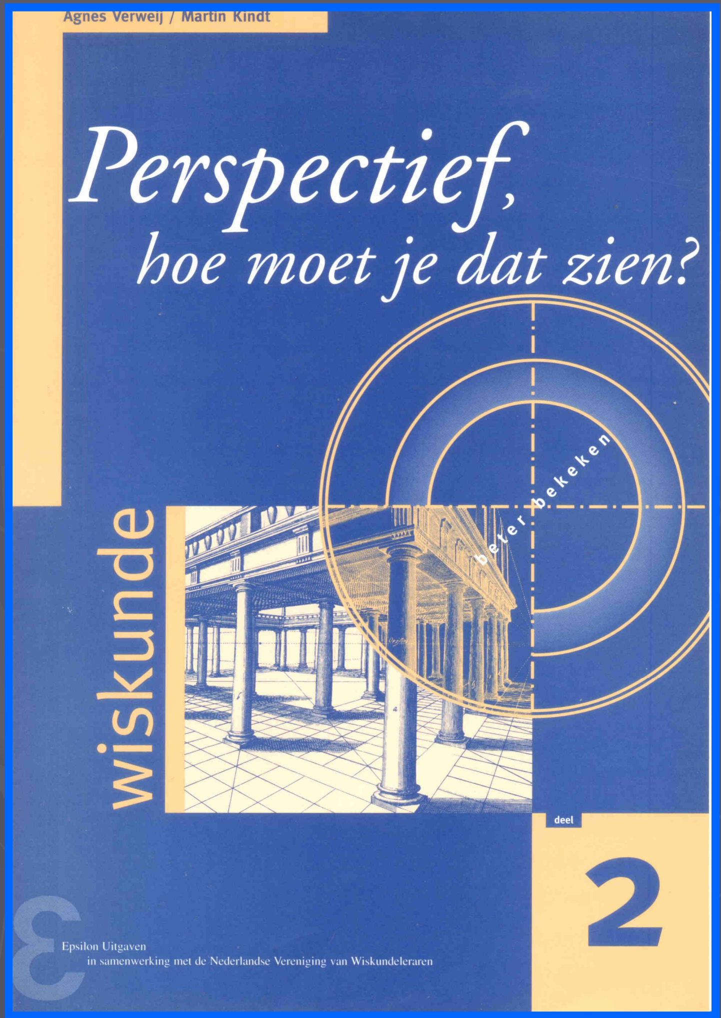
Moiré

Nivelles, 8 mars 2013

1. Introduction



- Le projet sur le moiré est développé pour des élèves du troisième degré de l'enseignement secondaire. Mes élèves ont 17 et 18 ans. Ils ont 8 heures de mathématiques par semaine, dont 2 heures sont libres.
- Je n'ai aucune expérience de la prise de parole devant un public francophone et je n'ai jamais l'occasion de pratiquer le fançais. C'est pourquoi je suis heureux d'avoir l'assistance de Marie-France.
- Cet exposé est basé sur un cahier qui va être publié dans la série 'Zèbre' des éditeurs 'Epsilon' à Utrecht. Les textes sont écrits pour des étudiants dans les dernières années de l'école secondaire.

1. Introduction

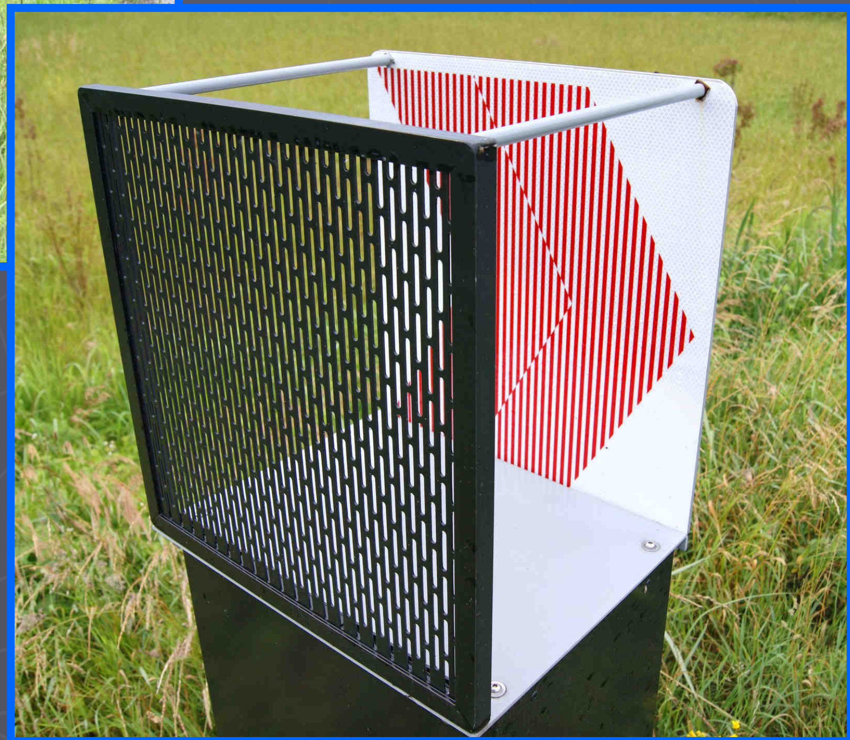
Dans la vie quotidienne, nous rencontrons le phénomène de ‘moirage’ dans des tissus élégants pour les vêtements et l’ameublement, des rideaux, des serviettes de table, des coussins …

On peut obtenir un effet de moiré en superposant deux voiles à maille régulière qui passent entre deux cylindres fortement chauffés. Les tissus moirés présentent des reflets changeants plus ou moins ondulés, brillants et irisés.

