-2) \times$ (un demi-tour) $= (9-2) \times 180°$.
Chacun de ses angles vaut

$$\frac{(9-2) \times 180°}{9} = 140°.$$

Pour un polygone régulier à n côtés, on obtiendrait de même

$$\frac{(n-2) \times 180°}{n}.$$

Nous avons donc trouvé une formule qui donne l'angle de n'importe quel polygone régulier, et ces polygones sont en nombre infini. Pour chacun d'eux, nous connaissons aussi l'angle au centre, qui vaut la n^{e} partie d'un tour complet, soit $\frac{360°}{n}$. Ce résultat est illustré pour l'ennéagone à la figure 12 de droite. Le graphique de la figure 13 montre la mesure de l'angle de quelques polygones réguliers et leur angle au centre en fonction du nombre de leurs côtés.

Angles de tout les polygones réguliers

Deux suites infinies

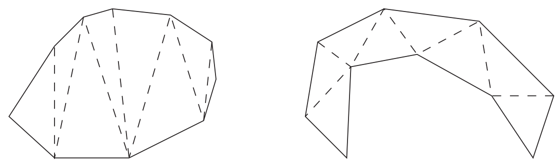


Figure 14:

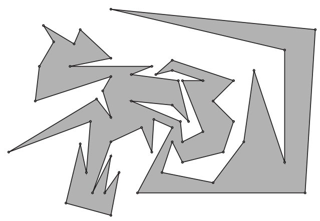


Figure 15:

Que penser maintenant de la somme des angles d'un polygone quelconque ? Les figures 14 montrent qu'on pourra la calculer si on arrive à décomposer le polygone en triangles. Mais sera-ce le cas pour un polygone comme celui de la figure 15 ? Cela n'a rien d'évident. Il faut, provisoirement, arrêter la recherche.

Une question trop difficile

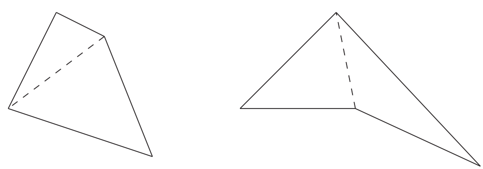


Figure 16:

Ceci dit, on s'aperçoit qu'on peut décomposer un quadrilatère quelconque en deux triangles : voir la figure 16. Donc, la somme des angles d'un quadrilatère fait toujours un tour complet.

Ce résultat donne à penser qu'on pourrait peut-être paver le plan avec des copies d'un quadrilatère quelconque, à condition de rassembler autour de chaque nœud du pavage les quatre angles du quadrilatère. Un tel pavage est possible : la figure 17 en montre un exemple. La preuve est assez élémentaire, mais ce serait un peu long de l'exposer ici.

Un résultat contre-intuitif

Arrêtons ces considérations sur les pavages. À un niveau de la

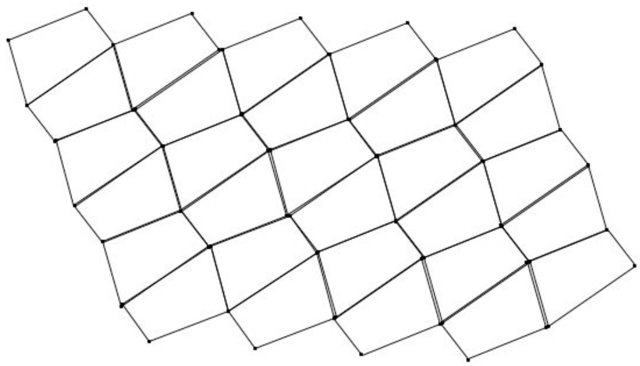


Figure 17:

géométrie qu'on peut qualifier de très élémentaire, nous sommes arrivés à construire une théorie d'une certaine ampleur, à prouver des résultats peu intuitifs, concernant des formes très générales.

Une théorie d'une certaine ampleur ; l'heuristique est à l'œuvre.

Nous avons pour la première fois parlé de mesures : c'était à propos des angles. Au rebours de la plupart des autres grandeurs, il existe pour les angles *des unités naturelles* : le tour complet, le demi-tour, le quart de tour, le sixième de tour. Au passage, nous avons aussi recouru au degré.

