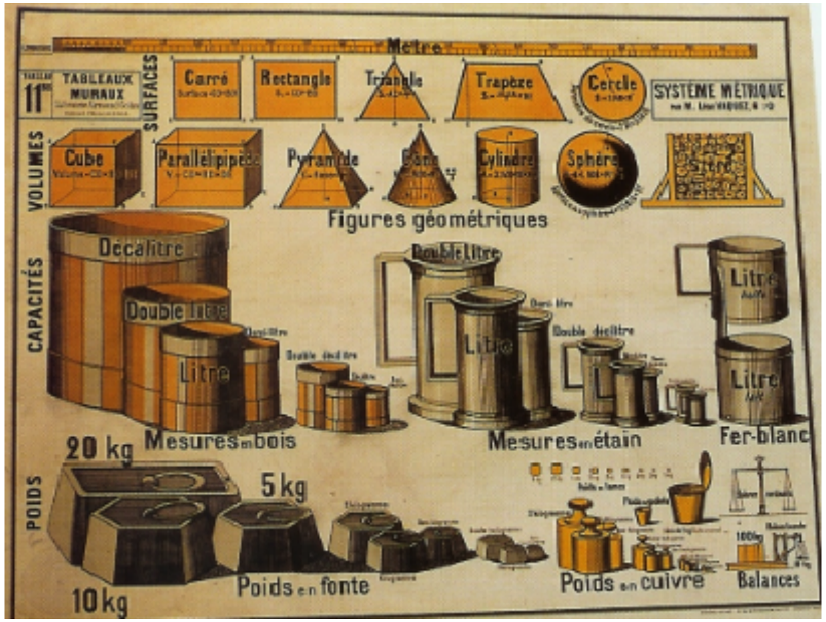
CREM Nivelles
29 novembre 2013

# Comment articuler l'étude des nombres et du calcul et celle des grandeurs et de leur mesure?





Marie-Lise PELTIER
Maître de conférences
en didactique des mathématiques

Laboratoire de didactique André Revuz
Université Denis Diderot Paris 7

# En guise d'introduction

# Du problème à la situation, de la situation au savoir

Un exemple :
**Introduction de la somme de deux décimaux**

*Les écritures à virgule ont été introduites à partir des fractions décimales*

Un énoncé au tableau **:**

***« Pour construire une grande frise chronologique, des enfants mettent bout à bout deux bandes de carton. La première mesure 1,45 m et la seconde mesure 2,7 m.***

***Quelle est la longueur de la bande ainsi obtenue ? »***

**Trois scénarios**…

**Scénario 1** : Élaboration collective de la solution à partir des écritures fractionnaires (supposées déjà vues)

**Scénario 2 :** Par groupe, deux bandes : 1,45 m et 2,7 m.

Les élèves manipulent et mesurent pour trouver la longueur totale.

Recensement des mesures trouvées

Synthèse collective (cf. scénario1)

**Scénario 3** : Dans la classe deux bandes : 1,45 m et 2,7 m.

Consigne : « Vous devez prévoir par le calcul la longueur de la bande obtenue lorsque l'on mettra ces deux bandes bout à bout. Une fois vos prévisions effectuées, nous vérifierons en mesurant puis nous étudierons comment vous avez procédé pour faire votre prévision ».

Recensement des prévisions.

Organisation en collectif du mesurage effectif en mettant les bandes bout à bout.

Recherche des raisons qui conduisent au résultat juste

## Ce qui est à comparer

- L’articulation entre opérations sur les nombres et opérations sur les grandeurs
- La prise en compte des conceptions initiales
- Le rôle de la manipulation
- Le rôle de la synthèse
- Les rôles respectifs du professeur et des élèves
- « L’image » des mathématiques mise en avant
- …

Dans le scénario 1

Les grandeurs (longueurs) servent de contexte évoqué à un travail sur les nombres

Dans le scénario 2

Les grandeurs (longueurs) interviennent par le travail de mesurage proposé, le lien avec les nombres est assuré par le professeur

Dans le scénario 3

Les grandeurs sont convoquées pour donner du sens à l’addition des nombres décimaux en associant l’addition des longueurs et l’addition de leurs mesures

Dans ce scénario 3

- L'activité consiste à **prévoir** la **mesure de la longueur** de la bande en se servant des savoirs sur les fractions décimales.
- Le but de l'activité est de **justifier la technique** de calcul de la somme de deux nombres décimaux

- Le moment de vérification est un travail de **mesurage** qui permet d'obtenir la mesure (un nombre avec une unité et sous unité) d'une grandeur (ici une longueur) relative à un objet (ici une bande de carton) et de **tisser les liens entre les nombres et le système métrique**

La prise en compte des conceptions initiales sur les décimaux :

- Les scénarios 1 et 2 ne la permettent pas
- Dans le scénario 3

Longueurs des bandes : 1,45 m et 2,7 m.

Réponses envisageables des élèves

| | |
|---|---|
| 3,52 | (1 + 2 = 3 et 45 + 7 = 52) |
| 3,115 | (2 + 1 = 3 et 45 + 70 = 115) |
| 1,72 | (145 + 27 = 172 puis 1,72) |
| 4,15 | |

Que serait-il arrivé si on avait choisi pour les longueurs des bandes 1,4m et 2,5m ???

*…. de l'intérêt des variables didactiques !*

Le moment de synthèse

- Dans le scénario 1, il est confondu avec « l'activité »

- Dans le scénario 2, il est déconnecté de l'activité

- Dans le scénario 3, il permet de comprendre pourquoi le résultat est juste

  Il met en évidence la distinction entre

  - Quelle est la « bonne » réponse?

  - Pourquoi cette réponse est « la bonne »?

- L’articulation entre grandeurs, nombres et opérations est au cœur des apprentissages numériques des élèves du primaire

- Mathématiser, c’est construire un modèle produit par un langage en vue d’exercer un contrôle sur un milieu (souvent matériel en primaire).

La présence d’un milieu matériel n’implique pas la réduction de l’activité à une simple manipulation

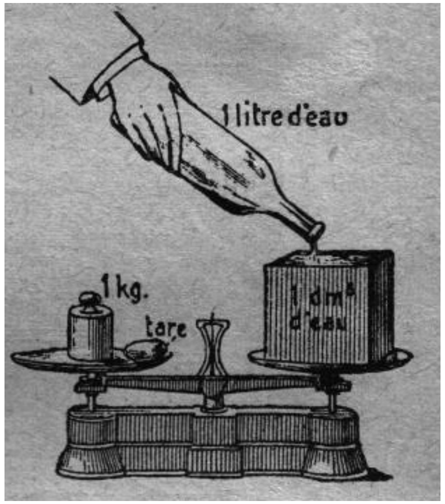
prévoir ≠ illustrer…

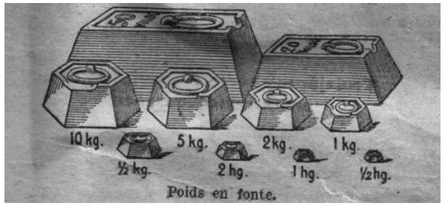
# Plan

# Partie 1
# Des constats

# 1. L’évolution des pratiques sociales qui impliquent des grandeurs

## ➢ Évolution des instruments de mesure



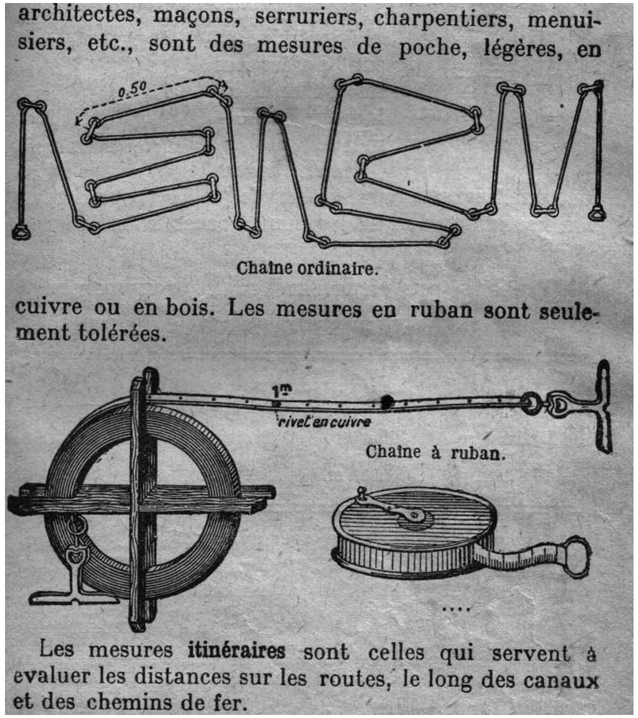




Le mesurage actuel s’effectue à l’aide d’instruments qui donnent l’information numérique

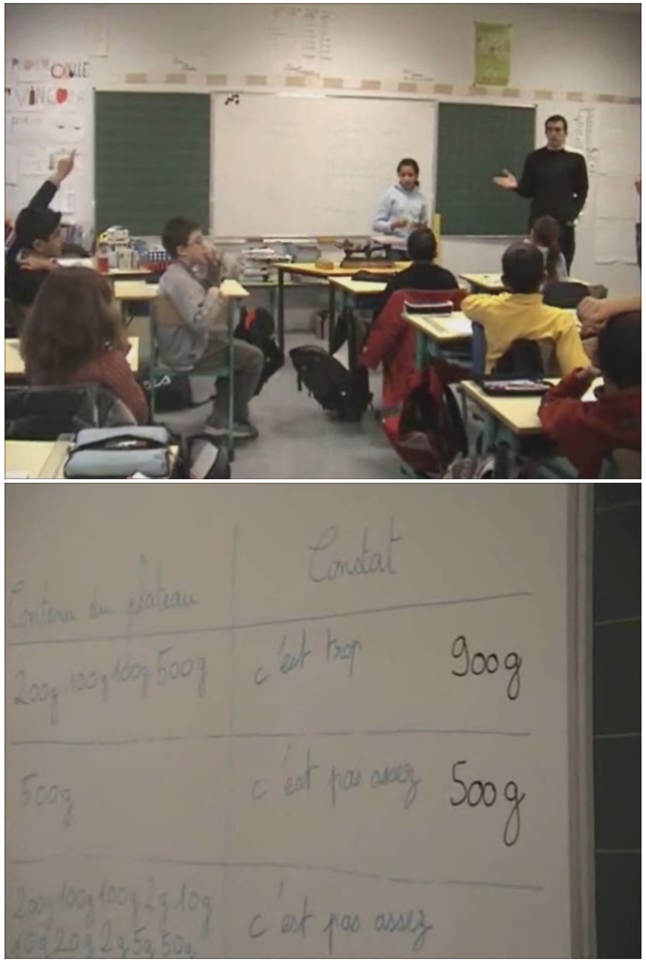
le mètre laser, la balance digitale…

La comparaison directe des grandeurs, y compris à l’aide des étalons officiels fait de moins en moins partie de l’activité de mesurage.

La notion d’approximation disparaît ou presque




# Et de fait les environnements sont modifiés




Balance Roberval
travail sur les opérations.

Balance digitale
lecture d'un nombre.

- D’autres exemples d’évolutions des pratiques sociales :

  * Prix à l’unité sur les emballages qui prennent en charge masse, capacité, longueur, superficie…

  * Dématérialisation de l’argent

  * Raréfaction des activités manuelles impliquant des mesurages (couture, cartonnage, menuiserie, cuisine…)

  * …

## 2. L’évolution des programmes de l’école
(depuis 1970, la réforme des maths modernes) :

Séparation du domaine numérique et de celui de la mesure avec pour conséquence :

- La rupture de relations installées depuis longtemps dans l’enseignement primaire entre

  * la numération décimale de position des entiers et le système métrique

  * les opérations sur les nombres et les opérations sur les grandeurs

  * les techniques de calcul et le sens des opérations

- La diminution sensible du temps consacré à l'élaboration du concept de grandeur (conservation, comparaison, opérations)
- Le rabattement du travail sur les grandeurs à un travail sur leur mesure
- L'absence de mise en réseau de tâches similaires issues de domaines différents
- La disparition de certains types de tâches
- L'impossibilité de justifier certaines techniques

Les rencontres des élèves avec le mesurage effectif de grandeurs, pour la construction de nouvelles connaissances, sont relativement peu nombreuses, et pourtant

- **Dénombrer c'est mesurer** une collection, son cardinal est une **grandeur « discrète ».**

- **Définir les opérations sur les nombres, c'est prendre appui sur les opérations sur les grandeurs**
- **Construire les fractions et les nombres décimaux**, c'est trouver une solution à l'impossibilité de mesurer avec les nombres entiers **des grandeurs « continues »** comme la longueur d'un segment.