1. Introduction

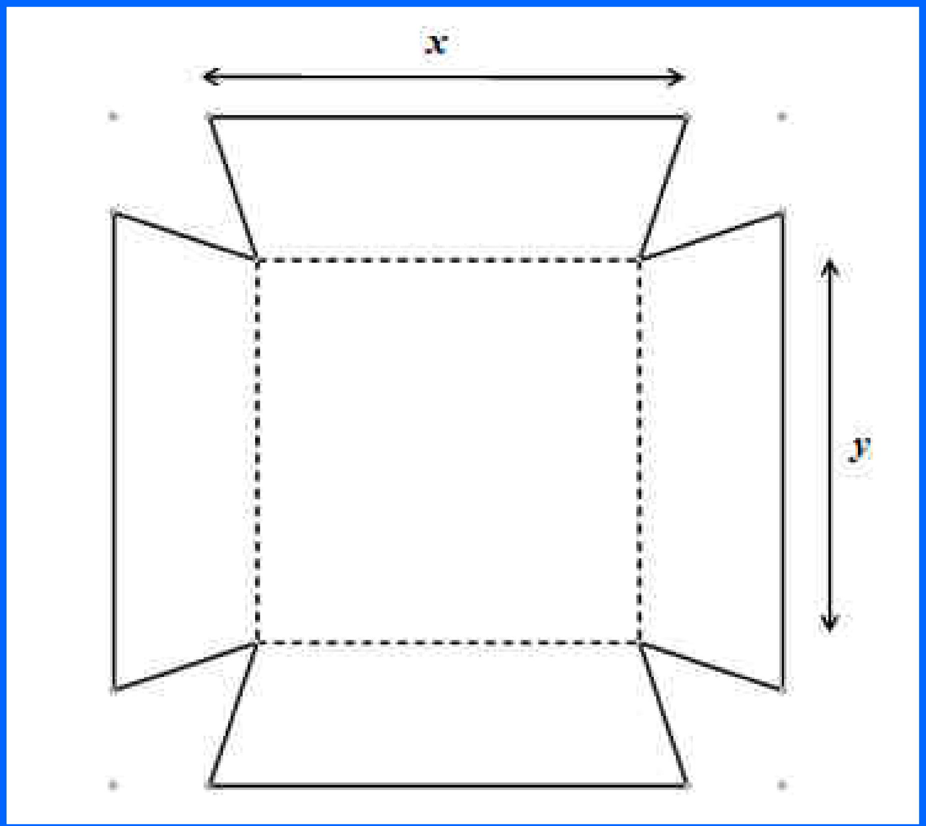
Mais on voit aussi l'effet de moirage quand on observe deux grillages, placés l'un derrière l'autre.

1. Introduction



Voici une photo d’une signalisation dans un virage de la rue ou j’habite. Les flèches semblent aller en avant par l’effet moiré des deux réseaux de lignes superposés. Il y a une grille métallique au premier plan et un motif de lignes peintes au fond.

2. Fonctions à deux variables



$$z = \frac{(x^2 + y^2 + xy)\sqrt{1 - 2y + 2xy - x^2}}{6}$$

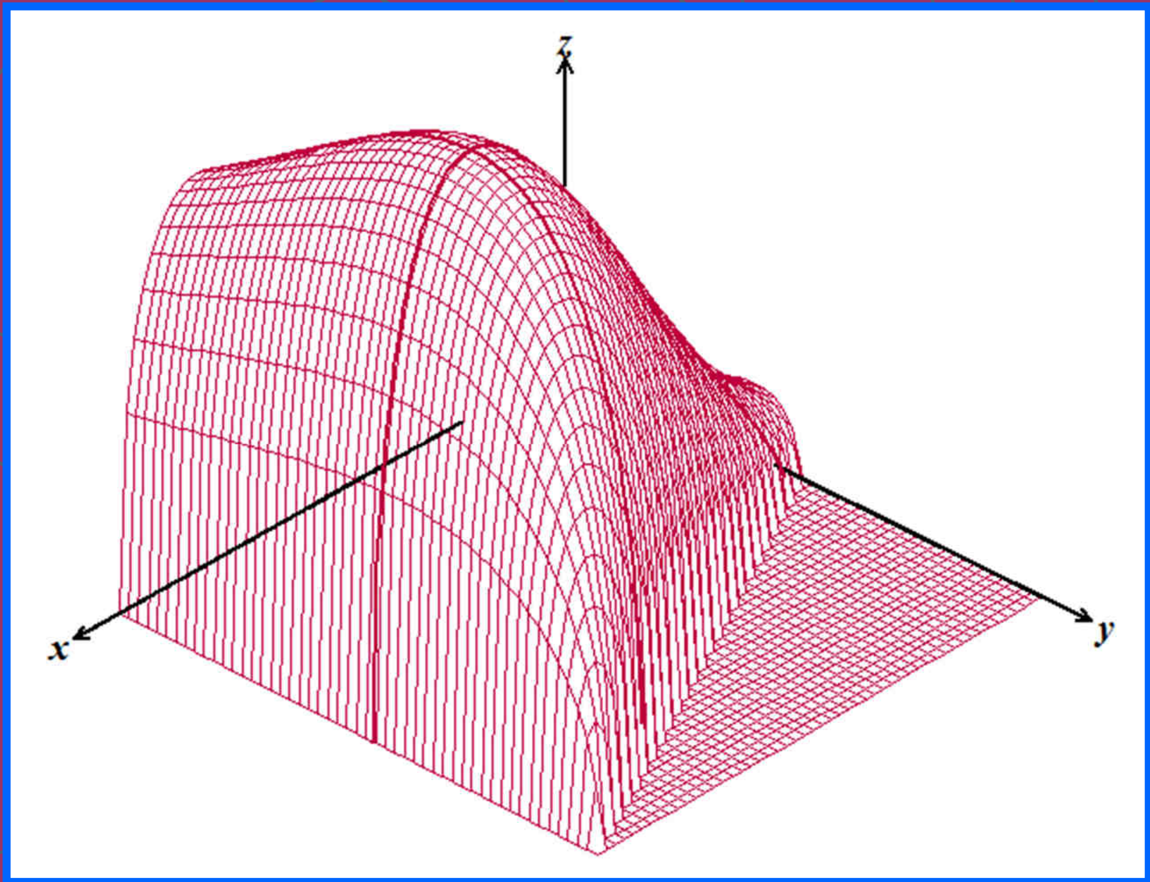
- Dans une première phase, nous enseignons aux élèves à faire des représentations graphiques des fonctions à deux variables.
- Nous donnons des exemples simples dans les mathématiques ou les sciences.
- À gauche, nous calculons par exemple le contenu *z* d'une boîte construite à partir d'un carton carré d'un décimètre de côté . Les deux variables *x* et *y* sont indiquées sur le diagramme. La formule est donnée.

