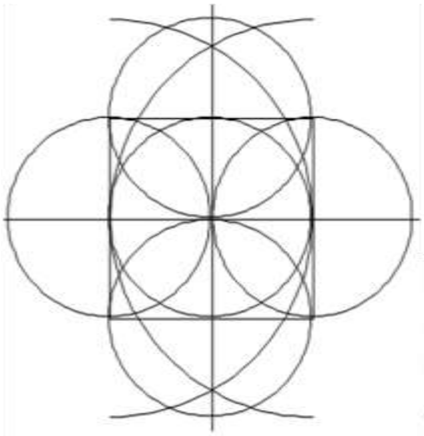
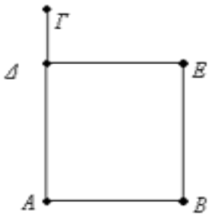
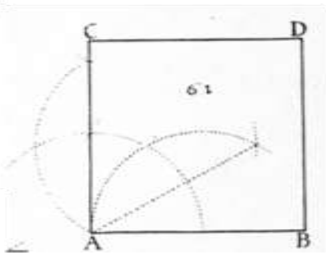
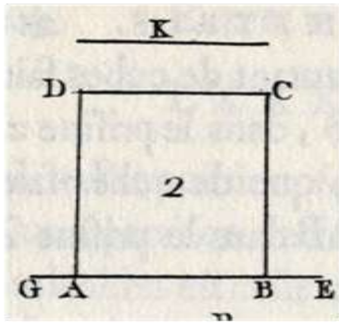
GÉOMETRIES :

DIFFÉRENTES MANIÈRES DE LES ENSEIGNER









les *sulbasutras* (Inde védique)

les *Éléments* de géométrie d'Euclide

géométrie et practique d'icelle de Marolois

les *Elémens de géométrie* de Clairaut

En fait, il s'agit de montrer différentes formes, algorithmique, déductive, pratique, inductive, problématisée, à travers l'étude d'exemples. Le thème commun sera la construction d'un carré

les sulbasutras

sanskrit

rédigés vers le VIII^{e} siècle avant notre ère

Nord/Nord-Ouest de l'Inde actuelle

transmission est orale très méticuleuse

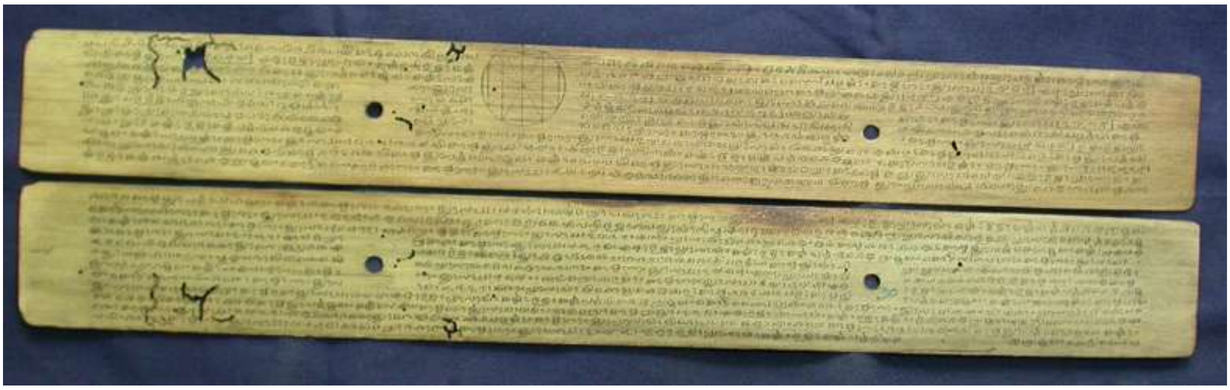
Lors de chaque cérémonie (sacrifice), les autels sont construits puis détruits. Il n'y a pas de temples.

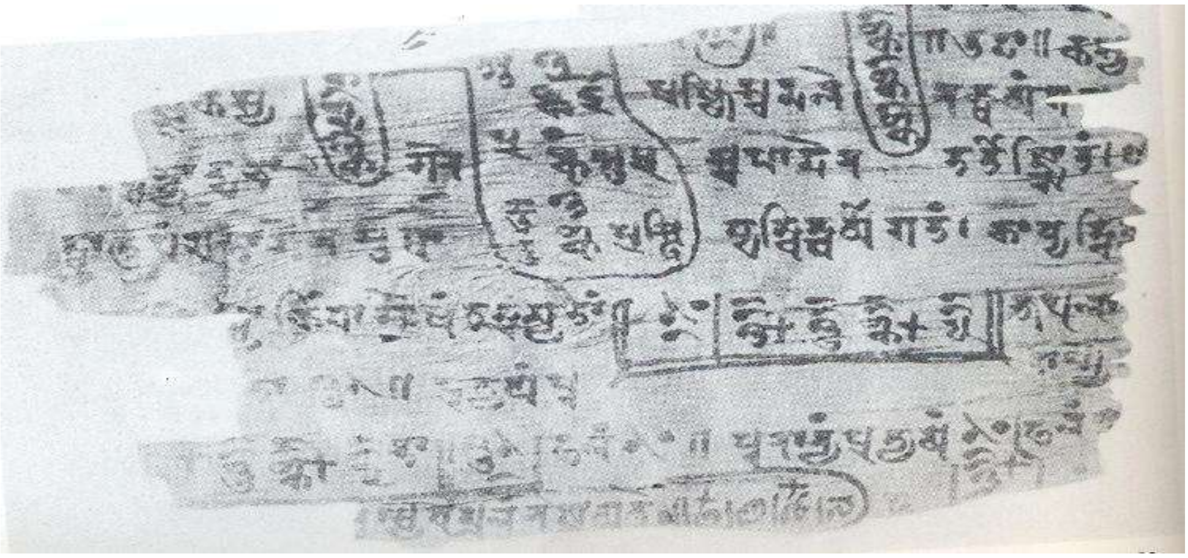
hymnes au *purusa* (homme)

textes sont volumineux

On connaît quatre traités, datés entre le VIII^{e} siècle et le III^{e} siècle avant notre ère. On les nomme *Baudhayana*, *Manava*, *Apastamba* et *Katyayana*

Photos de manuscrits (article Agathe Keller, site culture maths)
Sulbasutras + commentaires





Une image du manuscrit de Bhakshâlî.
(article Agathe Keller, site culture maths)

Traités manuscrits plus tardifs : Aryabhattya (≈ 500), Bhaskara I (VII^{e} sicle), Bhaskara II (XII^{e} siècle)

sulba signifie "corde" et vient de *sulb* (= " mesurer") ; *sutra*, à l'origine veut dire "fil", "cordon d'une amulette

Grèce ≠ Inde : esprit, public, évolution
les techniques sont décrites, les règles sont énoncées. La validation de la méthode est la construction elle-même.
livre de recettes
Il n’y a pas d’initiative personnelle, pas de réflexion géométrique, pas de prise de décision, pas d’argumentation.

Les textes vont permettre de :
- construire un carré à l'aide de cordes,

- transformer un carré en rectangle, un rectangle en carré (quadrature), un rectangle en triangle, trapèze ou losange, un carré en cercle (circulature), un cercle en carré (quadrature), &c …

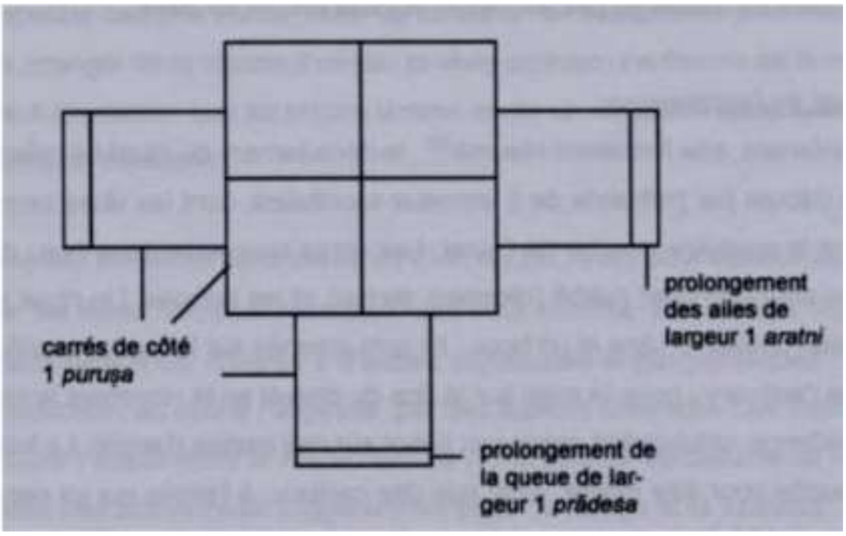
Lors des sacrifices, les autels sont augmentés en taille de jour en jour.
Les textes décrivent donc aussi la manière d'agrandir, réduire, partager ; de faire des sommes d'aires ; de faire des différences d'aires (transformer un gnomon en carré). Ces trois constructions permettent de passer d’une unité à une autre, de même forme. On peut alors obtenir une nouvelle unité, carrée.