**3. L'évolution des savoirs mathématiques** de référence

- Des savoirs savants très axiomatisés (depuis la fin du XIXème siècle, début du XXème)

pas nécessairement adaptés pour l'enseignement primaire (savoirs savants du premier ordre)

(C. Chambris 2008)

Ainsi

* les divers ensembles de nombres sont définis sans référence aux grandeurs

exemple: Les rationnels sont définis comme classe d'équivalence d'un couple d'entiers

* L’écriture en chiffres des entiers  relève de l’existence et de l’unicité de la décomposition polynomiale d’un entier dans une base donnée

* La définition des opérations s’appuie sur des opérations ensemblistes et fait intervenir le concept de fonction

* etc.

- Des savoirs savants du second ordre mathématiquement corrects, utiles pour l'enseignement mais pas nécessairement pour les mathématiciens

Ainsi

* La définition des nombres à partir des grandeurs

exemple : définition d'un rationnel à partir des opérateurs de fractionnement sur une grandeur

* L'étude de la numération à partir des différents ordre d'unités en liaison avec le système métrique

etc.

Les savoirs savants du second ordre sont

- trop peu nombreux
- et pourtant indispensables
    * pour apporter une cohérence au nécessaire travail de transposition
    * comme traités de référence pour la formation des enseignants de l'école primaire

un exemple de savoirs savants du $2^d$ ordre :

« Le sens de la mesure » N. Rouche (1992)

# 4. Les résultats des élèves

Plutôt décevants

Quelques exemples

- L’échec important à des problèmes mettant en jeu la numération décimale :

exemple:

*« Combien de paquets de 100 jetons peut-on faire avec 6543 jetons? »*

Ce problème est considéré comme un problème de division par les enseignants, il est massivement échoué avant l’apprentissage de la division (Parouty 2005)

- Une mauvaise connaissance des unités de numération et des relations entre elles

Evaluation à l'entrée de CE2 pour une cohorte de 175 élèves (Tempier 2013)

1. Ecrire en chiffres

| | |
|---|---|
| 1c+9d+3u | Réussite 91% |
| 8d+2c+5u | Réussite 78% |
| 6c+9u | Réussite 65% |
| 5c+12d+3u | Réussite 39% |

2. Compléter

| | |
|---|---|
| 1c = … d | Réussite 48% |
| 60d = … c | Réussite 31% |
| Dans 764, il y a … dizaines | Réussite 39% |

## - des connaissances fragiles sur les unités du système métrique et les ordres de grandeurs

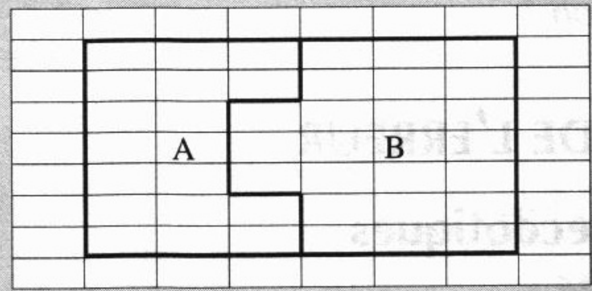
Complète les phrases en écrivant l'unité qui convient.

| | |
|---|---|
| Une journée de classe dure 6 ☐ . | 78% |
| La Tour Eiffel mesure 324 ☐ de haut. | 67% |
| Un homme peut peser 85 ☐ . | 68% |
| Le journal télévisé a duré 30 ☐ . | 59% |
| Une plaquette de beurre pèse 250 ☐ . | 59% |
| La règle mesure 30 ☐ de long. | 61% |
| Le réservoir d'essence de la voiture contient 45 ☐ . | 38% |

## - des conceptions erronées de la relation aire - périmètre

Une confusion entre
forme,
longueur
et aire …

Evaluation en 6°




« Un terrain a été partagé comme l'indique la figure ci-dessus. »
Entoure dans chaque cas la réponse qui convient :

a) L'aire de la parcelle A est la plus grande. | Les deux parcelles ont la même aire. | L'aire de la parcelle B est la plus grande.

Explique ton choix :

……………………………………………………………………………

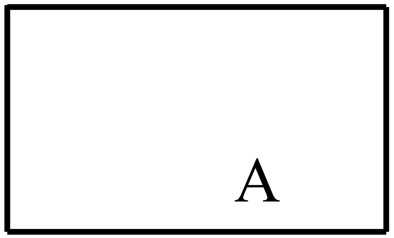
b) Le périmètre de la parcelle A est le plus grand. | Les deux parcelles ont le même périmètre. | Le périmètre de la parcelle B est le plus grand.

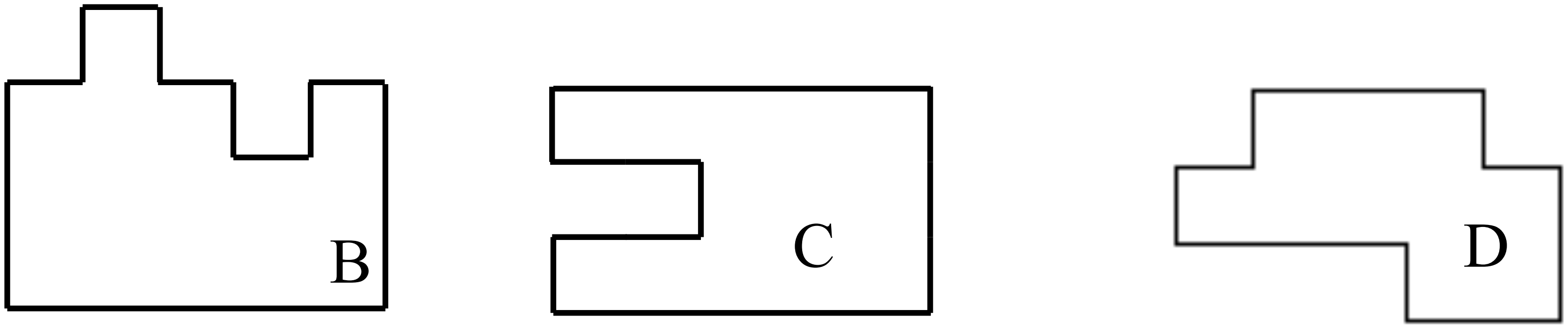
Explique ton choix :

- 90,6% de réponses justes pour la question a
- 34,5 % pour la question b : 40,8% des élèves affirment que « le périmètre de la parcelle B est plus grand.

➢ Croire qu'augmenter le périmètre, c'est augmenter l'aire !

➢ Croire que changer la forme, c'est changer périmètre et aire



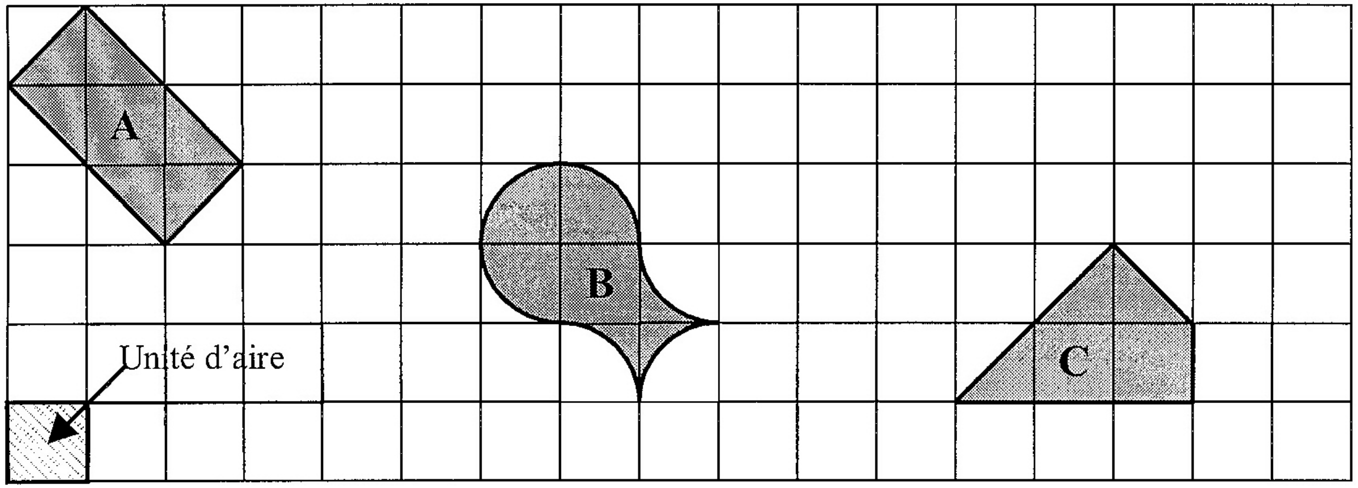




*En réalité,*

*- on peut agrandir le périmètre sans changer l'aire (B) ou en diminuant l'aire (C),*

*- on peut agrandir ou réduire l'aire sans changer le périmètre (D).*

# - Des difficultés à déterminer des aires sur papier quadrillé dans les cas non « prototypiques »




a) Quelle est l'aire de la figure A ?
Réponse : …………….. unités d'aire 69,5 %

b) Quelle est l'aire de la figure B ?
Réponse : …………….. unités d'aire 60,1 %

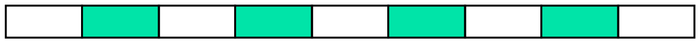
c) Quelle est l'aire de la figure C ?
Réponse : …………….. unités d'aire 58,9 %

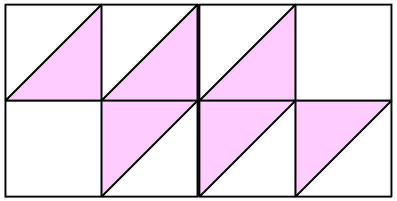
- Une confusion entre figure et aire

Entretenue par certains manuels de mathématiques

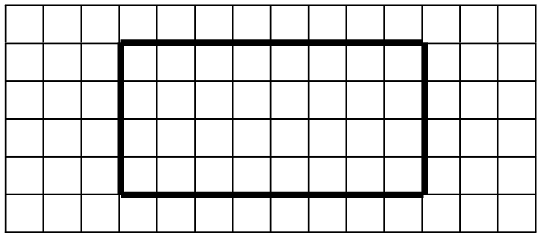
Exemples :

1. Quelle est la fraction coloriée de chaque figure?



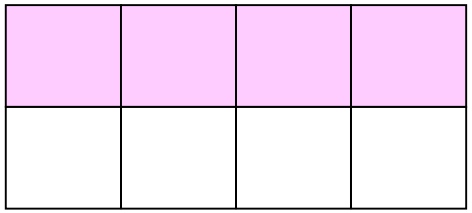


2. Reproduire ce rectangle et en hachurer les trois quarts

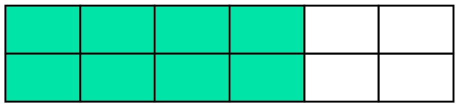


# Ce qui conduit à des ambiguïtés

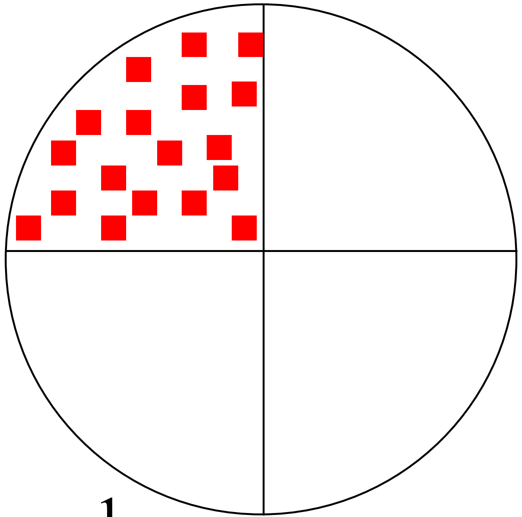
*Exemple de résumé proposé dans un manuel*



$$\frac{1}{2}$$



$$\frac{2}{3}$$



$$\frac{1}{4}$$

Or, si l'on regarde ces trois figures, l'aire rose **est** plus grande que l'aire verte… et pourtant

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

*Les nombres donnés (les mesures) dépendent de l'unité d'aire choisie : seuls ils sont ambigus !*

# Partie 2
# Promenade dans le passé

## - L’origine du système métrique et des nombres décimaux

LA

DISME,

1585

Enseignant facilement expedier par nombres entiers sans rompuz, tous comptes se rencontrans aux affaires des Hommes.