2. Fonctions à deux variables

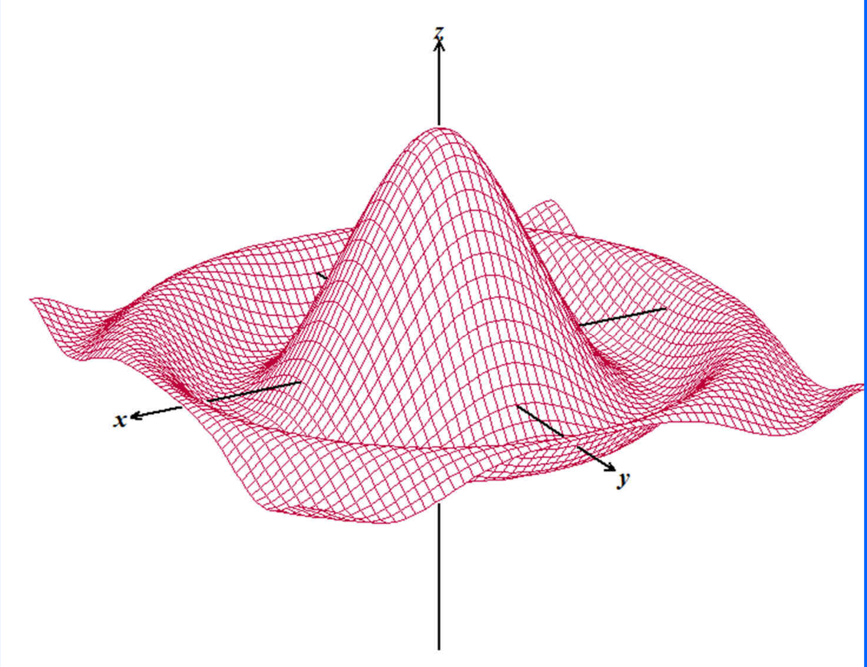
Les élèves font un graphique avec le logiciel gratuit **Winplot** ou avec le logiciel commercial **Derive**.

Puis ils essayent d'interpréter le graphique:

- chercher le domaine;
- chercher le maximum;
- décrire les sections transversales;
- décrire les courbes de niveau.



3. Courbes de niveau



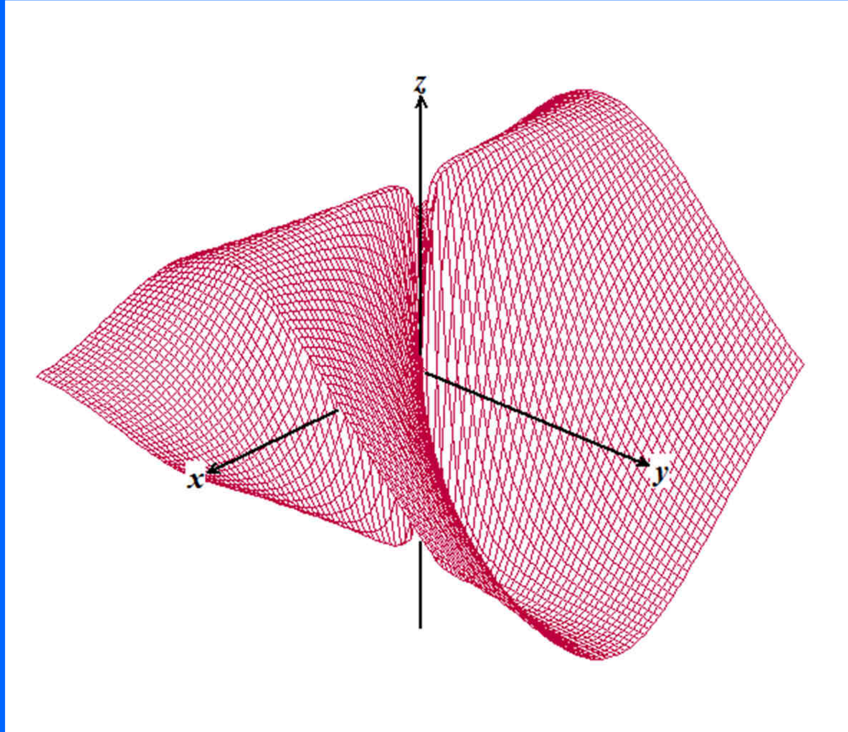
$$f(x,y) = \frac{12}{3+x^2+y^2}\cos\left(\frac{x^2+y^2}{4}\right)$$

Pour quelques fonctions il est facile de prédire quelles sont les courbes de niveau. Par exemple: dans le cas de la fonction 'sombrero' les courbes de niveau sont des cercles décrits par:

$$x^2 + y^2 = c$$

On peut contrôler les équations des courbes de niveau par une substitution double dans l'équation de la fonction 'sombrero'.