Notons tout d’abord quelques unités utilisées :

- 1 angula : largeur d'un doigt
- 4 angulas : largeur de 4 doigts posés à plat
- 1 pradesa = 12 angulas : longueur située entre le pouce et l'index
- 1 vitasti = 13 angulas : longueur située entre le pouce et l'auriculaire
- 1 pada = 15 angulas : longueur d'un pied
- 1 aratni = 24 angulas : longueur entre le coude et le bout des doigts
- 1 purusa = 120 angulas : longueur entre les talons et le bout des doigts d'un homme debout les bras levés.

La forme des autels :

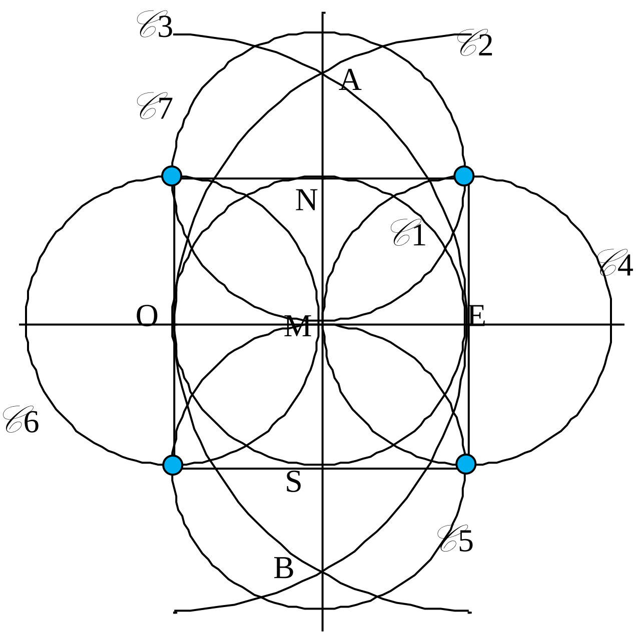
Figure 1 : exemple de forme d’autel.



Constructi

I-4 (numérotation des Sutras suivant Sen&Bag) Si l’on veut un carré, une méthode est de prendre une corde de longueur égale au carré donné, faire des nœuds aux deux extrémités et une marque en son milieu. On trace la ligne et on plante un piquet en son milieu. On fixe les deux nœuds au piquet et on trace un cercle avec la marque. Deux piquets sont plantés aux deux extrémités du diamètre. Un nœud étant fixé à l’est, on trace un cercle avec l’autre ; la même chose à l’ouest. Le second diamètre est obtenu des points d’intersection de ces deux ; on plante deux piquets aux deux extrémités du diamètre. Avec deux nœuds fixés à l’est, on trace un cercle avec la marque ; on fait la même chose au sud, à l’ouest et au nord. Les points d’intersection donnent le carré

figure 2 : Construction d’un carré à l’aide de cordes et de piquets :



« Maintenant une autre. Faire des nœuds aux deux extrémités d'une corde de deux fois la mesure et faire une marque au milieu. C'est pour la ligne est-ouest. Sur l'autre moitié, à une distance plus courte d'un quart, faire une marque appelée *nyancana*, puis une marque au milieu pour les coins. Les deux nœuds fixés aux deux extrémités de la ligne est-ouest, tendre la corde vers le sud par la *nyancana* ; la marque du milieu détermine les coins est et ouest (épaules et cuisses, d'après une traduction de J-M Delire). »

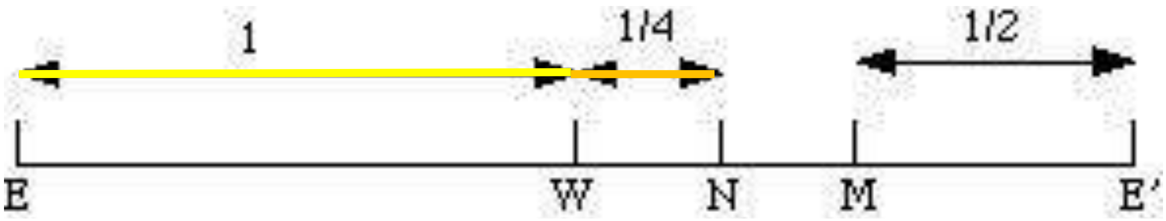


Figure 3 : marques tracées sur une corde de longueur 2.
(figure empruntée à l'article de KELLER Olivier, *Repères IREM*, n°40, p.119)

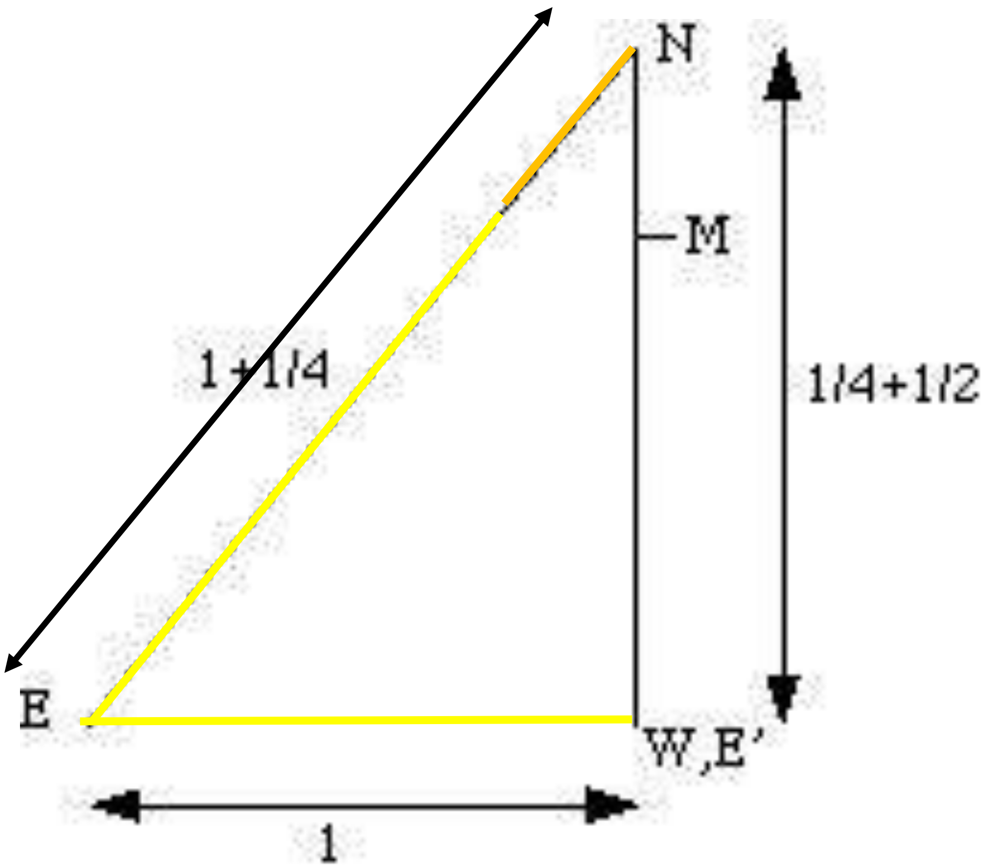
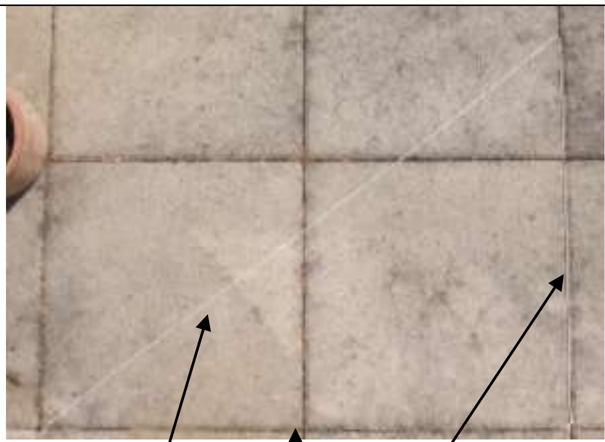


Figure 4 : construction d'un carré à l'aide d'une corde de longueur 2.
(figure empruntée à l'article de KELLER Olivier, *Repères IREM*, n°40, p.119)
(remarque : cette construction est fausse car le 1/2 vertical est aussi grand que le 1 horizontal !!....l'art du mathématicien est, dit-on, de raisonner juste sur une figure fausse !!)