*Premierement descripte en Flameng, et maintenant convertie en François, par* SIMON STEVIN *de Bruges.*

L'appendice de ce texte comprend des paragraphes dédiés aux arpenteurs, aux maîtres de monnaies, aux commerçants…

# EXPLICATION

Soit quelque nombre de mille cent & onze, descript par characteres des cyffres en ceste sorte 1111, ausquels appert que chasque 1 est la dixiesme part de son prochain charactere precedent. Semblablement en 2378, chasque unité du 8, est la dixiesme de chasque unité du 7. Et ainsi de tous les autres. Mais parce qu'il est convenable que les choses desquelles on veut traicter, ayent des noms, & que ceste maniere de computation est trouvée par consideration de telle dixiesme ou disme progression, voire qu'elle consiste entierement en icelle, comme apparoistra cy apres, nous nommons ce traicté proprement & convenablement la DISME, par la mesme on peut operer avec nombres entiers sans rompuz en tous les comptes se rencontrans en nos affaires, comme sera demonstré au suyvant.

## EXPLICATION

Comme 3①7②5③9④, c'est à dire 3 *Primes* 7 *Secondes* 5 *Tierces* 9 *Quartes ;* & ainsi se pourroit proceder en infini. Mais pour dire de leur valeur, il est notoire, que selon ceste definition, lesdicts nombres font $\frac{3}{10}\ \frac{7}{100}\ \frac{5}{1000}\ \frac{9}{10000}$, ensemble $\frac{3759}{10000}$. Semblablement 8⓪9①3②7③ vallent $8\frac{9}{10}\ \frac{3}{100}\ \frac{7}{1000}$, ensemble $8\frac{937}{1000}$. Et ainsi d'autres semblables.

Il faut aussi sçavoir que nous n'usons en la DISME d'aucuns nombres rompuz, aussi que le nombre de multitude des signes, excepté ⓪, n'excede jamais le 9. Par exemple, nous n'escrivons pas 7①12②, mais en leur lieu 8①2②, car ils vallent autant.

# Notations très diverses pour les nombres décimaux jusqu'à la révolution

Exemples pour le nombre 27,356

| | |
|---|---|
| 1592 Magini : | 27.356 |
| 1616 Kepler : | 27(356 |
| 1620 Bürg : | 27 356 |
| 1630 Boulanger, 1702 Mallet: | 27 3 5 6 |
| 1720 Reyneau : | $27\ 356^{111}$ |

La virgule serait due
à l'écossais
*John Neper* (1550-1617)

La difficile adoption
des écritures décimales
et du système métrique

**1792** : Le système métrique est décrété par la convention nationale, présenté en 1795 (11 Floréal de l'an III) par Pierre Simon de Laplace, mathématicien et physicien
Le mètre sera la dix millionième partie du quart du méridien terrestre
**Delambre et Méchain** évaluent le quart du méridien à 5 130 740 toises et en déduisent la longueur du mètre

**1800, 1812** : décrets néfastes autorisant l'emploi de mesures dites usuelles

**1840** : retour à l'usage exclusif des mesures métriques

**1870-1872, 1875** : Création de la commission puis du Bureau International des Poids et Mesures.

**Fin du XIX $^{\text{ème}}$ siècle** : l'école primaire obligatoire impose à la population les nombres décimaux et le système métrique

**1983** : nouvelle définition du mètre

**- Les programmes successifs de l’école élémentaire en France**

**La rupture des « mathématiques modernes »**

1882 : les contenus à enseigner sont listés sans commentaires, pas de lien explicite entre nombres, calcul, unités de mesure

1923 : articulation mentionnée entre numération décimale et système métrique

1945 : appui très clair sur la mesure des grandeurs pour l’étude des nombres et des opérations

1970 : influence très forte de la pensée piagétienne relative aux stades de développement de l'enfant et du courant structuraliste en mathématiques développé notamment par Bourbaki.

Les structures ensemblistes sont privilégiées

Les grandeurs, qui fondaient jusque là l'enseignement des nombres, disparaissent

- Les entiers sont construits uniquement à partir de quantités discrètes

- L'introduction des bases traduit la rupture des liens entre la numération et le système métrique

- Les décimaux sont introduits eux aussi à partir du discret par changement d'unité

Une ville compte 10 850 habitants. Le *millier* étant choisi comme unité, la population s'exprime par le nombre décimal 10,850. (Instructions officielles de 1970)

- On les retrouve dans la section « mesure » sur du continu, toujours par changement d'unités

Prenons comme unité le carreau (…) aire A = 28 (…). Si on choisit comme unité de surface un rectangle de dix carreaux, l'aire de A est le nombre 2,8. (Ibid.)

- On ne parle plus de grandeur, mais directement de mesure. Les grandeurs interviennent toutefois, mais seulement dans le domaine de la proportionnalité

- 1980 : les grandeurs font leur réapparition :

  Notion d’unité, principe du mesurage

  Fractionnement permettant l’introduction des fractions

  Evolution sensible des programmes

  mais la question des savoirs de référence pour le fondement des nombres n’est ni discutée, ni résolue

- 2002 : l’appui sur les grandeurs est explicite

  […] utiliser, dans des cas simples, des fractions ou des sommes d’entiers et de fractions pour coder le résultat de mesurages de longueurs ou d’aires, une unité de mesure étant choisie explicitement.

- 2008 : peu de changements

- **Depuis 1970 : Développement des travaux en didactique des mathématiques**

  **sur les grandeurs** (ce n'est pas une liste exhaustive!)

  Rogalski, J. (1982) sur la dimensionnalité des mesures spatiales (longueur, surface)

  Bessot A. et Eberhard M. (1983) sur les longueurs

  Vergnaud et al. (1983) sur les volumes

  Rouche N. (1992-1994-206) sur grandeurs et mesure

  Douady R et Perrin Glorian, M-J. (1983-1989) sur les aires

  Moreira Baltar, P. (1996) sur les aires

  Chevallard, Y. et Bosch (2001-2002) sur les grandeurs

  Perrin-Glorian, M.J. (1989-1990) sur l'aire et la mesure

  Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations

## Partie 3

# Zoom sur quelques questions

- **En numération** : importance des unités de numération et de leurs relations (vers une flexibilité et une mise en réseau des connaissances)

3547 = (3x1000) + (5x100) + (4x10) + 7

= 3000 + 500 +40 +7

= 500 + 40+ 3000 + 7

= 3m + 5c + 4d +7u

= 4d +5c + 7u +3m

= 3m + 547

= 35c + 4d + 7u

= 2m+ 15c + 2d + 27u

**- A propos des grandeurs**

Donner une fonction au travail sur les grandeurs et la mesure

**Pourquoi mesurer ?**

- La mesure comme **mémoire** d'une grandeur

- La mesure pour **comparer** des grandeurs lorsque les objets ne sont pas disponibles ou directement comparables

- La mesure pour **anticiper** une action

- La mesure pour **prévoir** un résultat

- La mesure et le travail sur les grandeurs comme **point d'appui**

    - pour les opérations arithmétiques

    - pour étendre la notion de nombre…

## Mais que mesure-t-on?

Un objet est le support de plusieurs grandeurs d'espèces différentes

*L'objet :* une brioche

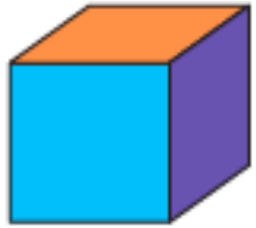
Le type de *grandeur* étudiée : sa longueur, sa masse, son prix, son prix au kilogramme ?

L'activité de mesurage à l'aide d'instruments qui aboutit à la *mesure effective*

La *mesure* de la grandeur en question (une fois une unité fixée).
En cm : 12
En g. : 120
En € : 3
En €/kg. : 25

Il est donc nécessaire de préciser à chaque fois de quelle « grandeur » on parle

On peut ainsi associer à un objet cubique



- une contenance
- un volume
- une masse (liée à la matière)
- des aires *:* celle d'une face ou de toutes les faces
- des longueurs : celles d'une arête, de toutes les arêtes, le périmètre d'une face

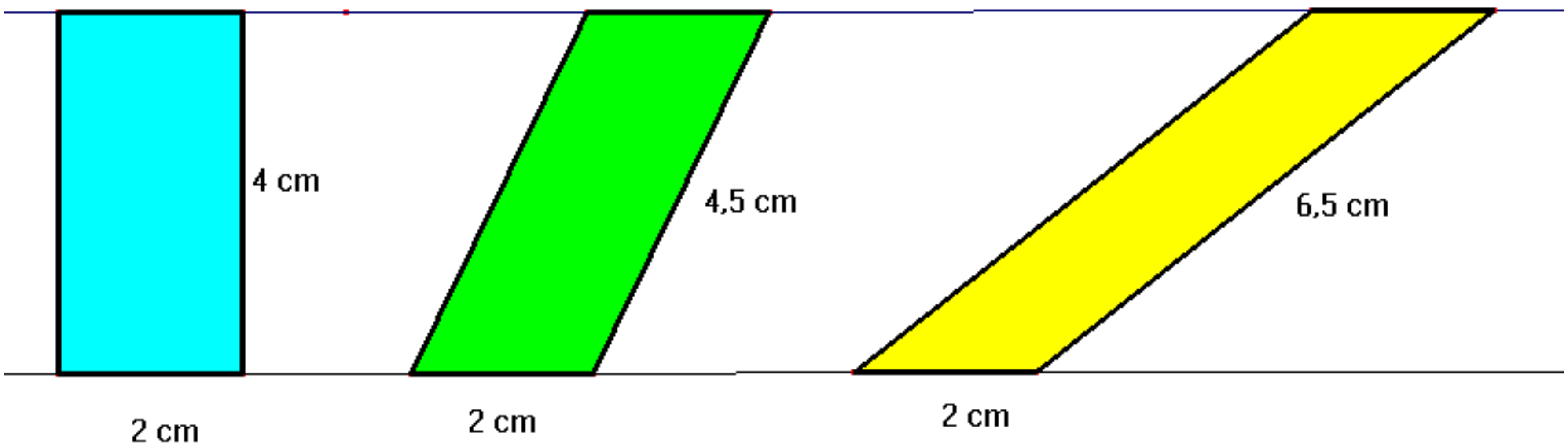
Ce sont donc des **grandeurs** que l'on mesure

Le mot grandeur est un mot générique qui désigne

- les grandeurs simples : longueur, contenance, masse, durée, angle…
- les grandeurs composées :
  - * comme « produits » : aires, volumes…
  - * comme « quotients » : vitesse moyenne, masse volumique…

Et il importe de ne pas rabattre sur le nombre et les « formules » de calcul, le travail sur les grandeurs!

Si les élèves confondent aire et mesure de l’aire, ils cherchent souvent à appliquer des formules, par exemple: « *l’aire est le produit des longueurs des côtés de la figure.* »




8 cm² ??     9 cm² ??     13 cm² ??