Des unités naturelles pour les angles

Nous n'avons pas défini la notion d'angle, nous contentant de sa conception quotidienne. Nous avons recouru à la somme de deux angles[21], obtenue en les juxtaposant de sorte qu'ils aient un côté en commun. De là, nous sommes passés à la somme de plusieurs angles.

Notions naïves d'angle et de somme d'angle

Avec la somme des angles d'un triangle, nous avons accepté qu'un angle puisse être plat. En additionnant les angles d'un polygone quelconque, nous sommes arrivés à des mesures dépassant celle de l'angle plat et même du tour complet. À ce stade, on ne reconnaît plus la notion naïve d'angle. C'est une difficulté dont il faut bien reporter la solution. En attendant, on comprend très bien ce que veut dire *la somme des angles d'un polygone*, même si l'on est forcé d'admettre qu'une telle somme n'est pas un angle au sens banal. On comprend tellement bien ce que cela veut dire que l'on est capable d'en déduire l'angle d'un polygone régulier quelconque. Cet objet mental fonctionne.

La notion d'angle atteint sa limite

[21] Abus de langage sans conséquence immédiate : il s'agit de la somme de deux grandeurs angulaires.

6 Les évidences et les preuves

Qu'est-ce qui fonde les connaissances géométriques que nous avons évoquées jusqu'à présent ?

Des évidences visuelles

Il y a tout d'abord ce que l'on peut appeler des *évidences visuelles.* Par exemple, les diagonales d'un rectangle divisent celui-ci en deux paires de triangles isocèles congruents. En effet, disposons le rectangle dans un plan frontal, symétriquement par rapport au plan de symétrie de l'observateur. La situation est totalement symétrique. La perception – et non l'analyse – de la symétrie, amène à constater que les diagonales sont égales et se coupent en leur milieu. Cette expérience de perception s'étend en imagination à tous les rectangles. Elle s'étend en outre d'un rectangle donné en position privilégiée à ce même rectangle en situation quelconque, moyennant une hypothèse implicite de conservation de la congruence : on sait par exemple que si on dessine une figure sur un carton, la figure ne change pas lorsqu'on déplace le carton[22].

Des convictions inductives

Deuxième exemple, qui relève plus de l'induction[23] que de l'évidence. On pave un morceau de plan avec des copies d'un triangle. On réalise que le pavage pourrait être prolongé autant qu'on veut. On constate visuellement que ce pavage est traversé par trois réseaux de droites parallèles. On répète l'expérience plusieurs fois avec des triangles différents et le résultat est le même. On a toute raison de croire, *par induction*, que ce résultat est général. Il est dont raisonnable de s'en servir dans des raisonnements ultérieurs. Un débutant ne voit pas de difficulté à cela. Un mathématicien ou un physicien averti examine la chose en termes plus critiques. Mais encore une fois, on ne s'initie pas à une science par ses fondements.

Par delà ces deux exemples de convictions expérimentales, on pourrait en donner une foule d'autres. Et nous voilà donc munis d'évidences ou de "certitudes" *en grand nombre.* D'une certaine façon, c'est tant mieux, car plus on a de connaissances, mieux on est à même d'en construire de nouvelles, en y accrochant des raisonnements. Une mémoire bien remplie de faits reliés entre eux favorise la mobilité de la pensée et la recherche des arguments.

Trop d'évidences et de convictions inductives ?

Mais serait-il possible que trop d'évidences encombre l'esprit ? Dans son ouvrage sur l'enseignement de la géométrie, G. Choquet

[22] Répétons que, pour nous, la géométrie des figures planes n'est pas la *géométrie du plan.* Non que celle-ci soit illégitime. Mais elle ne vient qu'en second, à un certain moment d'une réorganisation déductive. Amenée trop tôt, elle est un obstacle à la compréhension.

[23] Au sens des sciences de la nature.

[1964] écrit : "Je ne pense pas qu'il soit désirable, comme l'ont préconisé certains professeurs, de prendre au départ de très nombreux axiomes : le jeu mathématique basé sur trop de règles, devient complexe et prend une allure de fragilité et d'incertitude." Toutefois, cette prise de position concerne une présentation axiomatique de la géométrie aux élèves des classes scientifiques des lycées. Lorsque, comme c'est le cas pour nous, on est à la recherche des sources de la géométrie, on ne peut que constater l'abondance de celles-ci. Ce n'est pas au début d'une prise de conscience de la géométrie que l'on peut *privilégier* quelques évidences, pour en *déduire* une foule d'autres. Dans la mesure où, au départ, *prouver* c'est *amener à l'évidence*, prouver une évidence est une contradiction dans les termes. Bien plus tard, prouver une proposition voudra dire établir qu'elle dérive logiquement des axiomes. L'évidence de l'implication se substitue alors à l'évidence du fait.