Corde pliée pour marquages
1/2+1/4+1/4
1 = largeur de 2 carreaux
1/2 = largeur de 1 carreau



Construction d'un carré à l'aide d'une corde de longueur 2
1+1/4 ; 1 ; 1/4+1/2.

Figures 5 et 6 : pliage de la corde de longueur 2 pour marquer à 1 ; ½ ; ¼ ; ¼.
Construction d'un carré à l'aide d'une corde de longueur 2

Cette construction n'est pas sans rappeler le triangle rectangle dont les longuerus des côtés sont 3 ; 4 ; 5. Ici, les longueurs sont 3/4 ; 4/4 ; 5/4.

Bibliographie :

DEDRON Pierre, ITARD Jean. *Mathématiques et mathématiciens*, Paris : Magnard, 1979.

DELIRE Jean-Michel. *Vers une édition critique des* Sulbadipika *et* Sulbamimamsa, *commentaires du* Baudhayana *Sulbasutra*, Bruxelles : Université Libre de Bruxelles, mai 2002, p. 85-122 et p. 28-33 de l'annexe 1.

KELLER Olivier. *Préhistoire de la géométrie*, Université de Nantes, centre F.Viète 1995 Sciences et Techniques en perspective, volume 33.

KELLER Olivier. *Aux origines de la géométrie, le paléolithique*, Paris : Vuibert, 2004.

KELLER Olivier. *La figure et le monde, une archéologie de la géométrie*, Paris : Vuibert, 2006.

KELLER Olivier. « La géométrie des Sulbasutras ». In *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique, de la maternelle à l'université,* Troisième université d'été européenne. Louvain la Neuve Leuven 1999, p.359 à 371

MORICE-SINGH Catherine *le calcul et la géométrie dans l'Inde ancienne et médiévale,* ARCHIMEDE 2005

RACINE Marie-Noëlle, « Géométries : différentes manières de les enseigner » In BARBIN Evelyne (dir) *Histoire et enseignement des mathématiques,* Lyon. INRP 2007

la géométrie d'Euclide

Nos sources : Pappus et Proclus.
Pappus, né vers 300, mort en 350, *collection mathématique*.
Proclus, né en 412, mort en 486, *commentaires sur le premier livre des Éléments* d'Euclide
Les commentaires sont donc assez tardifs

Euclide est célèbre pour ses *Éléments*
Ce texte a été abondamment recopié, traduit, édité, commenté. On dénombre 400 à 500 manuscrits des *Éléments* et plus de 1 000 éditions imprimées !

Les *Éléments* se composent de treize livres :

- les quatre premiers sont des livres de géométrie :

  Dans le livre I, on compte pas moins de trente-cinq définitions, six demandes, neuf notions communes, et enfin, quarante-huit propositions parmi lesquelles on peut citer la proposition 46 dans laquelle il décrit la manière de construire un carré et où il valide cette construction à l'aide de propositions antérieures. Mais on peut surtout citer la proposition 47, notre fameux *théorème de Pythagore*.

  Dans le livre II, ce sont des études d'équivalences de rectangles que l'onpeut traduire par des égalités algébriques. C'est la base de raisonnements d'algèbre-géométrique,

  le livre III parle de cercles

  et le livre IV de polygones réguliers inscrits.

- Le livre V parle des proportions entre les grandeurs.
- Le livre VI est une application du livre V à la géométrie plane. C'est dans ce livre que nous trouverons la proposition 31 que nous qualifierions de *Pythagore généralisé.*
- Les livres VII, VIII, IX sont des livres d'arithmétique (c'est dans le livre VII, propositions I et II que l'on trouve le fameux algorithme d'Euclide).
- Le livre X parle d'irrationnels.
- Les livres XI, XII sont sur l'espace.
- Le livre XIII traite de l'inscription dans un cercle ou dans une sphère de polygones ou de polyèdres réguliers.

Dans ses *Éléments*, Euclide ne présente pas ses méthodes de découverte, leur forme est plutôt synthétique.

Voici quelques exemples de définitions, demandes, notions communes, propositions du livre I (d'après traduction de Peyrard).

LE PREMIER LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE (extraits)

DEFINITIONS.

1. Le point est ce dont la partie est nulle.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.
5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
….
10. Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit ; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.
….

DEMANDES.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.
…

NOTIONS COMMUNES.

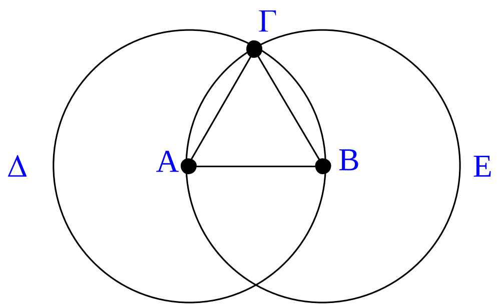
1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.
2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.
…

Les définitions, demandes et notions communes étant énoncées, le discours, l'enchaînement des propositions, va pouvoir se dérouler, s'auto alimenter.

PROPOSITION PREMIERE.
***Enoncé**. Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.*

***Exposition**. Soit AB une droite donnée et finie. Il faut construire sur la droite finie AB un triangle équilatéral.*
***Détermination**. Du centre A et de l'intervalle AB, décrivons la circonférence ΒΓΔ (demande 3) ; et de plus, du centre B et de l'intervalle BA, décrivons la circonférence ΑΓΕ ; et du point Γ, où les circonférences*

se coupent mutuellement, conduisons aux points A, B les droites ΓA, ΓB (demande 1).



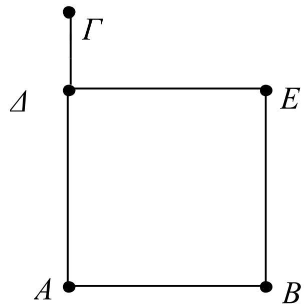
Démonstration. *Car, puisque le point A est le centre du cercle BΓΔ, la droite AΓ est égale à la droite AB (définition 15) ; de plus, puisque le point B est le centre du cercle AΓE, la droite BΓ est égale à la droite BA ; mais on a démontré que la droite ΓA était égale à la droite AB ; donc chacune des droites ΓA, ΓB est égale à la droite AB ; or, les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (notion commune 1) ; donc la droite ΓA est égale à la droite ΓB ; donc les trois droites ΓA, AB, BΓ sont égales entre elles.*

Conclusion. *Donc le triangle (définition 24) est équilatéral, et il est construit sur la droite donnée et finie AB. Ce qu'il fallait faire.*

Voyons maintenant comment Euclide propose de construire un carré de côté donné. Cette proposition arrive (seulement) en position 46.

PROPOSITION XLVI.
Décrire un quarré avec une droite donnée.

Soit AB la droite donnée ; il faut décrire un quarré avec la droite AB. Du point A, donné dans cette droite, conduisons AΓ perpendiculaire à AB (proposition XI) ; faisons AΔ égal à AB (proposition III) ; par le point Δ conduisons ΔE parallèle à AB (proposition XXXI) ; et par le point B conduisons BE parallèle à AΔ.