Pour comprendre la notion de grandeur, il est essentiel de commencer par des activités

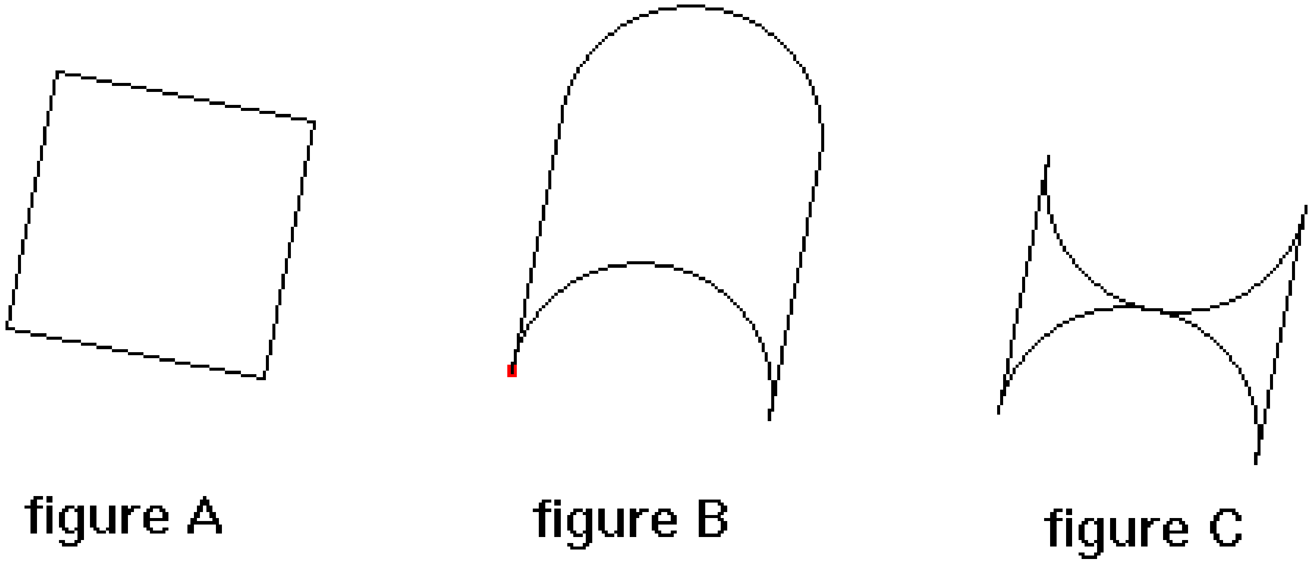
- de comparaison de grandeurs (de même espèce) pour définir les relations :

    * avoir même longueur (par superposition)
    * avoir même masse (par équilibre de la balance type Roberval)
    * avoir même aire (par superposition ou … même masse)
    * avoir même contenance (par transvasement)

- d'opérations sur les grandeurs

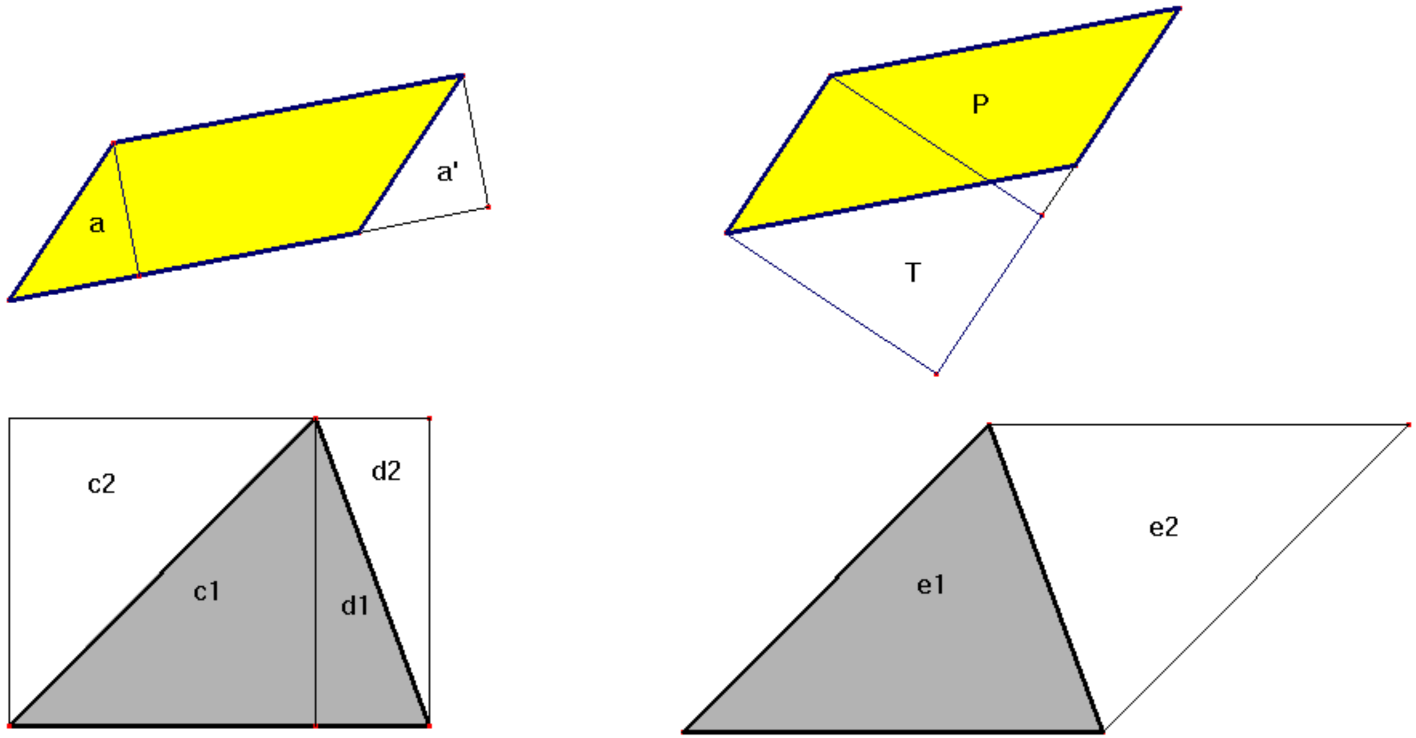
    * addition,
    * multiplication par un entier,
    * fractionnement

Pourquoi travailler sur les grandeurs tout d'abord sans mesurer ?




➢ Pour prendre le temps d'approcher les objets (réels, graphiques) avec des points de vue différents et envisager des grandeurs d'espèces différentes

- Pour développer des compétences de comparaison non numérique : superposer, décomposer et recomposer , compléter en contrôlant