Par delà les évidences et les "certitudes" inductives, que sont les preuves de la géométrie à son début ? Elles sont assez classiques : elles consistent en enchaînements (en implications) évidentes de propositions connues. Un seul exemple, déjà abordé à la section 5, devrait suffire à illustrer cette constatation banale.

Des enchaînements évidents d'évidences et de propositions connues

> On peut découper tout polygone régulier à n côtés en $(n-2)$ triangles (une évidence). Or, d'une part, la somme des angles de ces triangles égale la somme des angles du polygone : on le voit. Ensuite, la somme des angles de chaque triangle est un angle plat (on l'a vu). Donc, la somme des angles du polygone vaut $(n-2)$ angles plats. Etc., etc.

7 Les définitions

Autre question : quels sont ou peuvent être la nature et le statut des définitions dans la géométrie commençante ?

Dans notre exposé, jusqu'ici, nous avons rencontré des formes géométriques en allant des particulières, des plus symétriques, aux plus générales[24]. Nous avons commencé par le carré et avons, à la fin, pu dire quelque chose de polygones très généraux.

Du particulier au général

[24] De celles définies par le moins de paramètres, à celles définies par le plus de paramètres. Cet ordre d'entrée en matière est opposé à celui de J. Piaget et B. Inhelder [1947]. Pour ces auteurs, la géométrie commence (chez les enfants) par ce qu'ils appellent des *figures topologiques*, celles qui possèdent le plus petit nombre de propriété classiques.

À chaque moment de notre parcours, nous avons utilisé, explicitement ou implicitement, des définitions adaptées aux questions que nous traitions. Par exemple, nous n'avions pas besoin, avant de parler du carré ou du rectangle, de pouvoir situer ces deux formes dans la hiérarchie des quadrilatères : les convexes et les non convexes, les trapèzes éventuellement isocèles ou rectangles, les parallélogrammes éventuellement losanges, rectangles ou carrés, etc. Nos définitions s'excluaient mutuellement. Un carré n'était pas un rectangle et réciproquement, aucun des deux n'était un parallélogramme, et ainsi de suite. Pour nous donc, l'ensemble des quadrilatères était, pour l'essentiel, *partitionné*.

Des définitions adaptées à un registre de la pensée

Des concepts qui s'excluent mutuellement

C'est de la même manière que procède la langue commune dans son usage quotidien. Elle va droit aux termes désignant le plus directement les choses. Dans la majorité des circonstances de la vie, on n'a pas besoin de savoir qu'un chien est un mammifère ou un vertébré, ou qu'une chaise est un meuble. On agit et on se comprend le plus efficacement en utilisant le terme le plus particulier.

Lorsqu'on arrive assez loin dans la géométrie, il devient important de regrouper les carrés, les rectangles, les losanges et les parallélogrammes sous la dénomination générale de *parallélogramme.* Une raison mineure de cela est qu'il est plus facile d'écrire "*dans tout parallélogramme,* les diagonales se coupent en leur milieu", que "*dans tout carré, rectangle, losange et parallélogramme*, les diagonales se coupent en leur milieu." La raison profonde est que le parallélogramme au sens général conduit à la *relation d'équipollence* et à la notion de *vecteur*, base d'une reformulation essentielle de la géométrie. Ce qu'il y a de fascinant dans la géométrie (les géométries) constituée, c'est qu'elle établit des connexions extrêmement éclairantes entre des objets d'apparences très diverses. Mais cela n'est pas pour les débutants, et doit se conquérir. Apprendre un ordre établi (par d'autres) est moins stimulant qu'apprendre à mettre de l'ordre dans ses propres pensées.

Le parallélogramme au sens général conduit aux vecteurs.

Que dire alors de cette opinion des tenants des "mathématiques modernes" qui voulaient introduire le plus tôt possible les concepts clés des mathématiques constituées ? L'idée était de ne pas avoir à changer des concepts s'avérant inadéquats en cours de route. Un autre de leurs arguments était que les concepts définitifs, ceux qui fondent les mathématiques d'aujourd'hui, sont très simples.