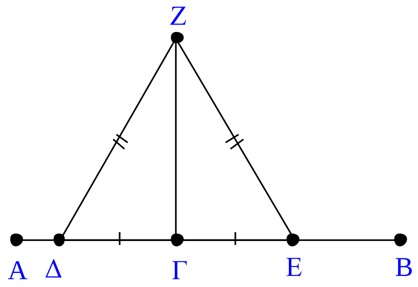


La figure AΔEB est un parallélogramme ; donc AB est égal à ΔE, et AΔ égal à BE. Mais AB est égal à AΔ ; donc les quatre droites BA, AΔ, ΔE, EB sont égales entr'elles ; donc le parallélogramme AΔEB est équilatéral. Je dis aussi qu'il est rectangle. Car puisque la droite AΔ tombe sur les parallèles AB, ΔE, les angles BAΔ, AΔE sont égaux à deux droits (proposition XXIX) ; mais l'angle BAΔ est droit ; donc l'angle AΔE est droit aussi. Mais les côtés et angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux (proposition XXXIV) ; donc chacun des angles opposés ABE, BEΔ est droit ; donc le parallélogramme AΔEB est rectangle ; mais nous avons démontré qu'il est équilatéral ; donc le parallélogramme AΔEB est un quarré, et il est décrit avec la droite AB ; ce qu'il fallait faire.

Autrement dit, Euclide commence par énoncer ce qu'il propose de faire. Il expose et décrit la construction. Puis il valide cette construction en démontrant que l'on obtient bien un carré. Pour cela, dans un premier temps, il requiert les propositions 3 ; 11 ; 29 ; 31 ; 34.
Si nous voulons continuer les justifications, il nous faut lire chacune de ces propositions et regarder quelles sont leurs justifications.

PROPOSITION XI.
A une droite donnée, et à un point donné dans cette droite, mener une ligne droite à angles droits.

Soit AB une droite donnée, et Γ le point donné dans cette droite ; il faut du point Γ mener à la droite AB une ligne droite à angles droits.

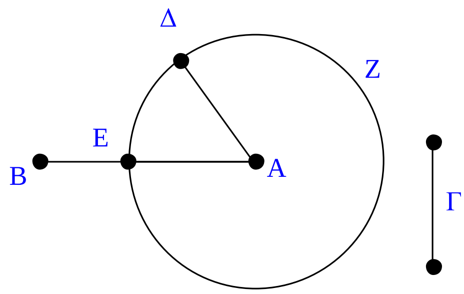


Prenons dans la ligne droite ΑΓ un point quelconque Δ, faisons ΓΕ égal à ΓΔ (proposition III), construisons sur ΔΕ le triangle équilatéral ΖΔΕ, et joignons ΖΓ ; je dis que la droite ΓΖ est menée à angles droits à la droite ΑΒ du point Γ donné dans cette droite. Car puisque la droite ΓΔ est égale à la droite ΓΕ, et que la droite ΓΖ est commune, les deux droites ΔΓ, ΓΖ sont égales aux deux droites ΕΓ, ΓΖ, chacune à chacune ; mais la base ΔΖ est égale à la base ΖΕ ; donc l'angle ΔΓΖ est égal à l'angle ΕΓΖ (proposition VIII) ; mais ces deux angles sont de suite, et lorsqu'une droite placée sur une droite fait les angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit (définition 10) ; donc chacun des angles ΔΓΖ, ΖΓΕ est droit. Donc la ligne droite ΖΓ a été menée à angles droits à la droite donnée ΑΒ du point Γ donné dans cette droite.

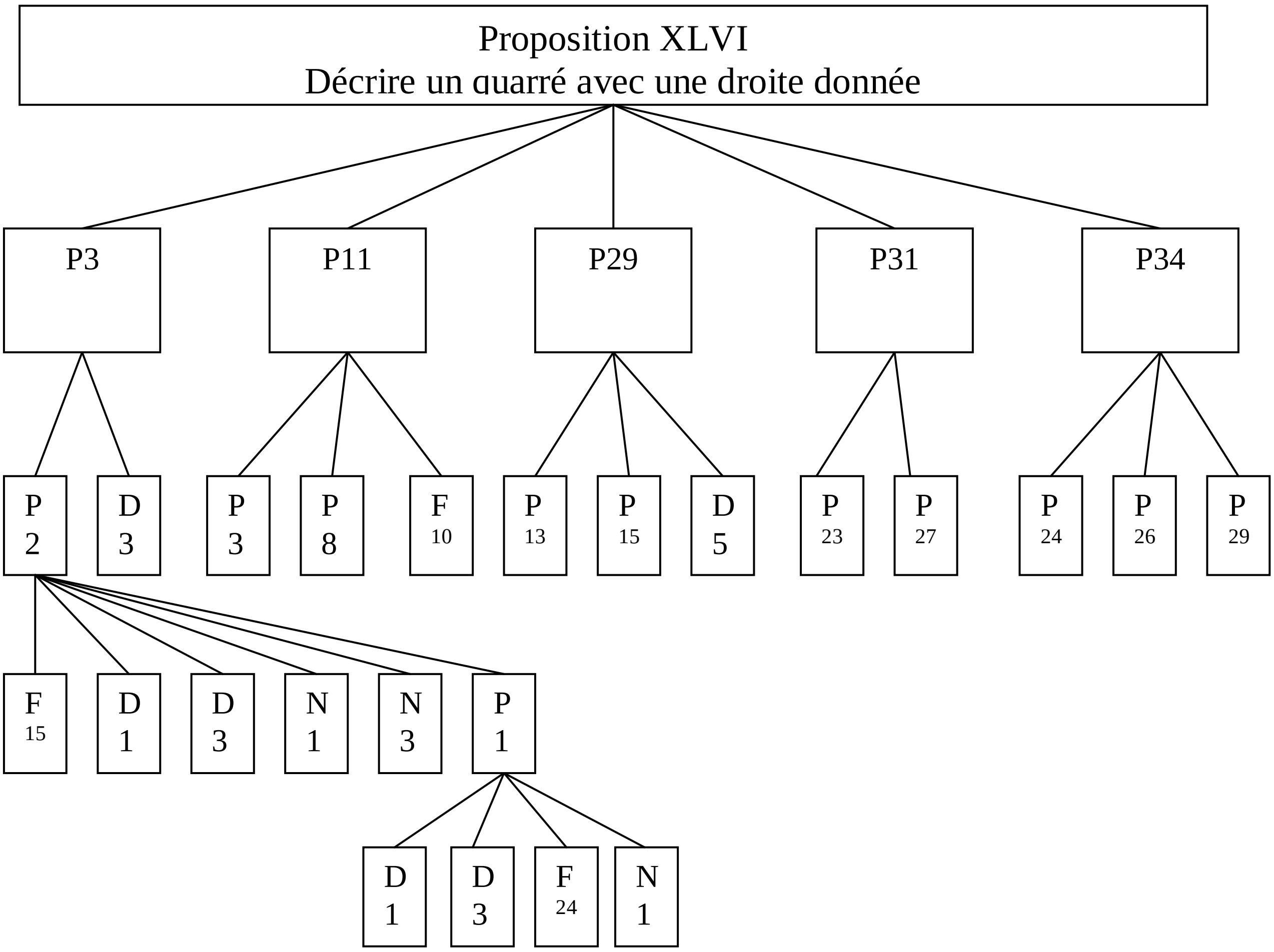
PROPOSITION III

Deux droites inégales étant données, retrancher de la plus grande une droite égale à la plus petite.

Soient ΑΒ, Γ les deux droites inégales données, que ΑΒ soit la plus grande ; il faut de la plus grande ΑΒ retrancher une droite égale à la plus petite Γ.



Au point Α plaçons une droite ΑΔ égale à Γ (proposition II), et du centre Α et de l'intervalle ΑΔ, décrivons le cercle ΔΕΖ (demande 3). Puisque le point Α est le centre du cercle ΔΕΖ, ΑΕ est égal à ΑΔ ; mais Γ est égal à ΑΔ ; donc chacune des droites ΑΕ, Γ, est égale à la droite ΑΔ ; donc la droite ΑΕ est égale à la droite Γ. Donc les deux droites inégales ΑΒ, Γ, étant données, on a retranché de la plus grande ΑΒ une droite ΑΕ égale à la plus petite Γ. Ce qu'il fallait faire


Proposition XLVI
Décrire un quarré avec une droite donnée
P3
P11
P29
P31
P34
P 2
D 3
P 3
P 8
F 10
P 13
P 15
D 5
P 23
P 27
P 24
P 26
P 29
F 15
D 1
D 3
N 1
N 3
P 1
D 1
D 3
F 24
N 1

Rigueur ? jusqu'où ?

travail démonstratif est utile

obéissance et référence aux textes d'une part, autonomie et liberté relative d'autre part.
Les méthodes déductives demandent des facultés d'analyse puis de synthèse que tout le monde n'a pas. Il est important de développer ces capacités chez nos élèves, futurs citoyens, sans toutefois tomber dans un excès de rigueur qui pourrait davantage freiner la réflexion que la stimuler.
Mais même avec ces méthodes déductives, lorsqu'un problème ne peut être résolu à partir de la théorie mise en place, pour progresser, il y aura besoin de transgresser, mettre en doute les prémisses admises. Je pense aux géométries non euclidiennes qui ont pu se développer lorsqu'on a mis en doute les axiomes d'Euclide, je pense aux espaces de dimensions supérieures à 3 qui n'ont pu naître dans l'esprit de mathématiciens que lorsqu'on a osé mettre en doute les hypothèses aristotéliciennes.