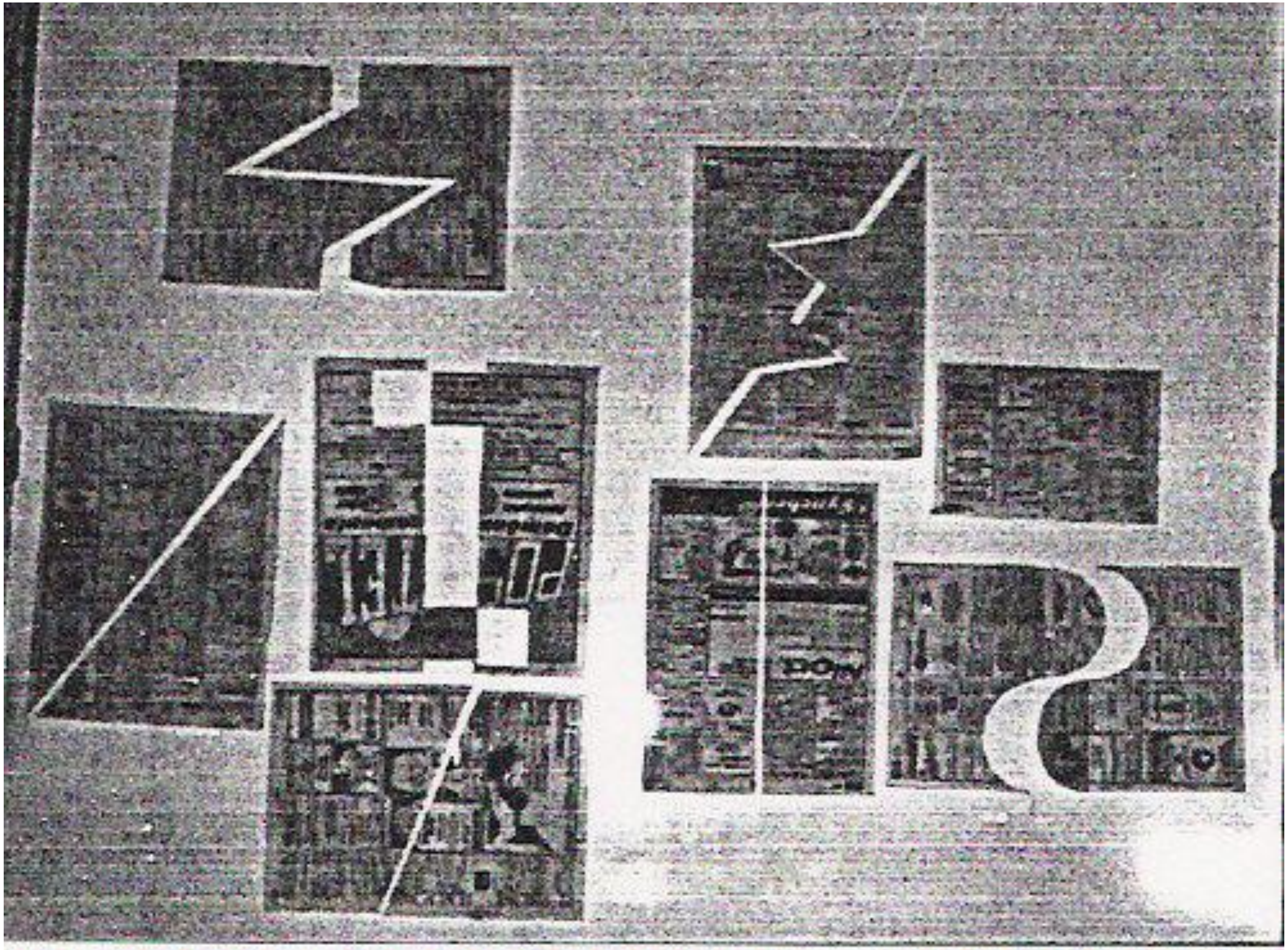


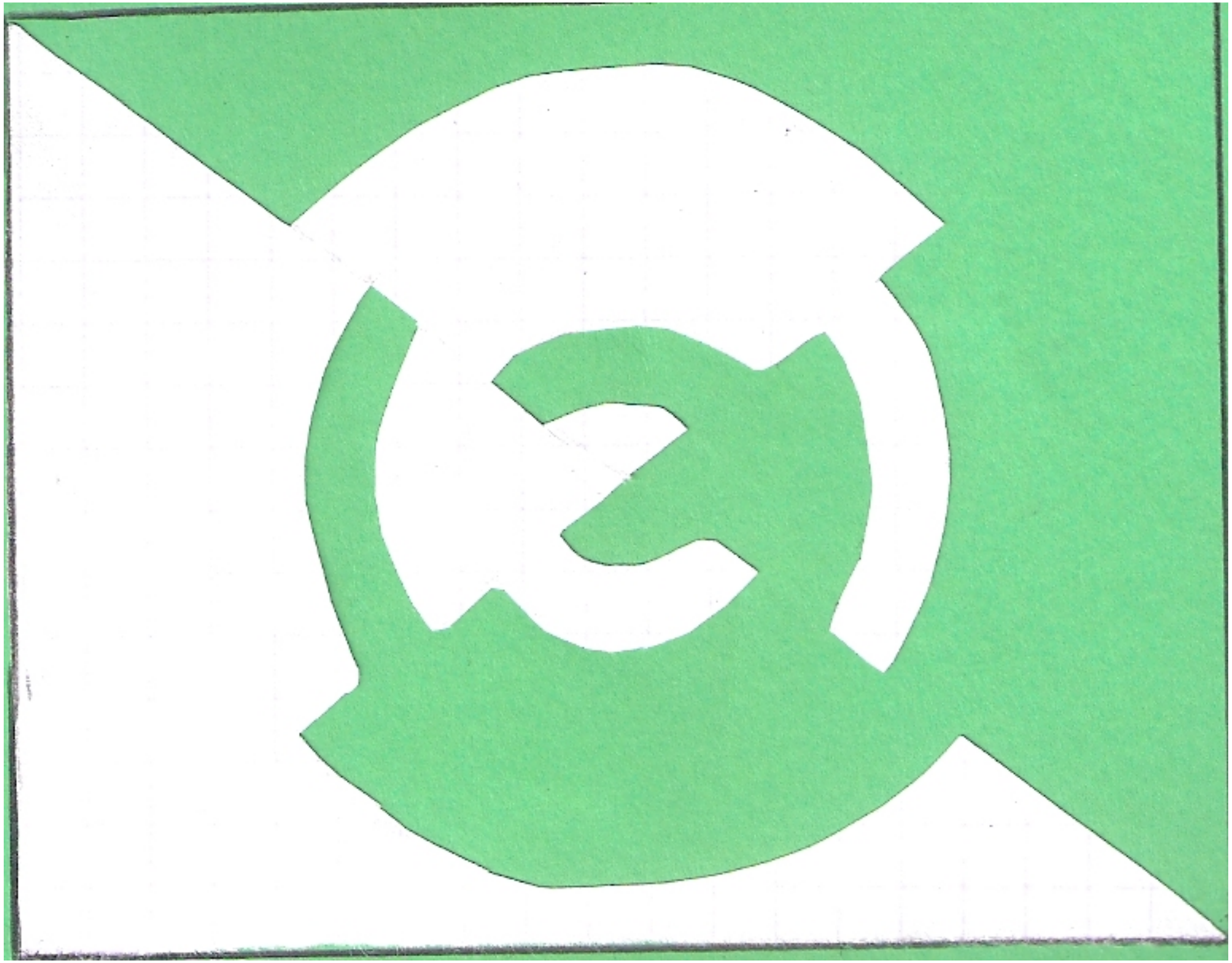

- … pour pouvoir « oublier » les formules de calcul d'aires (sauf celle du rectangle et celle du disque)

Un exemple d’introduction de la grandeur aire, sans faire intervenir la mesure

*« Vous devez partager chaque feuille d'annuaire en deux parties exactement superposables,*
*sans perte de papier*
*et sans recollage*
*(c'est-à-dire qu'avec les deux parties il sera possible de reconstituer la feuille initiale).*
*Vous devez chercher un maximum de partages différents répondant à cette consigne de partage. »*

# *Des exemples de partages*





## - Les relations entre grandeur et mesure

# Deux relations en jeu

## Exemple des longueurs et des aires.

**Objet** → **Grandeur** → **Mesure de la grandeur**

Segment (bande matérialisée par une feuille) ligne → Longueur → nombre réel positif

**Objet** → **Grandeur** → **Mesure de la grandeur**

Surface matérialisée par une feuille → Aire → nombre réel positif

Il n'existe pas d'instrument simple de mesure directe de l'aire d'une surface.

# Ou encore….

| *Objet* plus ou moins modélisé | → | Grandeur | → | Mesure de la grandeur |
|---|---|---|---|---|
| *Solides pleins,*<br>*Solides creux* | | masse<br>contenance<br>volume | | nombre entier,<br>rationnel, réel |
| *Chansons* | | durée | | |
| *Secteurs angulaires* | | angle | | |
| *Objet* | | prix | | |

# Et donc trois familles d’opérations

## *sur les objets*

Comparer
Juxtaposer
Faire coïncider
Découper, dissocier
Assembler, coller
Tracer l’empreinte
Remplir, vider…

## *sur les grandeurs*

Comparer
« Additionner »
« Multiplier par n »
« Établir des rapports »
…

## *sur les nombres*

Comparer
Additionner
Soustraire
Multiplier
Diviser…

Une mesure est donc un **codage numérique**

*(c'est une application d'un ensemble de grandeurs de même espèce, dans l'ensemble des nombres réels)*

ayant les propriétés suivantes

Elle est :

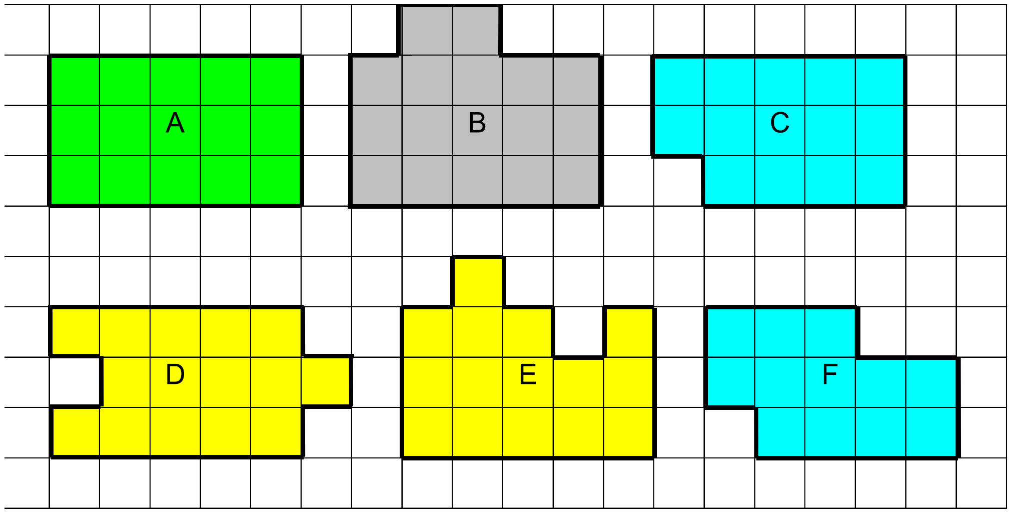
- Positive
- Additive
- Monotone
- Entièrement déterminée par le choix de l'unité

*Et elle vérifie l'inégalité triangulaire*

## Le choix de l'unité

C'est une décision : une aire (une longueur) est choisie comme référence, c'est l'unité d'aire ( de longueur)

Puis on recherche les rapports des autres aires (des autres longueurs) à cette unité. Ces rapports sont les mesures avec l'unité choisie




| | Périmètre | Aire |
|---|---|---|
| A | 16 L | 15 u |
| B | 18 L | 17 u |
| C | 16 L | 14 u |
| D | 20 L | 15 u |
| E | 20 L | 15 u |
| F | 16 L | 12 u |

L = Long de —

u =Aire de

- **Le système métrique**:
ensemble structuré d'unités conventionnelles et légales, élaboré en synergie avec la numération décimale de position

Les conversions d'unités sont à envisager sous deux points de vue :

1. En lien avec la numération
Trouver combien de kilomètres dans 2470 m c'est comme trouver combien de mille dans 2470

# 2. en terme de proportionnalité

Par changement d'unités, les grandeurs sont inchangées, leurs nouvelles mesures sont proportionnelles aux anciennes

| m | cm |
|---|---|
| 1 | 100 |
| 3 | ? |
| 60 | ? |
| ? | 700 |
| ? | 850 |

X 3

X 7

X 100

: 100

| $cm^2$ | $m^2$ |
|---|---|
| 10 000 | 1 |
| ? | 5 |
| 60 000 | ? |
| 65 000 | ? |
| ? | 0,54 |

X 5

: 10 000

x 10 000

Il s'agit d'égalités de grandeurs

3 m = 30 cm 65 000 cm² = 6,5 m²

## Petite mise au point sur les notations

- L'aire d'une surface ne change pas quand l'unité change :
  150 dm$^2$ = 1,5 m$^2$ = 15000 cm$^2$

- La mesure (le nombre seul) change en fonction de l'unité de référence :
  150 si c'est en dm$^2$ ;
  1,5 si c'est en m$^{2;}$
  15000 si c'est en cm$^2$

# Tout ce qui est caché dans un tableau de conversion

| km | hm | dam | m | dm | cm | mm |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 4 | 5 | 7 | 2 | 0 |

- La proportionnalité des mesures (celles en m avec celles en cm, etc.)
- Le coefficient de proportionnalité entre deux colonnes
  ( exemple : colonnes voisines gauche/droite : x 10
  colonnes voisines droite/gauche : x 1/10 )

Ce tableau est une « machine » à multiplier (sens gauche/droite) ou à diviser (sens droite/gauche) par dix, cent, mille…

4572 x 10 = 45 720        457,2 : 1 000 = 0,4572

# Nécessité de la prise conscience de l'aspect arbitraire et conventionnel des unités

De nombreux pays ont adopté le système métrique, mais nos voisins anglais ne l'utilisent pas couramment.

Pour les longueurs et les distances, ils utilisent des unités liées aux étalons corporels.

- 1 « inch » (pouce) correspond à une longueur comprise entre 2 cm 5 mm et 2 cm 6 mm.
- 1 « foot » (pied) vaut 12 inches.
- 1 « yard » (pas) vaut 3 feet (feet est le pluriel de foot).
- 1 « mile » anglais vaut 1 760 yards.

Borne dans la baie de Penzance (Cornouailles)

# … Et de la prise conscience de l'intérêt du système métrique dans toutes les situations de calcul

On partage une baguette mesurant 9 pieds 2 pouces en 4 morceaux de même longueur. Quelle est la longueur de chaque morceau?

Et il est licite de calculer sur les grandeurs

1 m 67 cm + 56 cm= 1 m 123 cm = 2 m 23 cm

*car 100cm = 1m*

1 $m^2$ 75 $dm^2$ + 50 $dm^2$ = 1 $m^2$ 125 $dm^2$ = 2 $m^2$ 25 $dm^2$

*car 100 $dm^2$ = 1$m^2$*

comme déjà pour les durées :

2h 25min + 1h 46min = 3 h71 min = 4h 11 min

*car 60 min =1 h*

$$\frac{1\,\text{km}}{1\,\text{m}} = 1000$$

Mais aussi 4 x 25 cm = 1 m

Et plus tard

$$\frac{105\,\text{km}}{150\,\text{min}} = \frac{105\,\text{km}}{2{,}5\,\text{h}} = 42\,\text{km}/\text{h}$$

$$\frac{5{,}6\,\text{kg}}{28\,\text{cm}^3} = 200\,\text{g}/\text{cm}^3$$

# Importance des estimations, des ordres de grandeurs

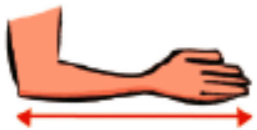
le cas des unités corporelles pour les longueurs

**1** Écris la mesure, en cm, de :

- la largeur de ton pouce

- la longueur de ton empan

- la longueur de ton pied



- la longueur de ta coudée

- la longueur de ton envergure

- la longueur de ton pas moyen

**2** Exprime la longueur d'un mètre à l'aide des étalons corporels qui conviennent.

# Les relations entre différentes grandeurs

# Estimer des longueurs avec des durées

Voici trois phrases dans lesquelles on évalue des distances en utilisant des durées.

# Partie 4

# Une introduction des fractions à partir des grandeurs

Ces nouveaux nombres "pas comme les autres", comment les introduire ?