Des concepts définitifs ?

Première réponse : ces concepts, ces objets mentaux, qui s'avèrent effectivement inadéquats en cours de route, ont commencé par être des concepts adéquats à une certaine étape de l'apprentissage.

Des concepts provisoires s'avèrent nécessaires.

Deuxième réponse : les principaux concepts clés tels que ceux de *relation, application, groupe* et d'autres analogues, renvoient chacun à un ensemble immense de choses que le sens commun juge disparates. Il est donc difficile d'en faire comprendre la portée si, comme on a essayé de le faire – et que pouvait-on faire d'autre dans cette optique ? – on les illustrait par quelques exemples simples, souvent naïfs et éloignés de l'expérience commune.

Abordée prématurément, une classe d'objets définie en peu de mots peut n'avoir que peu de sens.

Troisième réponse : qu'est-ce au fond qu'un concept ? En un sens étroit, c'est ce que décrit une définition et qui est susceptible, de ce fait, d'être engagé dans un raisonnement. En un sens large, c'est un *instrument de pensée*, un outil pour aider l'imagination à trouver des solutions, à avancer dans la connaissance. Dans cette optique, il rassemble une foule d'exemples qui l'illustrent, des liens qui le relient à d'autres dans des théories, son rôle dans des démonstrations, les pièges qu'il permet d'éviter. Il englobe ainsi ses raisons d'être. Il englobe les objets mentaux dont il est issu, le souvenir des erreurs qui ont motivé sa mise au point et qui, en quelque sorte, le font voir en creux. On voit par là que les concepts provisoires et les erreurs (significatives), sont non seulement inévitables, mais en outre indispensables à la construction d'une pensée active.

Concept au sens étroit et au sens large

Certains disent que les *préconceptions* des élèves sont des obstacles à l'apprentissage, et qu'*il faut donc les éviter, les combattre.* À quoi l'on devrait sans doute répondre qu'apprendre à faire des mathématiques, c'est s'intéresser à des classes d'objets de plus en plus générales et adapter ses concepts et ses théories pour les rendre efficaces dans ces nouveaux paysages. C'est difficile. Soit. Comme disait Bachelard, en substance, on n'apprend jamais que contre une connaissance antérieure. Choquet disait que les grandes structures mathématiques sont des machines-outils de la pensée. Ces machines sont à la base de l'activité mathématique avancée. Il faut apprendre à les construire par étapes[25], pour répondre aux nécessités d'une pensée en progrès.

Les concepts définitifs font souvent obstacle à l'apprentissage.

Une autre question se pose, celle de la *forme* des définitions. Dans l'avant-propos d'un livre destiné à l'instruction mathématique des instituteurs, G. R. Jensen [2003] annonce : "La première condition pour comprendre un concept est d'en avoir un définition claire [. . .] Une fois la définition choisie, nous prouvons en tant

[25] Ce qui n'implique pas que l'on reparcoure tous les méandres et que l'on explore toutes les impasses de l'histoire des mathématiques. Il y a des voies raisonnablement expéditives de la pensée commune vers les mathématiques constituées. Beaucoup d'épisodes historiques, mais non tous, peuvent aider à les dégager.

que théorèmes l'équivalence des définitions alternatives." Question : faut-il s'en tenir ainsi à des définitions minimales ou quasi minimales ? Faut-il dire,

Des définitions sobres ou redondantes ?

> un parallélogramme est un quadrilatère qui a deux paires de côtés parallèles,

ou bien, *en faisant état de connaissances acquises,*

> un parallélogramme est un quadrilatère qui a deux paires de côtés parallèles, deux paires d'angles opposés égaux, des diagonales qui se coupent en leur milieu et qui le divisent en deux paires de triangles congruents ; on peut paver le plan avec des copies d'un parallélogramme quelconque, etc.

Le bon usage des définitions minimales

Lorsqu'on a décidé de reconstruire déductivement une théorie mathématique, il est bon d'adopter le plus souvent des définitions minimales, car ce que l'on veut savoir alors se résume à ceci : *qu'est-ce qui dépend de quoi ?* Par contre, lorsqu'on *commence* à explorer le monde des formes et des grandeurs, autant décrire chaque objet avec assez de détails pour en donner une idée précise, ce qui enrichit la pensée et facilite son exercice.