Bibliographie

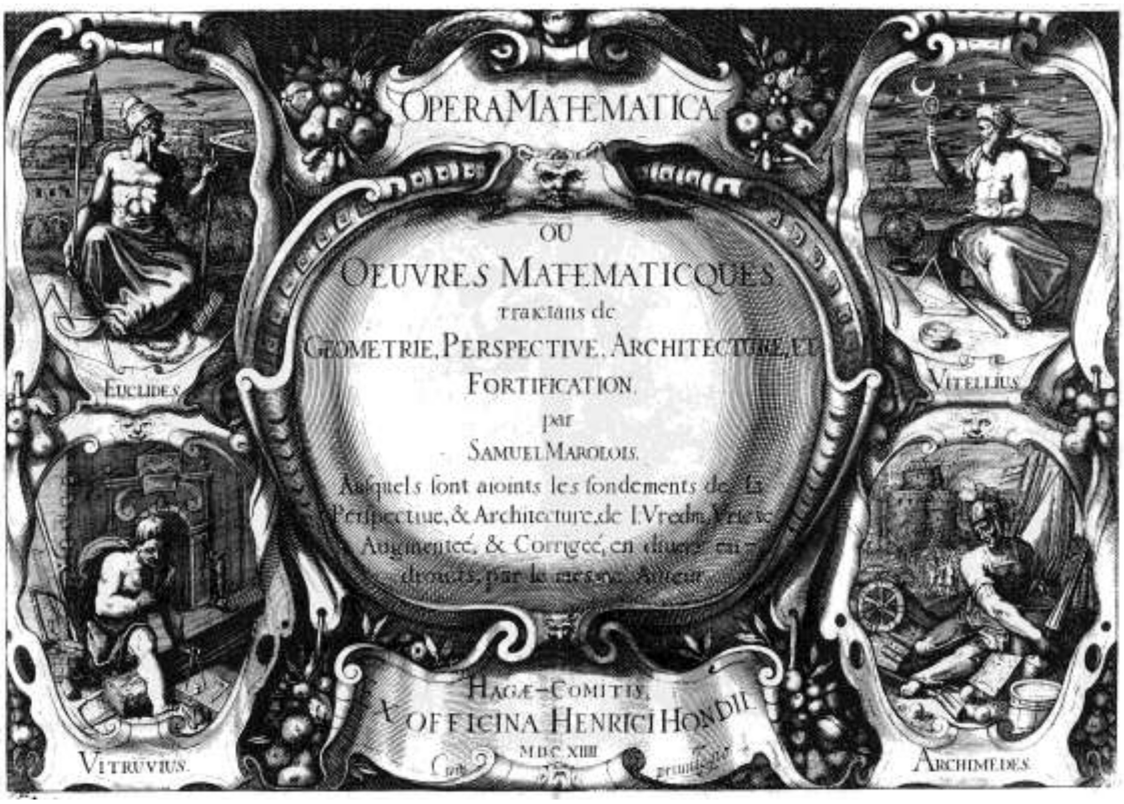
BARBIN Evelyne. « Trois démonstrations pour un théorème de géométrie élémentaire. Sens de la démonstration et objet de la géométrie ». In IREM de Besançon, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Besançon : IREM de Besançon, 1990, p. 57 –79.
CHASLES Michel. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 3ème édition, Gauthiers Villars 1889.
DEDRON Pierre, ITARD Jean. *Mathématiques et mathématiciens*, Paris : Magnard, 1979.
EUCLIDE. *Les œuvres d'Euclide*, Paris : Réédition Blanchard, 1993, p. 1 à 38 ; traduction PEYRARD François.
EUCLIDE. *Les Eléments*, volume 1, livres I à IV, Vendôme : Presses Universitaires de France, 1990, p 282 à 287 ;. Traduction VITRAC Bernard.
LELOUARD Monique. « Différentes formes de démonstrations dans les mathématiques grecques ». In IREM de Besançon, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Besançon : IREM de Besançon, 1990, p. 155-180.
PORTE Michèle. « Démonstration et formalisme ». In *Mathématiques et philosophie : la démonstration*, Lille : MAFPEN et IREM de Lille, 1997, p. 69-82.
RACINE Marie-Noëlle, « Géométries : différentes manières de les enseigner » In BARBIN Evelyne (dir) *Histoire et enseignement des mathématiques*, Lyon. INRP 2007

Il existe des sites où l'on peut trouver des textes d'Euclide

<u>la géométrie de Marolois</u>

Samuel Marolois ≈ 1572 ; ≤ 1627

La première édition des *Œuvres Complètes* de Samuel Marolois, publiée en Hollande en 1616 :
« 1. *Géométrie contenant la théorie et practicque d'icelle nécessaire à la fortification* [1616], 2. *Perspective contenant la théorie et practicque d'icelle*. [1614-1615], 3. *Fortification, ou Architecture militaire, tant offensive que défensive*... [1615] ».



première partie de la *Géométrie* est théorique (52 définitions, 71 propositions et 191 figures !)
deuxième partie trigonométrie.

Cet ouvrage est sans nul doute destiné à des gens lettrés et fortunés.
C’est un ouvrage d’enseignement de la géométrie.

« p r e m i e r e p a r t i e

D E L A

P R A T I C Q V E

DE GEOMETRIE,

D E

samvel marolois

Traictance de l'usage du Compas

PREMIERE DEFINITION

Geometrie est la science des lignes, fuperficies, & corps.

Declaration

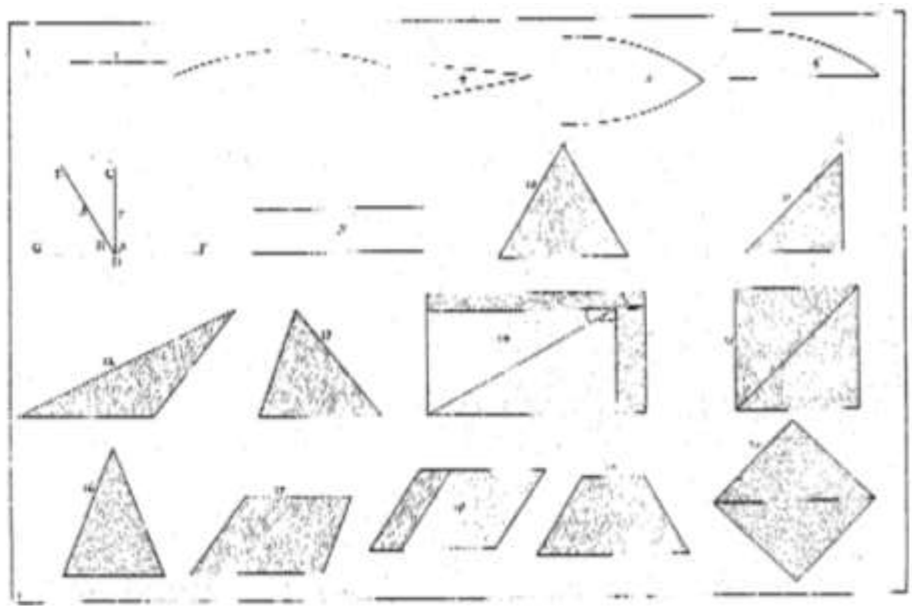
La Geometrie est un mot Grecq qui vault autant à dire que mesurement de terre suivant quoy les Flamens le nomment Lantmerten ou Meetkonft, les premiers Inventeurs d'icelle ont esté les Egyptiens suivant le tesmoignage de Iosephe Historiographe Hebrieu, & ce par necessité suivant le proverbe ancien, que la necessité est l'Inventrice des arts : Car, au temps de l'Inundation su Nil & de son regorgement les termes & limites de leurs terres estans couverts de la fange, après l'Inundation passée causoit confusion entr'eux. Pour a quoy prevenir ordonnerent que apres l'inundation, on mesuseroit combien que chascun en avoit euë & qu'il fut ainsi rendu ce qui appertenoit a un chascun.