• Les fractions et les décimaux doivent apparaître comme de **nouveaux nombres**, utiles pour résoudre des problèmes que les entiers ne permettaient pas de résoudre :

- Problèmes de partage
- Problèmes de mesures de longueur et d’aire
- Problèmes de repérage d’un point sur une droite

## Les objectifs à atteindre

- Prendre conscience de l'insuffisance des entiers pour résoudre certains problèmes
- Envisager de nouveaux nombres pour résoudre ces problèmes
- Faire le lien entre ces nombres et les entiers
- Prolonger à ces nombres l'ordre des entiers
- Concevoir qu'entre ces nouveaux nombres, on peut toujours en intercaler un autre
- Prolonger à ces nouveaux nombres les opérations
- Utiliser ces nouveaux nombres dans des situations d'approximation notamment dans le cadre de la mesure des grandeurs
- Utiliser ces nouveaux nombres dans des problèmes variés

## Des points d’appui

- La construction de fractions simples et surtout de fractions décimales est justifiée par le fait qu’elle est utile à une compréhension correcte des nombres décimaux
- Pour les fractions décimales, le passage à l’écriture à virgule est une simple convention
- Ce sont les fractions décimales qui permettent de travailler la signification des chiffres qui composent la partie décimale d’un nombre décimal et donc de faire le lien avec la numération des entiers

## *Premier temps*

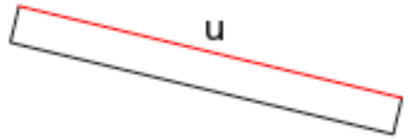
- Prise de conscience de l’insuffisance des entiers :

Situation de communication autour de la construction d’un segment conduisant au partage d’un segment dont la longueur est choisie comme unité (pliage)

Dessine 1 segment avec la longueur de l'unité.
Plis la bande en ~~4~~3, débrouille toi pour y arriver
Enlève un morceau.

une unité – une
unité pliée en 3 +
un tout petit peu.

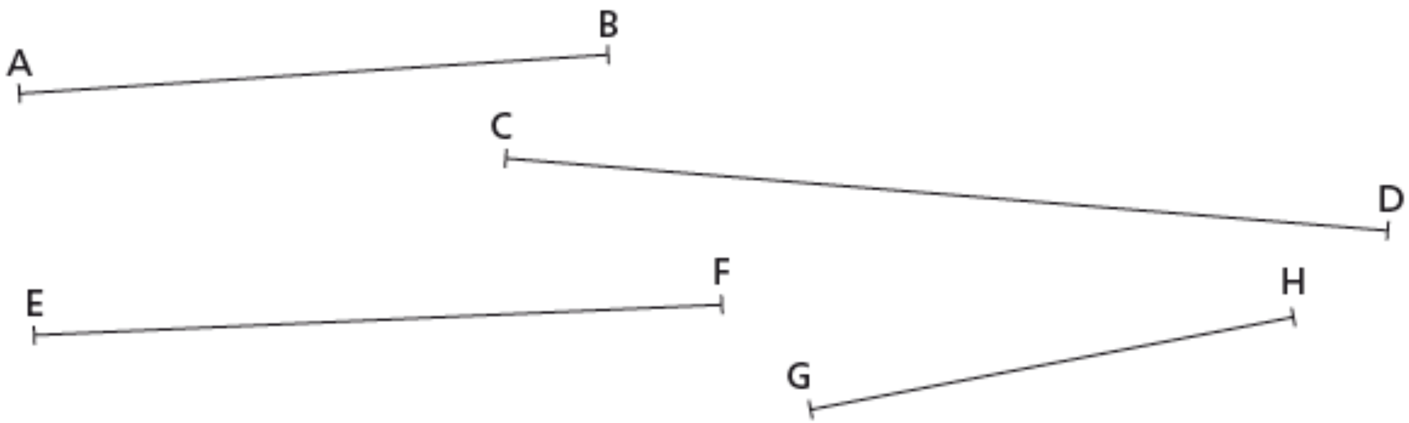
Pour mesurer la longueur d'un segment,
Leïla s'est servi du segment u qu'elle a pris pour unité.



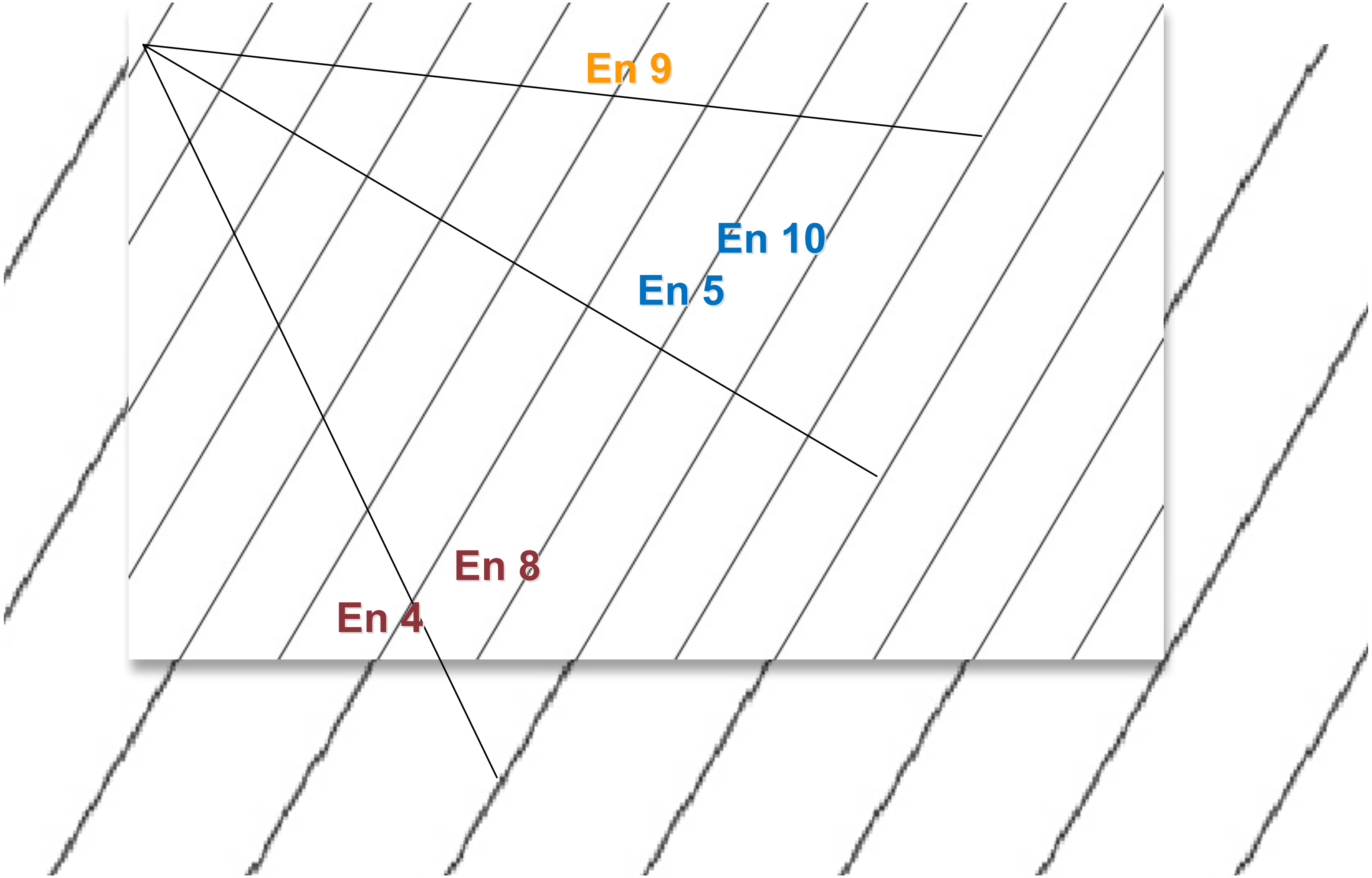

Elle a reporté une fois l'unité u, puis la moitié de u, et enfin le quart de u.

Elle a écrit : $u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u$


**1** Reproduis la bande de l'unité u. En te servant de cette bande, trouve quel segment Leïla a mesuré.



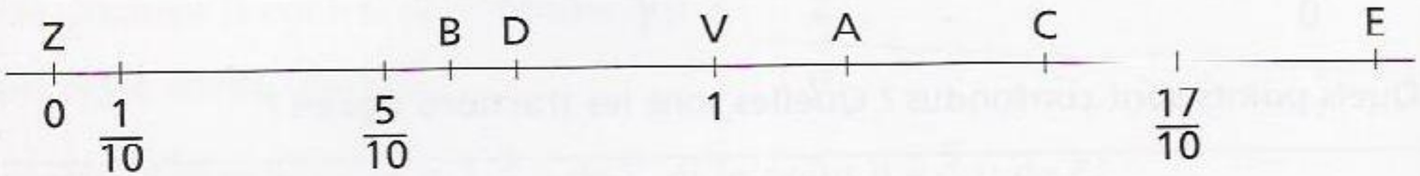
- Introduction de la « machine à partager » pour construire un ensemble de fractions plus riches, notamment des fractions décimales



## *Deuxième temps*

- Utilisation des fractions pour graduer la droite numérique

a. Reproduis cette droite et continue à la graduer en dixièmes.




b. Indique la position des points A, B, C, D, E.

c. Place le point F à $\frac{9}{10}$ u de Z, le point G à $\frac{21}{10}$ u de Z, et le point H à $\frac{16}{10}$ u de Z.

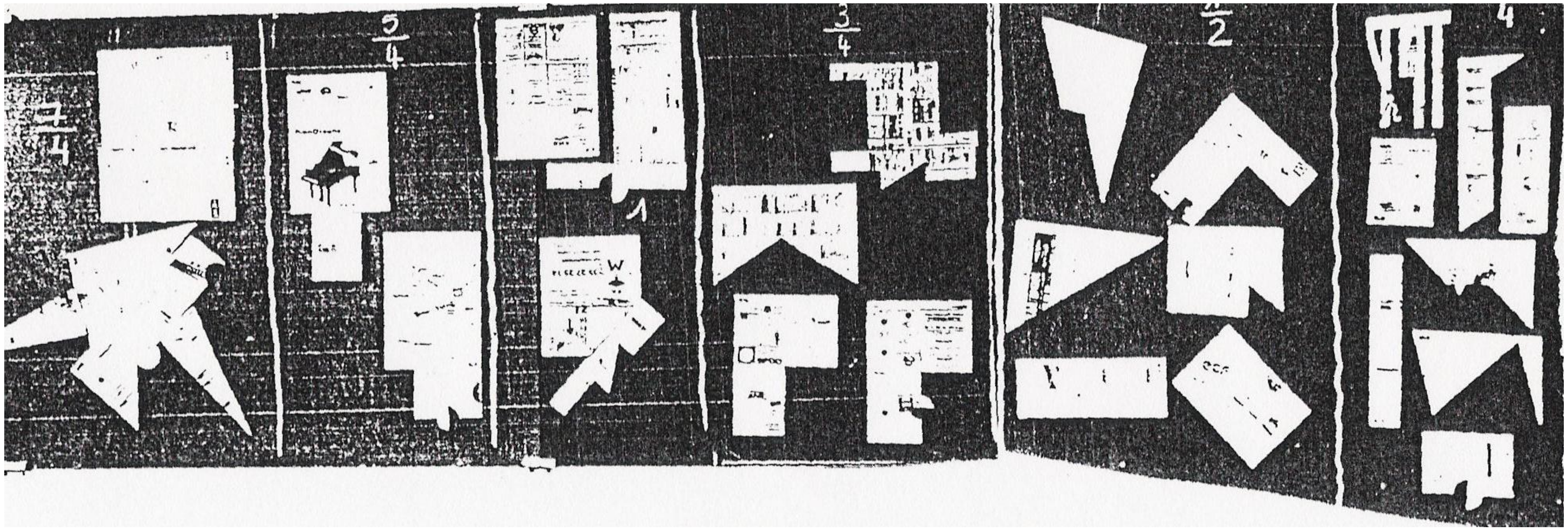
Plusieurs fractions désignent le même point de la droite

**Les fractions sont des nombres… puisque l'on peut les comparer, les additionner, les soustraire…**

## *Troisième temps*

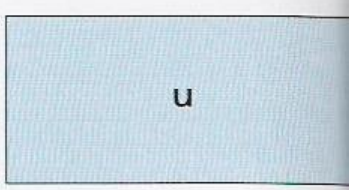
Les fractions permettent aussi d'exprimer la mesure de l'aire de figures planes
dès lors que l'on a choisi une aire unité

A partir du partage d’une feuille A4 en deux parties exactement superposables, et en itérant le procédé construction de familles de surfaces de même aire (classes d’équivalence) qu’il sera possible d’ordonner et auxquelles il sera possible, après avoir choisi une unité, d’associer un « nombre » qui rendra compte de la propriété d’additivité de la mesure à partir de l’addition des aires par juxtaposition des surfaces



**Activité préparatoire de découverte :** En prenant comme unité l'aire d'une feuille de format A4 rectangulaire demander aux élèves, d'abord de construire des surfaces d'aire donnée (2 unités, 3 unités, 1/2 unité, 2 unités et 1/2...), puis d'évaluer l'aire de différentes surfaces à partir d'assemblages des surfaces du matériel.