Pour prendre un exemple dans le quotidien, comparons les définitions du terme *papillon* dans deux dictionnaires.

> Papillon : insecte lépidoptère sous la forme adulte. (Le Petit Robert [2007]).
>
> Papillon (*butterfly*) : membre d'un grand groupe d'insectes (ordre des lépidoptères), actifs de jour[26], possédant une trompe aspirante, un corps élancé, des antennes filiformes se terminant par une protubérance, et quatre ailes membraneuses, larges et le plus souvent brillamment colorées. (Webster's New World Dictionary [1984])

La première des deux définitions cadre avec l'entreprise essentiellement scientifique de classement des espèces. La seconde donne une bonne idée de ce qu'est un papillon.

8 Les constructions

Des formes données aux formes à construire

Jusqu'à présent, nous n'avons parlé que de formes géométriques

[26]Visiblement, les papillons de nuit ne sont pas des *butterflies*.

toutes faites, et non de formes à construire. Passons maintenant à cette étape ultérieure de la géométrie où l'on construit des formes, soit d'après un modèle, soit d'après une description ou une définition.

Construire une forme, c'est enchaîner des *opérations élémentaires* choisies et organisées pour aboutir au résultat. Il y a quasiment toujours plusieurs suites d'opérations possibles. Chaque opération mobilise un ou plusieurs instruments. Ceux-ci sont nombreux : la règle graduée ou non, un fil que l'on tend, le cordeau du jardinier, l'équerre, la corde à treize nœuds, un papier que l'on plie, le compas, deux piquets reliés par un fil pour tracer un cercle sur le terrain, le rapporteur, le goniomètre, etc. Il est intéressant, dans une première approche de la géométrie, de n'en exclure aucun, car chacun est porteur d'une signification géométrique qui lui est propre. L'usage des instruments développe des intuitions utiles.

Une suite d'opérations élémentaires

Chaque instrument a sa signification et son rôle.

Qui plus est, la plupart sont adaptés à un certain ordre de grandeur des figures à réaliser. Par exemple, une règle, une équerre et un compas ordinaires permettent de travailler sur une feuille de papier, mais seraient inutiles pour dessiner le contour d'un terrain de sport rectangulaire ou celui d'un étang circulaire. En outre, lorsqu'on dessine sur une feuille de papier, on voit chaque figure dans sa totalité et dans sa forme véritable, ce qui vient au secours de l'intuition. Au contraire, un très grand rectangle ou un très grand cercle, comme ceux évoqués ci-dessus, ne sont jamais perçus respectivement comme un rectangle ou un cercle, sauf éventuellement depuis un hélicoptère. Pour les tracer, on ne peut donc recourir qu'à leurs propriétés géométriques et à celles des instruments, et il faut les coordonner.

Des formes petites ou grandes

Il faut bien apprendre les opérations usuelles pour tracer ces formes. En voici quelques-unes : tracer une droite passant par deux points, par un point tracer une parallèle ou une perpendiculaire à une droite, déterminer le milieu d'un segment, tracer un cercle passant par deux points, etc.

Exemples d'opérations élémentaires

Une première modalité de construction consiste à reproduire une figure donnée, ce qui peut se faire sans recours – au moins explicite – au langage. Nous l'avons vu ci-dessus, il y a en général plusieurs façons de répondre à la consigne. Il faut bien prendre la figure *par un bout* et commencer par en reproduire une partie. Au fur et à mesure de l'avancement du travail, on revient au modèle, on l'analyse pour choisir la ou les opérations suivantes. C'est principalement l'intelligence pratique[27] qui est sollicitée : à chaque étape,

L'intelligence des situations

[27] Appelée aussi *intelligence des situations*, voir H. Wallon [1970].

une appréhension globale de la situation conduit à coordonner la vue du détail à réaliser et le choix de l'instrument approprié.

On réalise la construction en s'appuyant sur *certaines propriétés particulières* de la forme, et l'on s'aperçoit à la fin que celle-ci est déterminée par ces seules propriétés. Si, comme nous l'avons expliqué ci-dessus en parlant des définitions, on identifie la forme à un paquet éventuellement très riche de propriétés, on constate que les quelques propriétés utilisées pour la construction entraînent toutes les autres. Reconnaître, selon les choix que l'on a fait pour la construction, des jeux de *propriétés déterminantes*, installe dans l'esprit des implications obtenues empiriquement, utilisables dans d'autres constructions ou situations. Par exemple, si un quadrilatère possède trois angles droits, il est rectangle, ou encore si un triangle a deux côtés égaux, il a aussi deux angles égaux.