DIFFINITION. 2.

Le point est ce qui n'a aucun partie & est le commencement de la ligne comme la figure premiere.

DIFFI. 3.

Ligne est une longueur sans largeur seulement & une ligne droicte est celle qui est egalement comprise entre ses points comme la seconde Figure.



LA GEOMETRIE DE

samvel marolois

Proposition, 1.

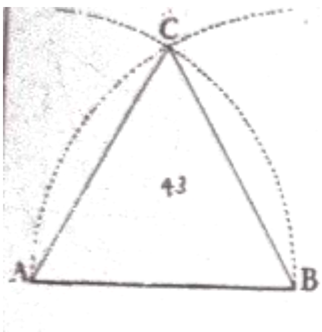
Etant donnée une ligne droicte en former un triangle equilaterael.

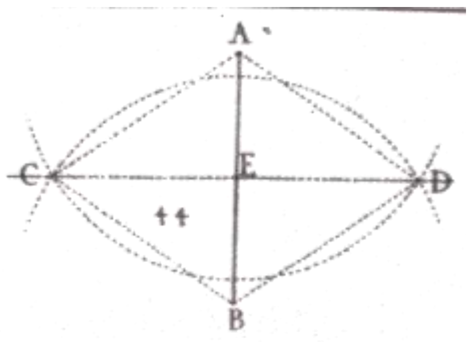
Construction

43.

Soict une ligne droicte donnée A.B. de laquelle on veut faire un triangle equilaterael. On prendra la distance A.B & mettant le pied imobile au point A. de l'autre pied mobile se descrira le cercle oculte, pareillement se fera l'autre cercle oculte du point ou centre B. à la distance A.B. & ou que ces 2.cercles ocultes egaux s'entrecouppent, comme en C. sera le point pour tirer les deux lignes A,C, & B,C, qui sera un triangle equilaterael DEMONSTRATION. D'autant que A.C. est egal à A.B. & C.B. à la mesme A.B. par la 35, definition du cercle ci devant jl s'ensuivra, que les trois lignes sont egales & par consequent equilateral selon la proposition ce qui failloir desmontrer.

….



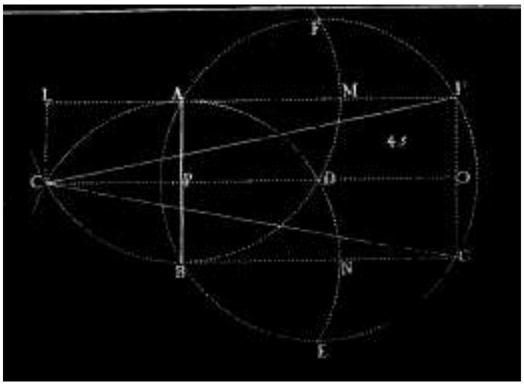


Prop 3.

Estant donnée une ligne droicte le deverser en 3.parties egales.

Const. 45.

Soict la ligne droicte donne A,B, de laquelle on veut partir en 3.parties egales par une ouverture de compas. Soit premierement prius la distance A,B, & du centre B descris une portion de cercle comme D,A,C, pareillement l'arcq D, B,C. & on que ces deux lignes s'entre coupent comme au point D. soit mis le point immobile en iceluy & faict le cercle A,F.H.G.E. puis du point E. soit mis la mesme distance en G. & pareillement de F. en H. apres du point H. soit tires la ligne H.C. pareillement G.C. & par ce moyen sera la ligne A.B. diverses selon le requis DEMONSTRATION. Soit tiree la ligne oculte L.H. passante par le point A. & C.L. paralelle a A.B. comme aussi M.N. passante par le point D. Or d'autant que par la precedente la ligne L,M. est divisee en deux esgalement en A. & puis la ligne A.H. en deux esgalement en A. M. Il s'enfuit que la toute L,H. sera divisee en trois parties esgales aux points A, & M, & que par la 4. du 6. d'Euclide L,H,C, est proportionnel au triangle A,H,I, estant equiangle parquoy comme H,L, a H,A, ainsi H,C, a H. I. ou comme L.A. a A.H. ainsi C.I. a I.H. & comme C.O. a O.H. ainsi C. P. a P.I. mais C.O. est a C.P. triple doncques H.O. est aussi triple a I.P. parquoy P.A. estant la moitie de la donne il s'ensuivra que le double de I.K. (a savoir 1.2.) est esgal a I.A. ce qui failloit demonstrer.



Voyons comment il traite de la construction d'un carré :

La proposition arrive en numéro 13, c'est la figure 61. On peut remarquer que cette construction est différente de celle d'Euclide, pourtant Marolois la justifie en donnant la référence des *Éléments*.

« Proposition 13.

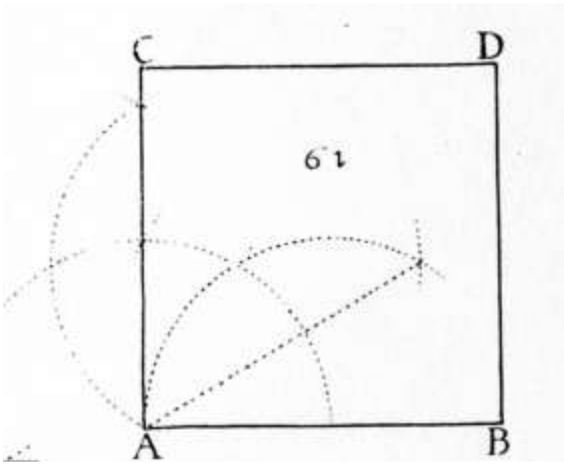
Estant donnee une ligne en former un quare

Construction.

61.

Soict la ligne droite A.B. aux point A. & B. soyent eslevez 2.lignes droictes orthogonelles & esgales a A.B. puis soit tiree la ligne C.D. paralelle a A.B. & sera le quare forme selon le requis. C'est la 46.du premier.

[…] »

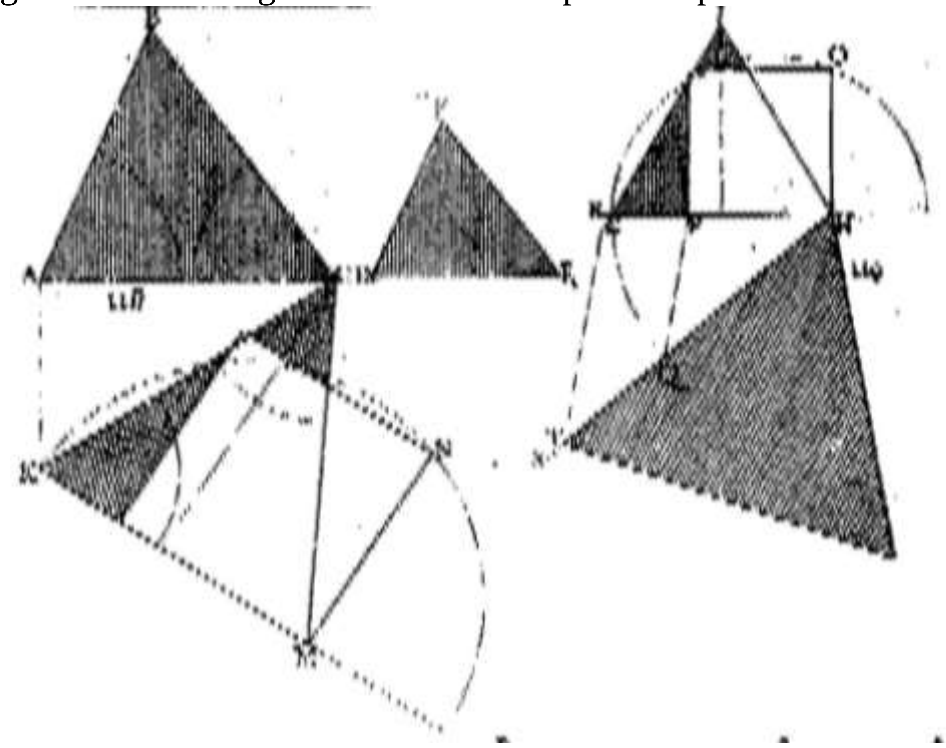


Dans toute la suite de sa *géométrie,* Marolois développe des exercices qui demandent une grande technicité comme peut le faire un professeur enseignant la pratique géométrique à des élèves motivés, capables de suivre un maître qui pose des questions, puis de résoudre les problèmes en utilisant les techniques enseignées auparavant, problèmes de plus en plus ardus et exigeant de plus en plus d'habileté et de ténacité. Cependant, cette forme où les définitions s'accumulent avant même d'entrer dans le vif du sujet, sera parfois contestée, notamment un siècle plus tard lorsqu'il s'agira d'enseigner à des élèves qui ne seront pas tous princes, officiers ou professeurs.