3. Courbes de niveau



$$f(x,y) = 4 \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Pour d' autres fonctions il n'est pas évident de deviner les équations des courbes de niveau.

Exercice 1:

Quels sont les courbes de niveau de la fonction à gauche? Donnez une preuve.

3. Courbes de niveau

Réponse:

$$4 \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = c$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4y^2 = c \cdot x^2 + c \cdot y^2$$

$$\Leftrightarrow (4-c)x^2 = (4+c)y^2$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{4-c}{4+c}} \cdot x \quad \vee \quad y = -\sqrt{\frac{4-c}{4+c}} \cdot x$$

Les courbes de niveau sont des droites passant par l'origine mais perforées à l'origine.

$z = f(x,y)$

3. Courbes de niveau

Théorie:

La fonction à deux variables

$$z = f(x,y)$$

dont le graphique est coupé par des plans équidistants

$$z = n \cdot c$$

avec *n* un nombre entier et *c* la distance entre deux plans consécutifs

a un diagramme de courbes de niveau donné par l'équation

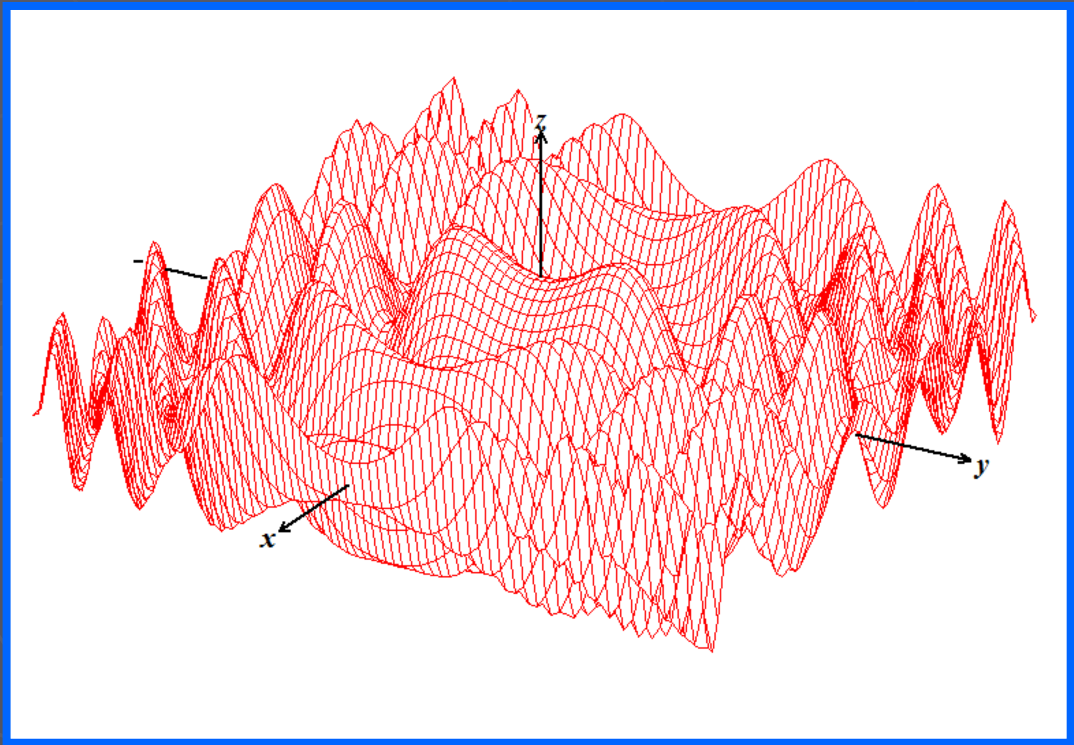
$$\boxed{f(x,y) = n \cdot c \qquad (n \in Z)}$$

3. Courbes de niveau

Exemple:

Cherchez à l'aide de WinPlot le diagramme des courbes de niveau de la fonction

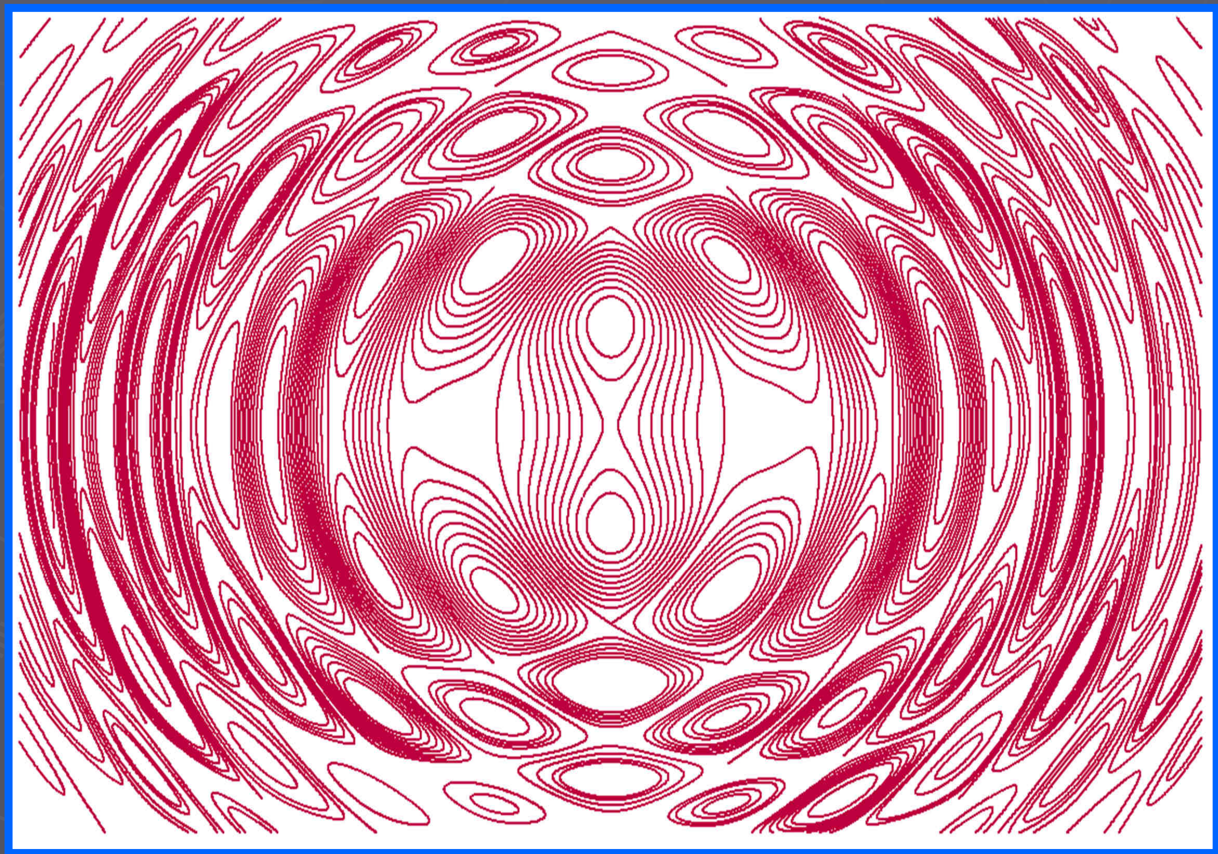
$$f(x,y)=\sin\left(\left(x-1\right)^2+y^2\right)\cdot\sin\left(\left(x+1\right)^2+y^2\right)$$



3. Courbes de niveau

Pour $c = 0.05$ et $-20 < n < 20$ l'équation générale des courbes de niveau

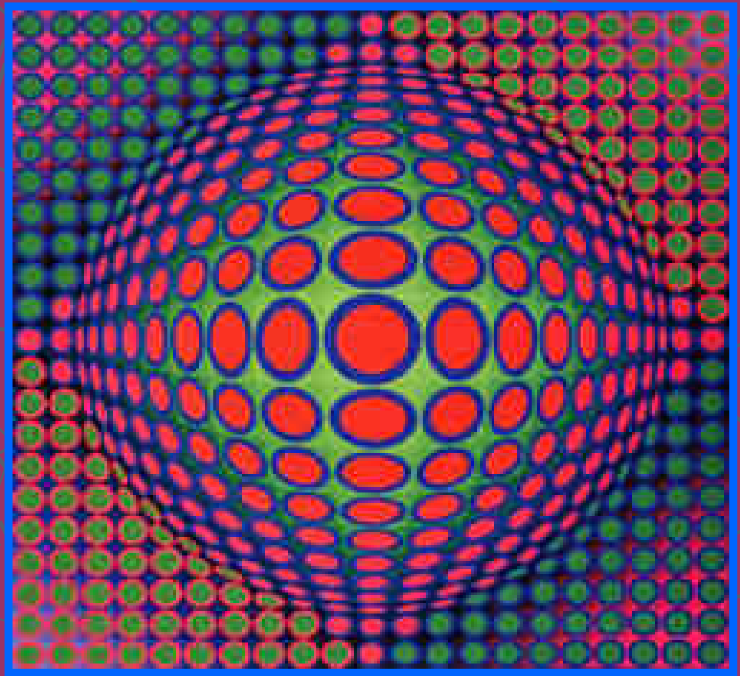
$\sin\left(\left(x-1\right)^2+y^2\right)\cdot\sin\left(\left(x+1\right)^2+y^2\right)=n\cdot c$ donne la représentation:

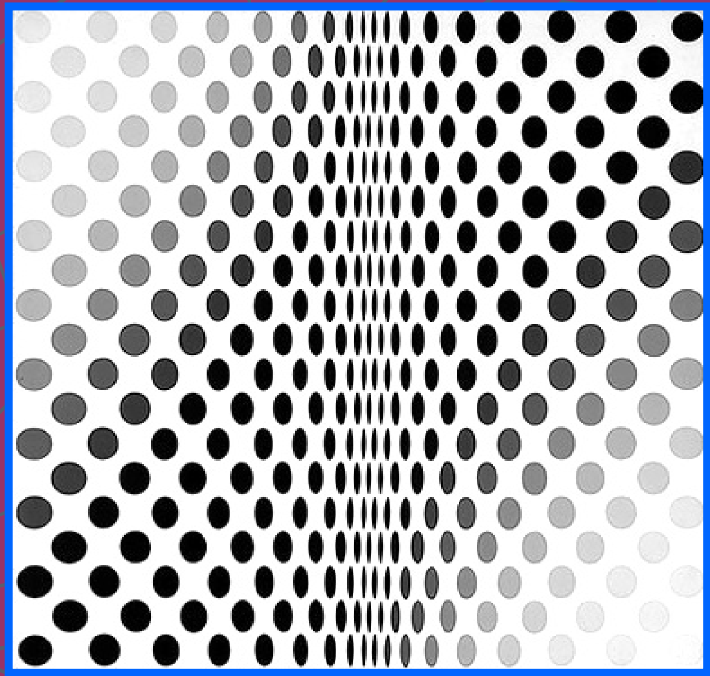


4. Op - art

Op Art, ou art optique, est un terme utilisé pour décrire certaines pratiques artistiques, faites à partir de l'exposition *L'œil réceptif* à New York en 1965.

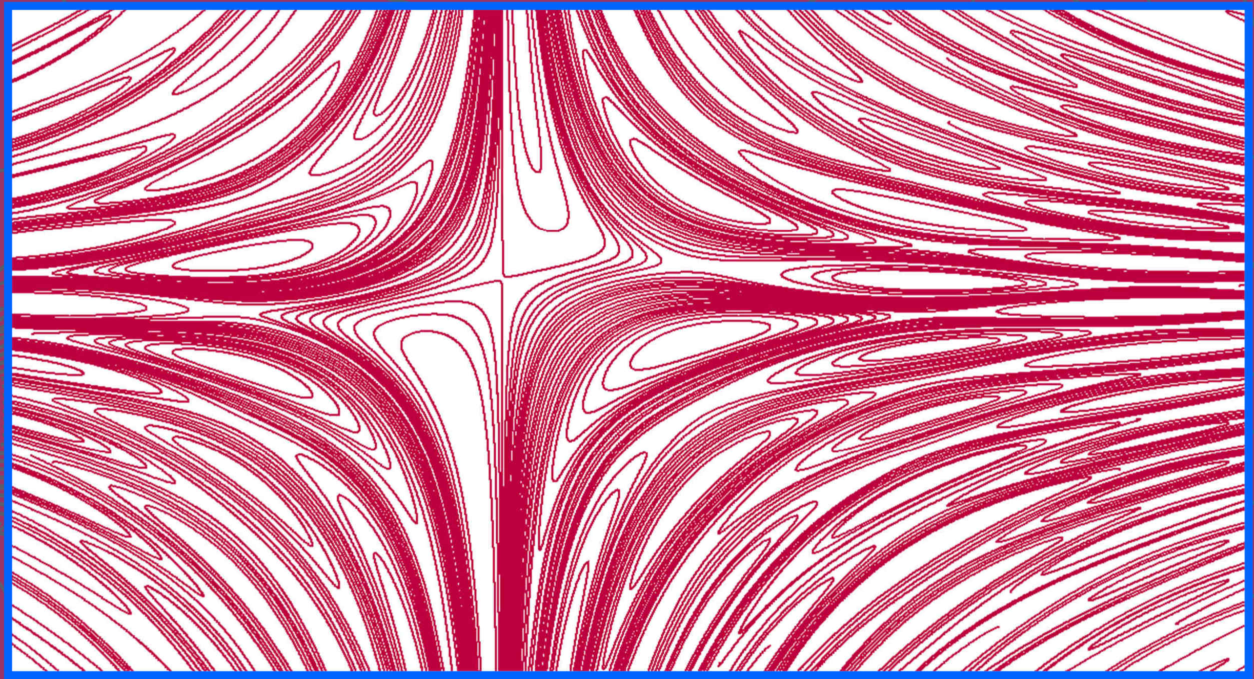
- **Victor Vasarely**, artiste né en Hongrie, était une figure essentielle dans l'histoire de l'Op Art. Dans ses œuvres il aimait créer une illusion de trois dimensions.
- Les pièces les plus connues de **Bridget Riley** sont réalisées en noir et blanc et donnent l'impression de mouvement, d'éclat de lumière et de vibration.