Des propriétés déterminantes

Une autre modalité de construction consiste non plus à reproduire une forme que l'on a sous les yeux, mais bien à dessiner une forme évoquée par son nom, ou spécifiée par une définition ou une description. Quand le langage et les symboles se trouvent ainsi au départ de l'entreprise, le choix et l'ordre des opérations sont déterminés d'abord au niveau de l'intellect, c'est-à-dire des concepts et des intuitions mémorisées. Les conditions déterminantes s'expriment en phrases sous la forme d'implications. Celles-ci se rattachent, plutôt qu'à des axiomes au sens usuel, à des conditions pratiques d'exécution : si je fais ceci puis cela, j'obtiens tel résultat.

Construire d'après une consigne verbale

Terminons par quelques remarques générales à propos des constructions.

D'abord, nous n'avons pas traité des constructions dans l'espace, ce qui aurait allongé démesurément l'exposé. En mobilisant des outils et des méthodes qui leur sont propres, et qui ont pourtant un lien avec les figures planes, ces constructions jouent aussi un rôle crucial dans la constitution de la pensée géométrique.

En expliquant ce qui distingue les constructions en grand, sur le terrain, des constructions sur papier, nous avons identifié un rôle nouveau des perceptions dans l'apprentissage de la géométrie : on construit plus facilement une forme dont on a une vue fidèle qu'une autre que l'on voit déformée.

Les perceptions jouent toujours un rôle.

Les constructions ne sont pas des actes intellectuels purs. Ce sont des actions. Elles mobilisent et mettent en évidence, à travers les instruments, les mouvements canoniques de glissement, rotation et retournement.

Des actions, la pensée heuristique

Les constructions mobilisent la pensée heuristique, puisqu'il faut bien, pour chacune, argumenter et contrôler un mode opératoire.

Chaque construction s'appuie ou non sur des mesures. Le savoir géométrique mobilisé est très différent selon le cas.

Enfin, nous n'avons toujours recouru à aucun concept de fondement. On conçoit des constructions et on les réalise avec le plus de précision possible sans avoir à disserter des points idéaux, des droites idéales, de l'unicité de la parallèle menée par un point à une droite donnée, etc. Répétons-le, quitte à lasser le lecteur : toute reconstruction déductive globale de la géométrie est postérieure à son acquisition première.

Pas encore de concepts de fondement

9 Quelle géométrie pour les instituteurs ?

Arrêtons ici notre analyse de la géométrie commençante. Est-ce cela qu'il faut enseigner aux futurs instituteurs ? On a raison de dire que tout enseignant primaire devrait en savoir plus que le programme assigné, en l'occurrence plus que la géométrie de l'école élémentaire. Toutefois, *la première chose* qu'il doit bien connaître est précisément cette géométrie commençante, avec ses sources, sa richesse et ses difficultés. Or on n'apprend pas cela en partant des mathématiques constituées. Cette observation mérite d'être étayée par une longue citation (cf. A. Tucker et coll. [2001]).

> La clé pour amener les futurs instituteurs, même lorsqu'ils ne sont pas bien préparés, à penser mathématiquement, est de travailler à partir de *ce qu'ils savent effectivement* – les idées mathématiques qu'ils ont, leurs capacités, et les contextes correspondants – de sorte qu'ils puissent se rendre d'où ils sont vers où ils doivent aller. Pour leurs formateurs, cela requiert qu'ils s'efforcent de comprendre comment leurs étudiants pensent. Les habitudes scientifiques d'abstraction et de démonstration déductive ont peu de rapport avec la façon dont chacun de nous pénètre dans l'univers des mathématiques, à savoir par l'expérience, en construisant nos concepts par l'action. Et c'est là que les cours de mathématiques pour instituteurs doivent *commencer*[28], d'abord en les aidant à saisir le sens des objets mathématiques étudiés – sens qui a souvent manqué dans leur propre instruction primaire –, et seulement après en progressant vers

[28]Nous soulignons.

des ordres plus élevés de généralité et de rigueur.