Dans le paragraphe suivant, à la figure 118, Marolois se donne deux triangles semblables et construit un troisième triangle dont l'aire est la somme des aires des deux premiers triangles. À la figure 119, Marolois se donne un triangle quelconque et construit un triangle de même forme dont l'aire est la somme des aires des deux premiers triangles de la figure 118.

118. 119.

Soyent deux triangles equiangles A.B.C.D.E.F. lesquels on veult adjouster ensemble & la somme duquel on veult faire une Figure semblable a G.H.I. pour ce faire sur la base A. B. du point A. s'eslevera une perpendiculaire comme A.K. & du point A. soit faict A.K. esgale a la base D.E. & tiree B. K. qui sera la base du nouveau triangle sur laquelle on bastira un triangle equiangle aux tri-angles A B C. ou D E F. par la 18. du 6. d'Eucl : qui sera le triangle K B M. or pour reduire ceslui ci en Figure semblable a la Figure G H I. qui est triangle equilateral seront les deux triangles K B M & G H I. reduicts en deux quarez par la 19.proposition de ceste partie duquelles costez sont M N & H O. & sera la ligne H O. mise de H. en P. comme aussi la ligne M N. de H. en R. puis sera du point H. & la distance H.G. faict k'arcq G Q. & du point H. la ligne infime H S. s'entre coupant au point Q. puis soit faict la ligne P Q. & du point R. une ligne parallele a la ligne P.Q. comme R. I. & sera la ligne H. T. le coste du triangle requis semblable au triangle equilateral G H I. & esgal aux deux triangle A C B. & D F E. par la 25.pro du 6. d'Eucl.



Bibliographie :

BARBIN Evelyne. « Trois démonstrations pour un théorème de géométrie élémentaire. Sens de la démonstration et objet de la géométrie ». In IREM de Besançon, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Besançon : IREM de Besançon, 1990, p. 57 –79.

CHASLES Michel. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 3ème édition, Gauthiers Villars 1889.

COLLAUDIN Pierre, GUYOT Patrick.,METIN Frédéric. *Quadratures et trisections en classe*, Dijon : IREM Dijon, 1999.

EUCLIDE. *Les œuvres d'Euclide*, Paris : Réédition Blanchard, 1993, p. 1 à 38 ; traduction PEYRARD François.

EUCLIDE. *Les Eléments*, volume 1, livres I à IV, Vendôme : Presses Universitaires de France, 1990, p 282 à 287 ;. Traduction VITRAC Bernard.

GUYOT Patrick., METIN Frédéric. "Les ouvrages de géométrie pratique au XVIe siècle ». In HEBERT Elisabeth., (dir.), *Instruments scientifiques à travers l'histoire*, Paris : Ellipses, 2004, p. 251-265.

MAROLOIS Samuel. *Compas géométrique, mesures sur le terrain, utilisation de la boussole*, commentaires et notes de COLLAUDIN Pierre, METIN Frédéric, RACINE Marie-Noëlle. Dijon : Mathématiques En Bourgogne, 2001.

MAROLOIS Samuel. *Géométrie contenant la théorie et Practique d'icelle nécessaire à la Fortification*, Arhnemi : HENRICI HONDII, 1616.

MAROLOIS Samuel. *Lignes trigonométriques, résolutions de triangles*, commentaires et notes de RACINE Marie-Noëlle, METIN Frédéric. Dijon : Mathématiques En Bourgogne, 2001.

RACINE Marie-Noëlle, COLLAUDIN Pierre. « Utilisation du compas géométrique ». In HEBERT Elisabeth (dir.). *Instruments scientifiques à travers l'histoire*, Paris : Ellipses, 2004, p. 266-281.

RACINE Marie-Noëlle, « Géométries : différentes manières de les enseigner » In BARBIN Evelyne (dir) *Histoire et enseignement des mathématiques*, Lyon. INRP 2007

la géométrie de Clairaut

Alexis-Claude Clairaut est né à Paris en 1713.
à 9 ans il étudie l'algèbre,
à 10 ans marquis de l'Hospital
Académie des Sciences à 18 ans, grâce à une dispense.
Il meurt à Paris en 1765, à 52 ans.

C'est pour Voltaire qu'il aurait, dit-on, écrit les *Élémens de Géométrie*, publiés en 1741.

Dès le début, Clairaut se place différemment d'Euclide : « des moyens qu'il étoit le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des terrains »,
Élémens de Géométrie qui se veulent le plus « naturel » possible.
intéresser et éclairer les « commençants ».
Dans tout l'ouvrage, il n'y a jamais ni le mot *définition*, ni le mot *théorème* ou *proposition*, ni le mot *démonstration*. Tous ces énoncés-là sont présentés sous forme d'*articles*.

quelques exemples :

Les *Élémens* débutent par une table des matières.

« Élémens de Géométrie.
Par M. Clairaut, de l'Académie Royale des Sciences, & de la Société Royale de Londres. »

Extrait de la table des matières :

« PREMIERE PARTIE.
Des moyens qu'il étoit le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des Terrains.

[…] »

ÉLÉMENS DE GÉOMETRIE.
PREMIERE PARTIE .
Des moyens qu'il étoit le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des Terrains.

Ce qu'il semble qu'on a dû mesurer d'abord, ce sont les longueurs & les distances.

I.

Pour mesurer une longueur quelconque, l'expédient que fournit une sorte de Géométrie naturelle, c'est de comparer la longueur d'une mesure connue à celle de la longueur qu'on veut connoître.

II.

A l'égard de la distance, on voit que pour mesurer celle qui est entre deux points, il faut tirer une ligne droite de l'un à l'autre, & que c'est sur cette ligne qu'il faut porter la mesure connue, parce que toutes les autres faisant nécessairement un détour plus ou moins grand, sont plus longues que la ligne droite qui n'en fait aucun.

[…]

IV.

On avoit encore besoin d'en tracer dans une infinité d'autres occasions. On sçait, par exemple, que la régularité des figures telles que ABCD, FGHI, appelées rectangles, & composées de quatre côtés perpendiculaires les uns aux autres, engage à donner leur forme aux maisons, à leur dedans aux jardins, aux chambres, aux pans de murailles, &c. […]

V.

Dans les différentes opérations qui demandent qu'on mène des perpendiculaires, il s'agit ou d'en abaisser sur une ligne d'un point pris au-dehors, ou d'en élever d'un point placé sur la ligne même.

(FIG. 4) Que du point C pris dans la ligne AB, on veuille élever la ligne CD perpendiculaire à AB, il faudra que cette ligne ne panche ni vers A, ni vers B.

Supposant donc d'abord que C soit à égale distance de A &de B, & que la droite CD ne panche d'aucun côté, il est clair que chacun des points de cette ligne sera également éloigné de A & de B ; il ne s'agira donc plus que de trouver un point quelconque D, tel que la distance au point a soit égale à la distance au point B : car, alors tirant par C, & par ce point une ligne droite CD, cette ligne sera la perpendiculaire demandée.