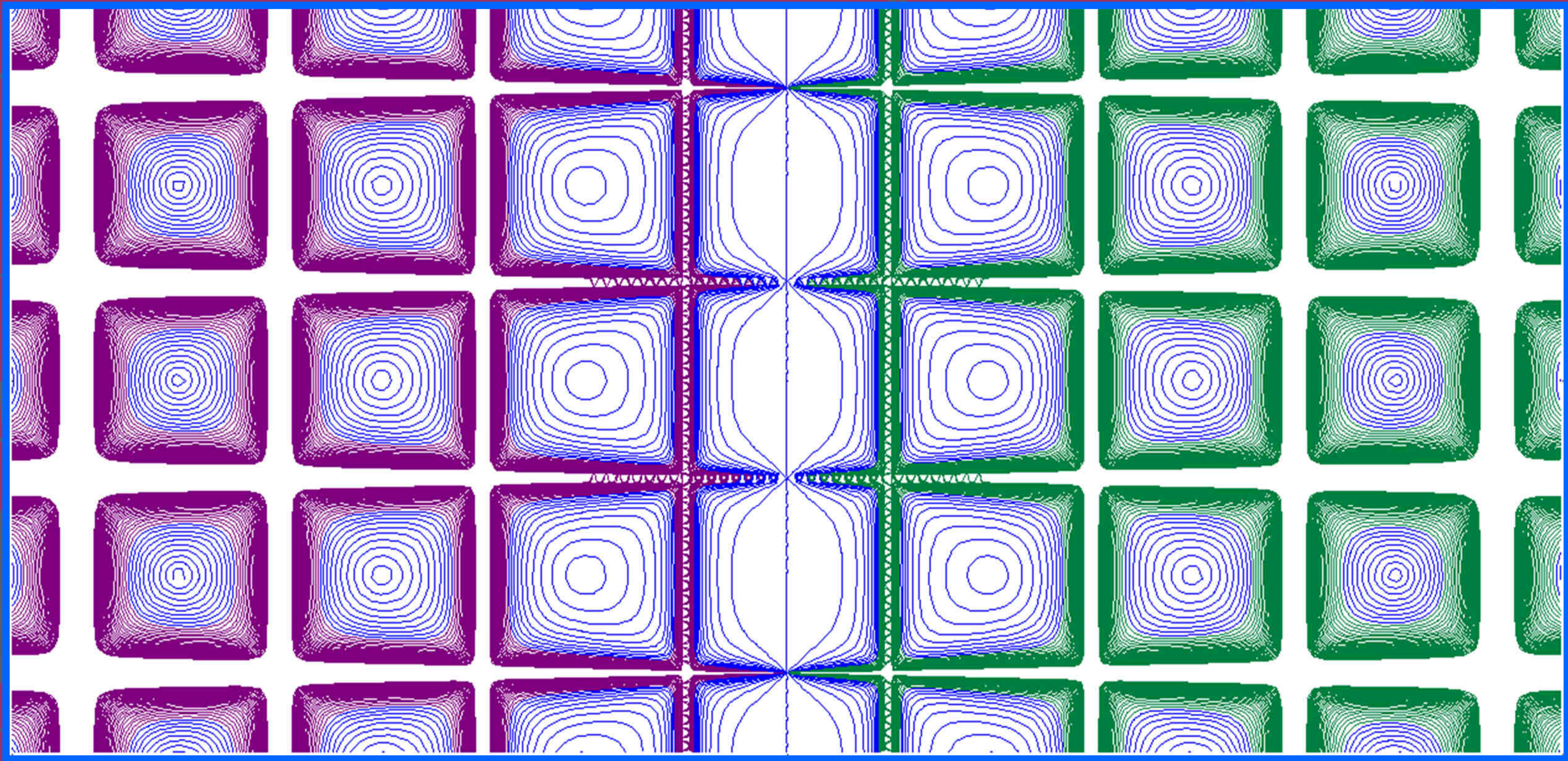
Exercice 2:

Créez une composition artistique dans le style de Vasarely ou de Riley basée sur un diagramme de courbes de niveau d'une fonction à deux variables. Inventez un nom approprié pour votre création artistique.