## Découverte




L'aire de la surface du rectangle bleu est choisie pour unité u.

**1.** Construis une surface de même aire que la surface u mais de forme différente.

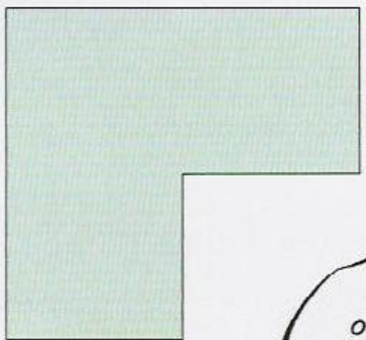
**2.** Construis des surfaces d'aire 2 u, 4 u, 5 u.

**3.** Construis une surface d'aire $\frac{1}{2}$ de u.

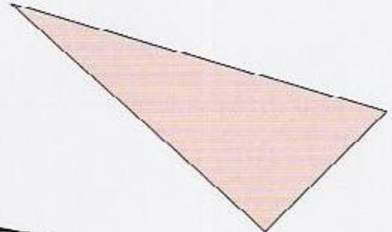
**4.** Construis une surface dont l'aire est comprise entre 2 u et demie et 3 u.


**5.** Détermine les aires des surfaces suivantes. Tu peux les reproduire en utilisant l'unité u.

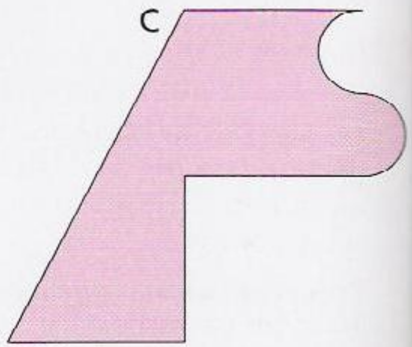
A



B



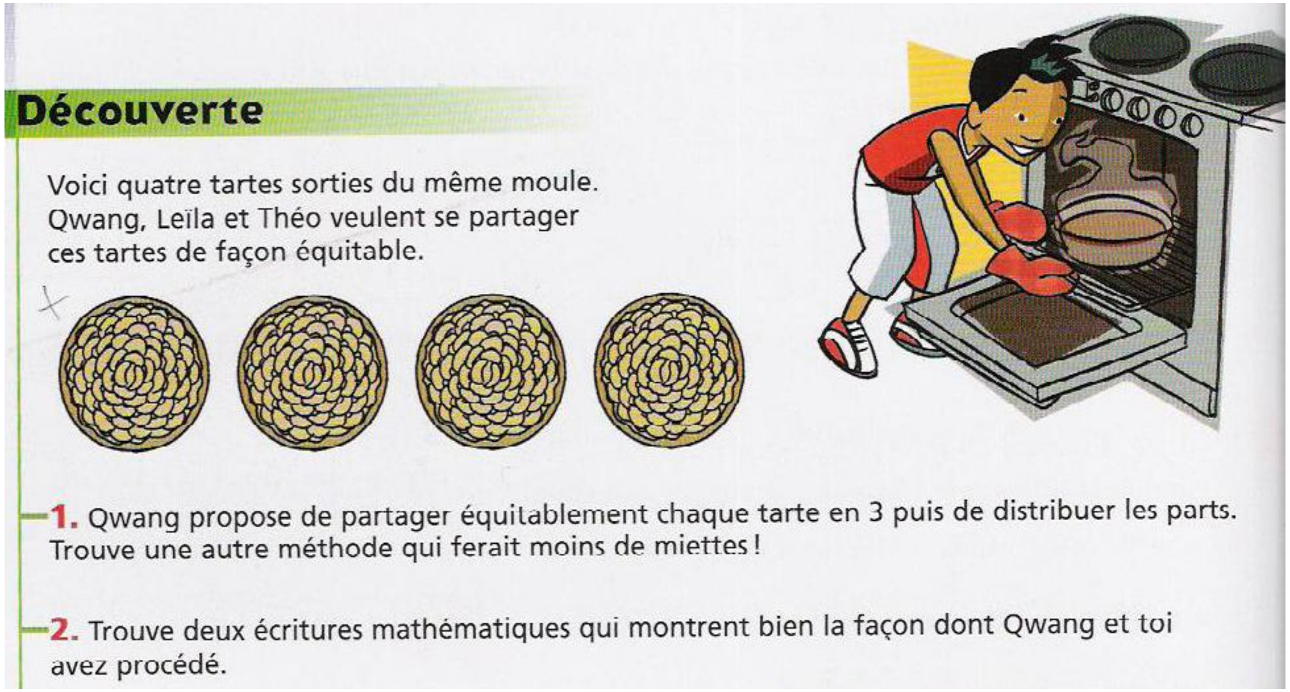
C



## *Quatrième temps*

- Lien avec la division

  Une fraction supérieure à 1 peut être envisagée de deux façons



**Découverte**

Voici quatre tartes sorties du même moule.
Qwang, Leïla et Théo veulent se partager ces tartes de façon équitable.

1. Qwang propose de partager équitablement chaque tarte en 3 puis de distribuer les parts. Trouve une autre méthode qui ferait moins de miettes !

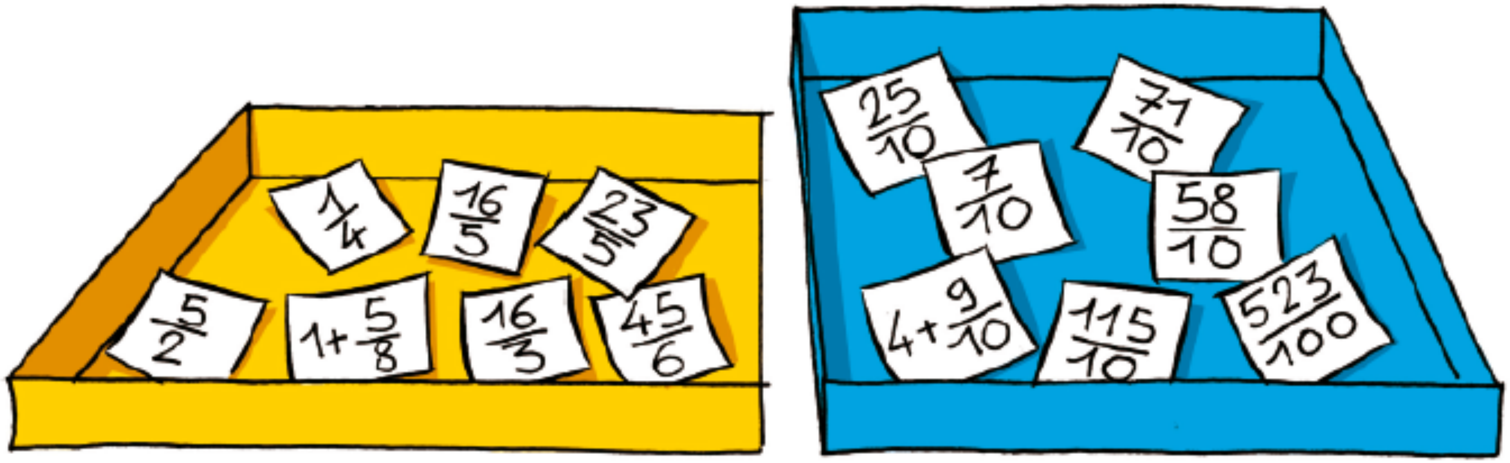
2. Trouve deux écritures mathématiques qui montrent bien la façon dont Qwang et toi avez procédé.

$$\frac{4}{3} = 4 \times \frac{1}{3}$$

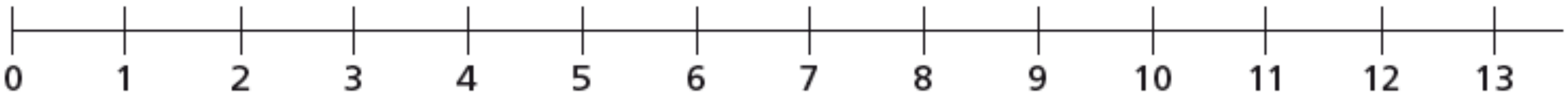
$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

## *Cinquième temps*

- Les fractions décimales… pourquoi elles?




Tu dois encadrer les nombres écrits sur les étiquettes par deux entiers consécutifs.
Tu peux choisir les nombres de la boîte jaune ou les nombres de la boîte bleue.
Effectue les encadrements. Place approximativement les nombres sur une droite graduée comme celle-ci.




Quelle boîte as-tu choisie et pour quelles raisons ?

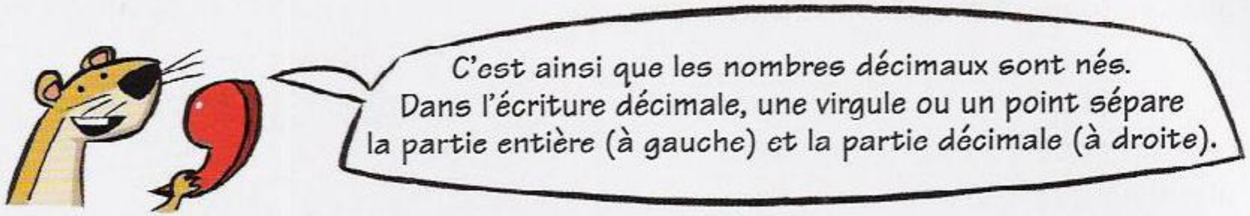
# Les nombres décimaux : écritures chiffrées des fractions décimales

## Découverte

Il y a de cela plusieurs siècles, le mathématicien Stevin de Bruges (1548-1620), voyant les commerçants bien ennuyés pour calculer avec les fractions, proposa d'utiliser les fractions décimales et de les écrire plus simplement. Par exemple :

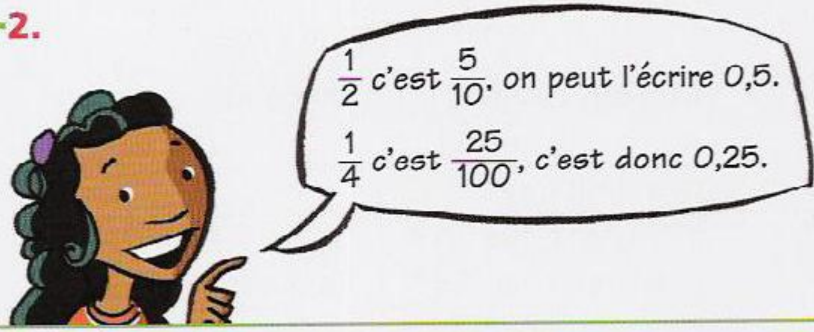
– pour $\frac{23}{10}$, c'est-à-dire $2 + \frac{3}{10}$, il proposa : 2,3

– pour $\frac{352}{100}$, c'est-à-dire $3 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100}$, il proposa : 3,52




**1.** Donne les écritures décimales des fractions : $\frac{34}{10}$ ; $\frac{23}{100}$ ; $\frac{7}{10}$ ; $\frac{675}{100}$ ; $\frac{457}{10}$.

**2.**




Es-tu d'accord avec Leïla ? Explique ta réponse.

À ton tour, trouve l'écriture décimale de $\frac{1}{5}$.