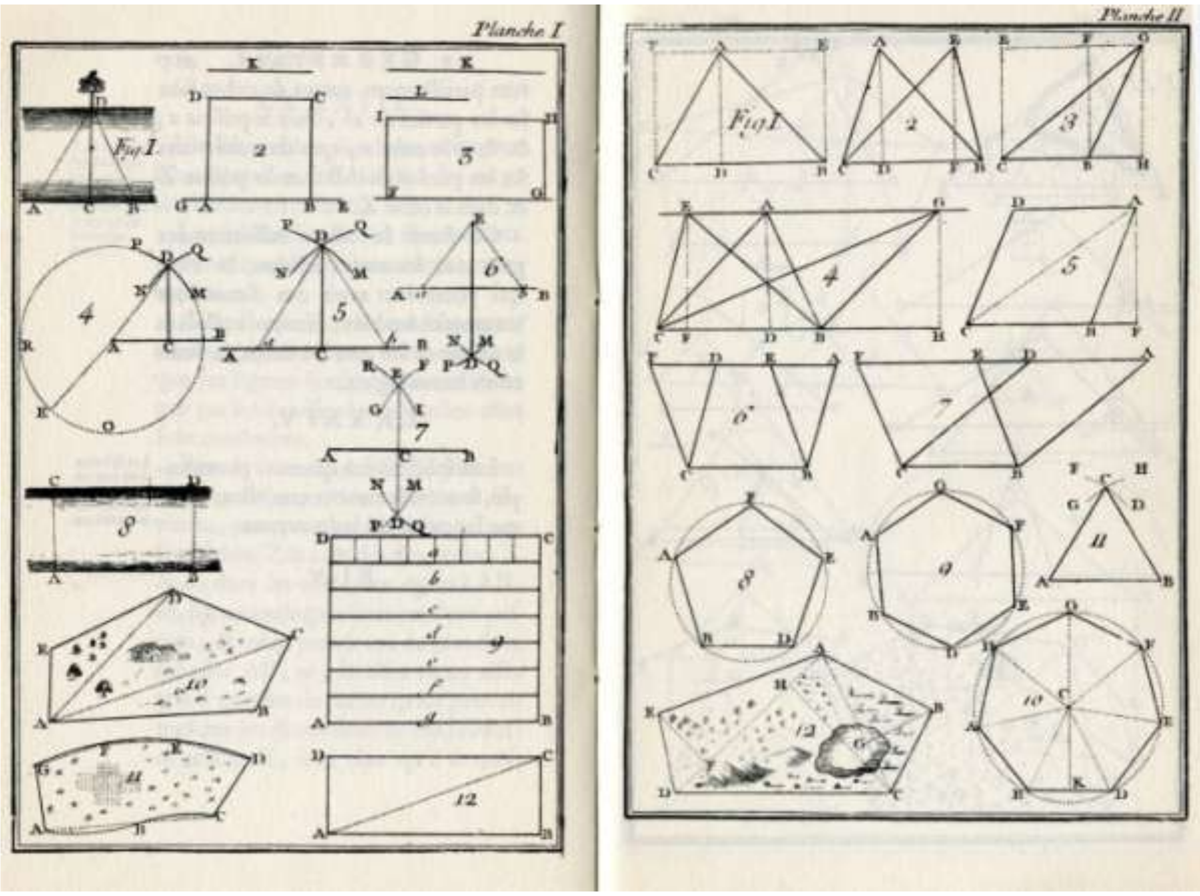
Pour avoir le point D, on pourroit le chercher en tâtonnant ; mais le tâtonnement ne satisfait pas l’esprit, il veut une méthode qui l’éclaire. La voici.

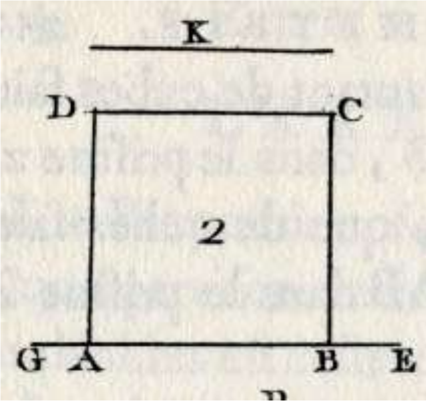
Prenez une commune mesure, une corde, par exemple, ou un compas d’une ouverture déterminée, suivant que vous travaillerez ou sur le terrain ou sur le papier.

Cette mesure prise, vous fixerez au point A, ou l’extrémité de la corde, ou la pointe du compas, & faisant tourner l’autre pointe, ou l’autre extrémité de la corde, vous tracerez l’arc PDM. Puis, sans changer de mesure, vous opérerez de même par rapport au point B, & vous décrirez l’arc QDN, qui coupant le premier au point D, donnera le point cherché.

Car puisque le point D appartiendra également aux deux arcs PDM, QDN décrits par le moyen d’une mesure commune, sa distance au point A égalera sa distance au point B. Donc CD ne panchera, ni vers A, ni vers B. Donc cette ligne sera la perpendiculaire sur AB.

(FIG. 5) Si le point C ne se trouve pas à égale distance de A & de B, il faut prendre deux autres points a & b, également éloignés de C, & s’en servir, à la place de A & de B, pour décrire les arcs PDM, QDN. »





I X.

La maniere de tracer des perpendiculaires étant trouvée, rien n'étoit plus aiſé que de s'en ſervir pour faire ces figures qu'on appelle rectangles & quarrés, dont on a parlé dans l'Article IV. On voit que pour faire un quarré ABCD, dont les côtés ſoient égaux à la ligne donnée K, il faut prendre ſur la droite GE, un intervalle AB, égal à K, puis élever (Article V.) aux points A & B, les perpendiculaires AD, BC, chacune égale à K, enſuite tirer DC.

FIG. 2. Faire un quarré ayant ſon côté.

IX.

La manière de tracer des perpendiculaires étant trouvée, rien n'étoit plus aisé que de s'en servir pour faire ces figures qu'on appelle rectangles & quarrés, dont on a parlé dans l'article IV. On voit que pour faire un quarré ABCD, dont les côtés soient égaux à la ligne la ligne donnée K, il faut prendre sur la droite GE, un intervalle AB, égal à K, puis élever (Article V.) aux points A & B, les perpendiculaires AD, BC, chacune égale à K, ensuite tirer DC.

La méthode qui consiste à partir d'une problématique est une méthode présente dans certains ouvrages d'enseignement à cette époque.

Et la rigueur dans tout ça ?

Cet enseignement problématisé est d'abord conçu, cela a déjà été dit, pour ne pas rebuter les élèves commençants, il n'exclut pas la possibilité de se poser des problèmes, de faire de la recherche et il permet à des élèves qui n'auront pas envie d'approfondir d'avoir un vernis mathématique et d'avoir côtoyé des méthodes où l'on résout des problèmes.

Bibliographie :

BARBIN Evelyne. « Trois démonstrations pour un théorème de géométrie élémentaire. Sens de la démonstration et objet de la géométrie ». In IREM de Besançon, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Besançon : IREM de Besançon, 1990, p. 57 –79.

BARBIN Evelyne. « Les *Elémens de géométrie* de Clairaut : une géométrie problématisée ». In *Repères IREM*, 1991, numéro 4.

CHASLES Michel. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 3ème édition, Gauthiers Villars 1889.

CLAIRAUT Alexis-Claude. *Elémens de géométrie*, 1741, Laval : Réédition Siloe, 1987.

DEDRON Pierre, ITARD Jean. *Mathématiques et mathématiciens*, Paris : Magnard, 1979.

RACINE Marie-Noëlle, « Géométries : différentes manières de les enseigner » In BARBIN Evelyne (dir) *Histoire et enseignement des mathématiques,* Lyon. INRP 2007

À travers ces quatre différents exemples de présentation et de transmission du savoir géométrique, nous avons voulu montrer diverses manières d'enseigner : géométries inductives où l'on part de situations-problèmes pour apprendre à abstraire et opérer efficacement jusqu'à trouver la ou les solution(s), géométries déroulant un discours hypothético-déductif de définitions et propriétés, discours qui s'auto-alimente et qui, se nourrissant de sa substantifique moelle (les Eléments), permet ainsi de développer toute une mathématique. Ce sont des manières différentes d'enseigner la géométrie. Mais au-delà de la forme de ces géométries, il y a, sous-jacente, une idéologie politique, des formes différentes de gouvernement de soi-même comme des autres : le pouvoir politique décide, décrète et le peuple applique (en recourant à des géométries algorithmiques), ou bien, le peuple discute et les assemblées ne décrètent qu'ensuite (en fonction de preuves avérées, comme dans la géométrie grecque). Cette forme de gestion de la nation, et de partage en quelque sorte du pouvoir, suppose que les représentants du peuple soient habitués à argumenter leurs idées, à étayer leurs dires par des raisonnements, objectifs non négligeables d'un enseignement démocratique de la géométrie aujourd'hui dans les classes.