Dans cet article, nous avons montré – en ce qui concerne la géométrie – ce à quoi pourrait ressembler cette première étape de l'apprentissage. Tous les auteurs ne partagent pas notre point de vue, quelle que soit par ailleurs la qualité de leurs ouvrages. Dans plusieurs livres récents destinés à la formation mathématique des instituteurs, on trouve, dès l'introduction de la géométrie, des concepts de fondement tels que les points sans dimension, les droites et les plans idéalisés, non bornés, infiniment fins, ... (voir S. Beckmann [2005], G. R. Jensen [2003], X. Rœgiers [2000], Fr. Cerquetti-Aberkane [2001]). Dans pas mal d'ouvrages aussi, on trouve un traitement précoce et central des définitions et du classement des polygones. Tel est le cas des ouvrages cités de S. Beckmann et X. Roegiers, ainsi que de G. Bolondi [2004].

Appendice.

La forme et la grandeur d'un objet sont des propriétés de la classe des objets congruents à celui-ci. On peut alors se demander ce qu'est au juste la congruence. On serait tenté de dire que deux objets sont congruents s'ils ont même forme et même grandeur. Mais affirmer cela, ce serait accepter un cercle vicieux. Il faut donc chercher ailleurs.

Dans la vie quotidienne, certaines classes d'objets sont superposables, éventuellement en pensée[29] : par exemple les chaises d'un même salon ou les tasses d'un même service. La possibilité de superposer deux objets ne s'évanouit pas lorsqu'on les écarte l'un de l'autre, puis qu'on les rapproche. Une expérience de superposition réussie peut être répétée. On acquiert confiance dans le fait qu'on peut superposer certains objets. Il y a là un phénomène de conservation à la Piaget. Tel n'est pas le cas pour certains autres objets, par exemple ceux qui sont en caoutchouc ou qui ont une consistance pâteuse. Poincaré a écrit : “Si donc il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie.”

[29] Dans la suite de cet appendice, *superposable* veut dire *superposable éventuellement en pensée*. On déclare que deux objets sont superposables en pensée en s'appuyant sur des perceptions le plus souvent visuelles et parfois aussi tactiles.

Bibliographie

S. Beckmann, *Mathematics for elementary teachers*, Pearson-Addison Wesley, Boston, 2005.

G. Bolondi, *La matematica nella scuola di base*, Pitagora, Bologne, 2004.

Fr. Cerquetti-Aberkan, *Enseigner les mathématiques à l'école*, Hachette, Paris, 2001.

G. Choquet, *L'enseignement de la géométrie*, Hermann, Paris, 1964.

Chr. De Block-Docq, Modalités de la pensée mathématique d'élèves de douze ans devant des problèmes de pavage, in *Educational Studies in Mathematics*, **27**, 1994 ; pages 165-189.

H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task*, D. Reidel, Dordrecht, 1973.

H. Freudenthal, *Didactical phenomenology of mathematical structures*, D. Reidel, Dordrecht, 1983.

GEM, *Fouetter un chat avec une droite*, Groupe d'Enseignement Mathématique, Louvain-la-Neuve, 1981.

G. R. Jensen, *Arithmetic for teachers, with applications and topics from geometry*, American Mathematical Society, Providence, 2003.

L. Lismont et N. Rouche coord., *Formes et mouvements, perspectives pour l'enseignement de la géométrie,* CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), Nivelles, 2001.

E. Mach, *L'analyse de sensations, le rapport du physique au psychique*, trad. F. Eggers et J.-M. Monnoyer, Éditions Jacqueline Chambon, Nîmes, 1996 ; original allemand 1886.

J. Piaget et B. Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant,* Presses Universitaires de France, Paris, 1947.

I. Rock, *Orientation and form,* Academic Press, Londres, 1973.

X. Roegiers, *Les mathématiques à l'école primaire,* tome 2, De Boeck, 2000.

N. Rouche et al., *Du quotidien aux mathématiques,* vol. 1 *Nombres, grandeurs, proportionnalité*, vol. 2 *Géométrie,* Ellipses, Paris, 2006 et 2008.

A. TUCKER et coll., *The mathematical education of teachers*, American Mathematical Society, Providence, 2001.

H. WALLON, *De l'acte à la pensée, essai de psychologie comparée*, Flammarion, Paris, 1970.

Contents