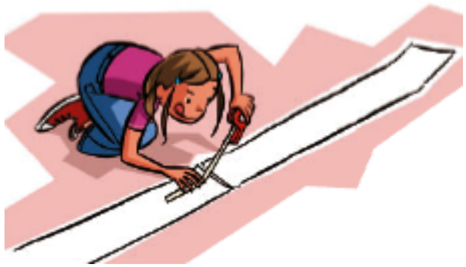
Voici comment les mathématiciens ont décidé d'écrire les fractions décimales

| | fraction décimale | écriture à virgule | partie entière + "rompu" | lecture |
|---|---|---|---|---|
| a | $\frac{257}{10}$ | 25,7 | $25 + \frac{7}{10}$ | 25 et 7 dixièmes |
| b | $\frac{2365}{1000}$ | 2,365 | $2 + \frac{365}{1000}$ | 2 et 365 millièmes |
| c | $\frac{46}{100}$ | 0,46 | | |
| d | $\frac{7}{10}$ | 0,7 | | |
| e | $\frac{405}{100}$ | 4,05 | | |
| f | $\frac{607}{1000}$ | 0,607 | | |
| g | $\frac{34}{10}$ | | | |
| h | $\frac{9}{100}$ | | | |
| i | $\frac{703}{10}$ | | | |
| j | | 5,23 | | |
| k | | 75,2 | | |
| l | | 0,061 | | |
| m | | | $40 + \frac{8}{10}$ | |
| n | | | $9 + \frac{2}{100}$ | |
| p | | | | 17 et 34 centièmes |
| q | | | | 3 et 27 millièmes |

## *sixième temps*

L’extension
- de la relation d’ordre
- des opérations à ce nouvel ensemble de nombres

# l'addition des nombres décimaux



$$1,45 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100}$$

$$2,7 = 2 + \frac{7}{10}$$

$$\begin{array}{r} 1,45 \\ +\ 2,7\phantom{5} \\ \hline \end{array}$$

# Le produit d'un décimal par un entier,  tout va bien!

**a. Théo**

$$\begin{array}{r} 2,35 \\ +\;2,35 \\ +\;2,35 \\ +\;2,35 \\ \hline \dots\dots\dots \end{array}$$

**b. Qwang**

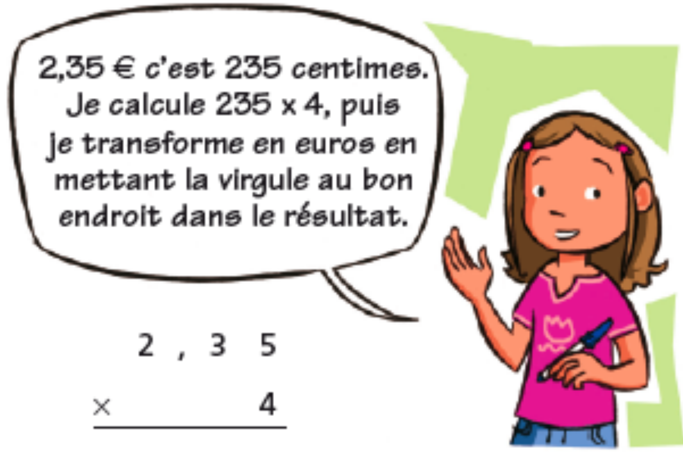

| | 2 | $\frac{3}{10}$ | $\frac{5}{100}$ |
|---|---|---|---|
| 4 | $4 \times 2 = \dots$ | $4 \times \frac{3}{10} = \dots$ | $4 \times \frac{5}{100} = \dots$ |

$2{,}35 \times 4 = \dots$

**c. Leïla** propose alors la multiplication en colonne, pas à pas.

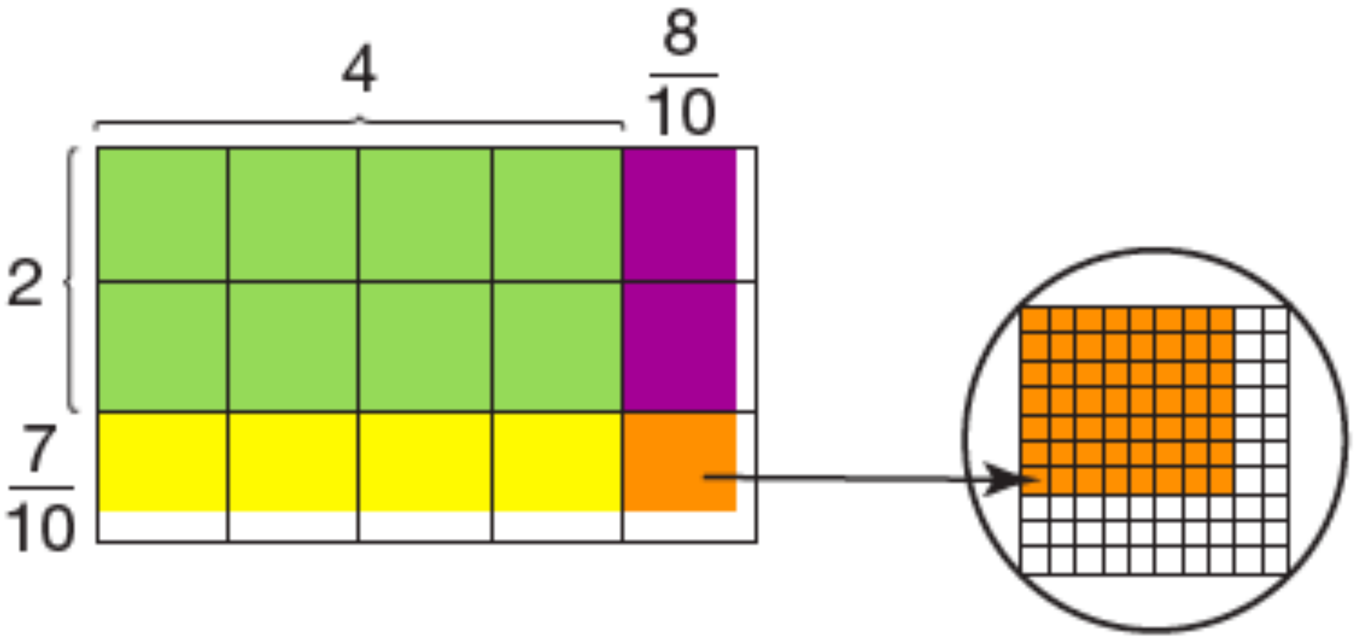
$$\begin{array}{rl} 2,35 & \\ \times\quad 4 & \\ \hline \dots\dots\dots & \leftarrow 4 \times 0{,}05 \\ \dots\dots\dots & \leftarrow 4 \times 0{,}3 \\ \dots\dots\dots & \leftarrow 4 \times 2 \\ \hline \dots\dots\dots & \leftarrow 2{,}35 \times 4 \end{array}$$

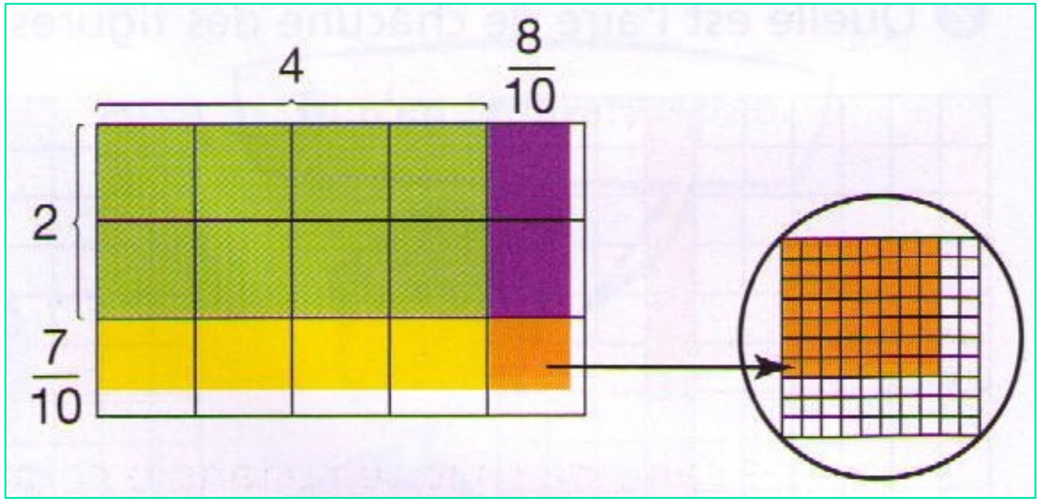
**d. Alice**




$$\begin{array}{r} 2,35 \\ \times\quad 4 \\ \hline \dots\dots\dots \end{array}$$

## Le produit de deux décimaux
Un véritable obstacle : l'addition réitérée n'a plus de sens! Un retour à l'aire est nécessaire

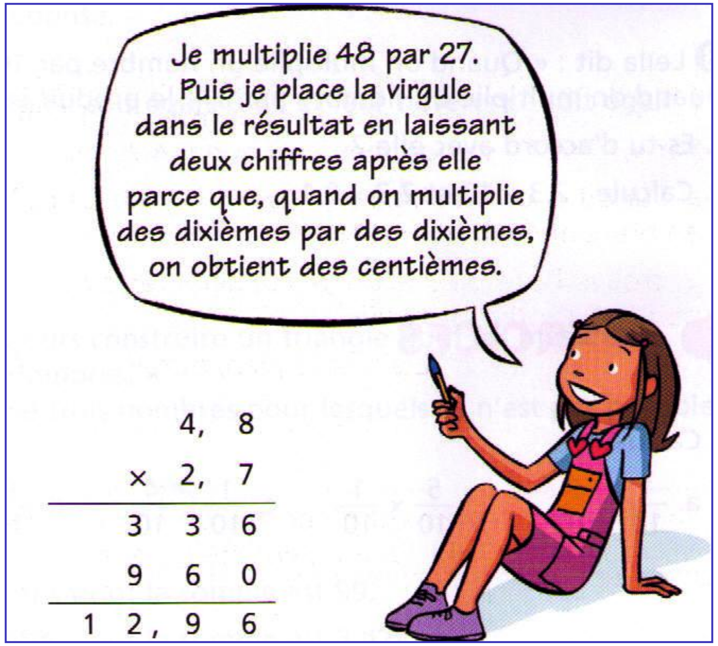





| | |
|---|---|
| $4,8$ | |
| $\times\ 2,7$ | |
| ............... | ← $0,7 \times 0,8$ |
| ............... | ← $0,7 \times 4$ |
| ............... | ← $2 \times 0,8$ |
| ............... | ← $2 \times 4$ |
| ............... | ← $4,8 \times 2,7$ |

| | 4 | $\frac{8}{10}$ |
|---|---|---|
| 2 | ...... | ...... |
| $\frac{7}{10}$ | ...... | ...... |

$4,8 \times 2,7 =$ .....



# Conclusion

L’apprentissage des grandeurs joue un rôle important dans les mathématiques pour la vie citoyenne

Il construit un chemin entre les insuffisances du perceptif, l’intérêt des instruments (qu’il est nécessaire d’apprendre à utiliser) et la puissance du raisonnement (dont le calcul).

Il prépare un terrain d’expériences pour de nombreux concepts mathématiques : nombres entiers et non entiers, opération sur les nombres

C’est un domaine prétexte à l’interdisciplinarité : au croisement des sciences (physique, technologie), de l’histoire (étude d’unités de mesures et d’instruments anciens), de la géographie (étude d’unités de mesures utilisées dans d’autres pays).

Et bien sûr, dans le domaine géométrique, son importance est tout aussi grande (comment envisager par exemple le concept fondamental de distance sans s’appuyer sur les longueurs), mais c’est un autre sujet…

Il reste un vaste travail de redéfinition des savoirs savants de second ordre pour justifier les savoirs à enseigner, leur donner une cohérence et participer ainsi à une formation solide en mathématiques des professeurs de l'école primaire adaptée à leur mission auprès des élèves

# Bibliographie

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en Didactique des Mathéatiques, 30*, 317–366.

Perrin-Glorian, M.J. (1989-1990) L'aire et la mesure, Petit x n°24, 5-36.

Rouche N. (1992) *Le sens de la mesure*. Bruxelles : Didier Hatier

Rouche N. (2006) *Du quotidien aux mathématiques : Nombres, grandeurs, proportions*. Ellipses

***Merci***
***de m'avoir écoutée !***