Rides de sable sur la plage

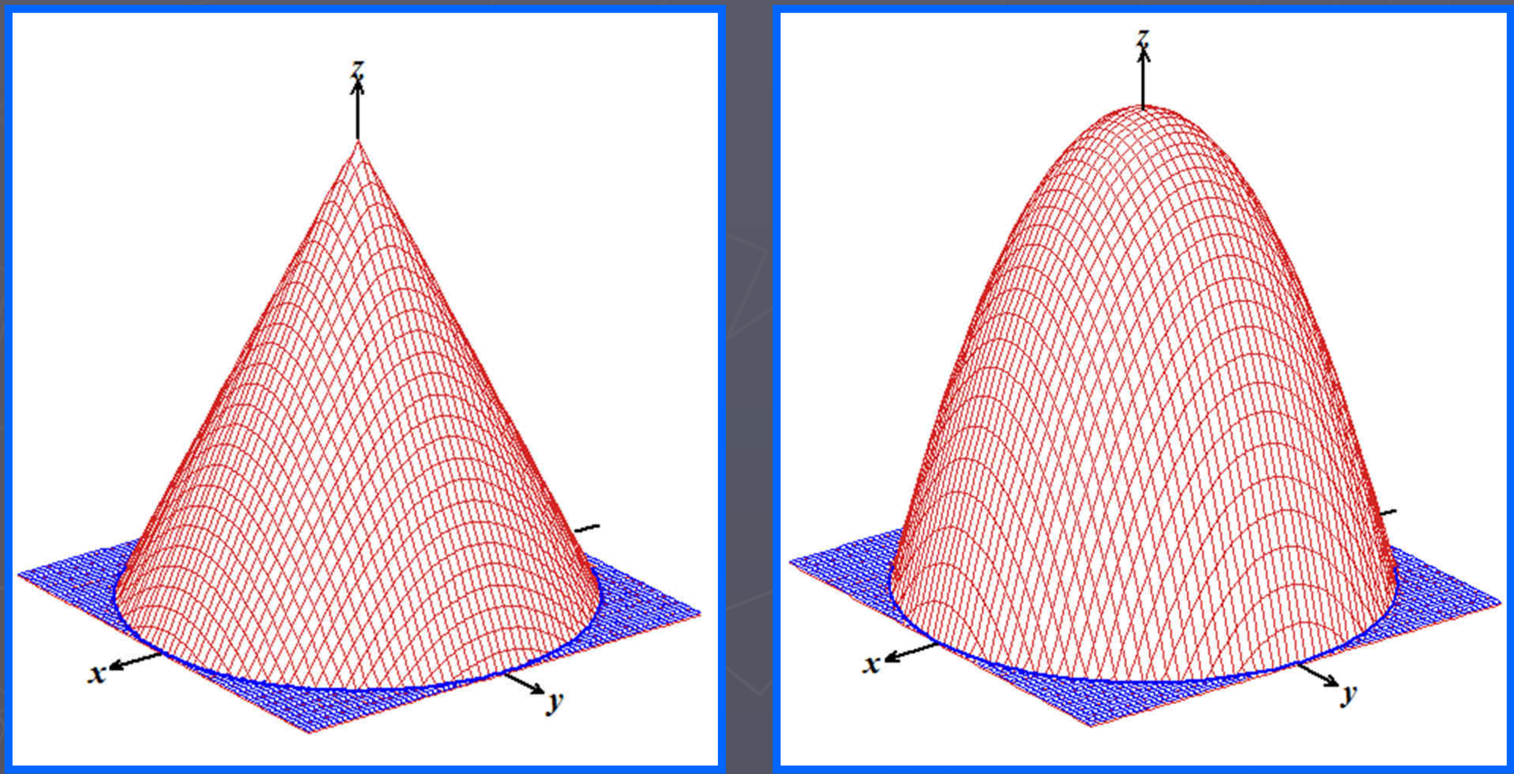
4. Op - art



Touches d'un clavier

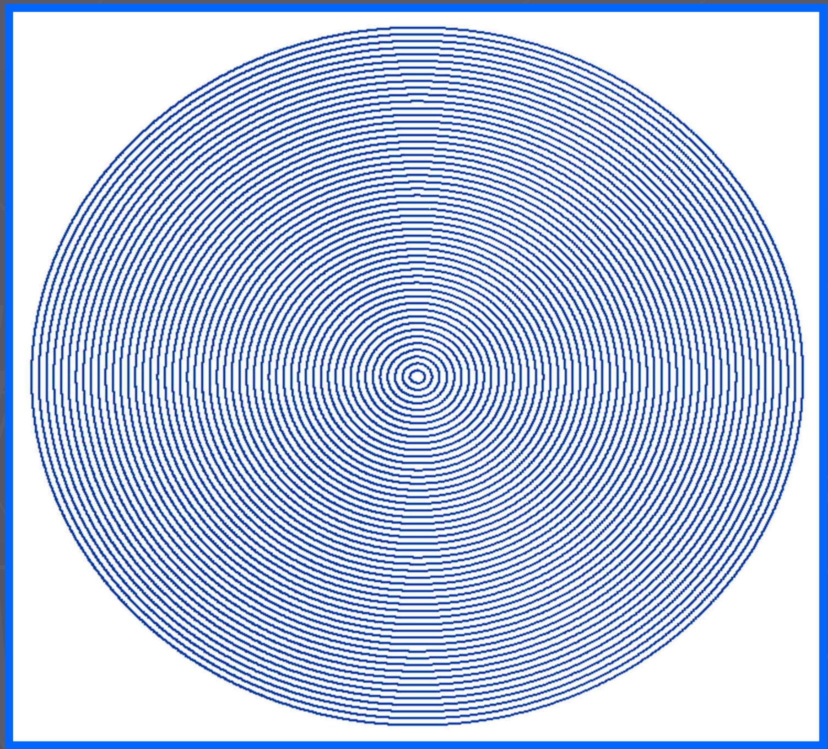
5. Diagrammes superposés

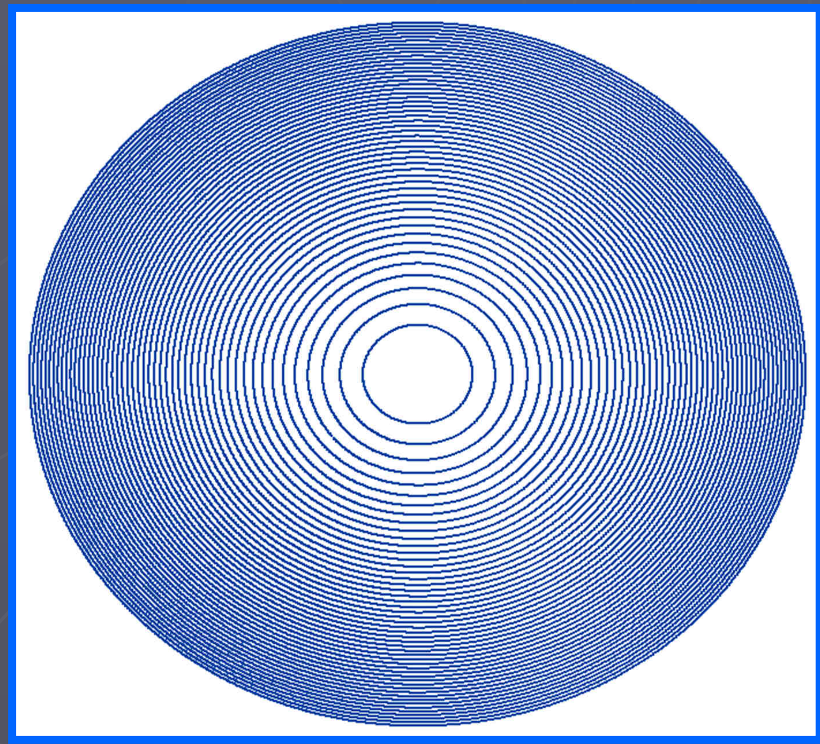
Prenez une fonction quelconque avec deux variables. Ci-dessous deux exemples.



5. Diagrammes superposés

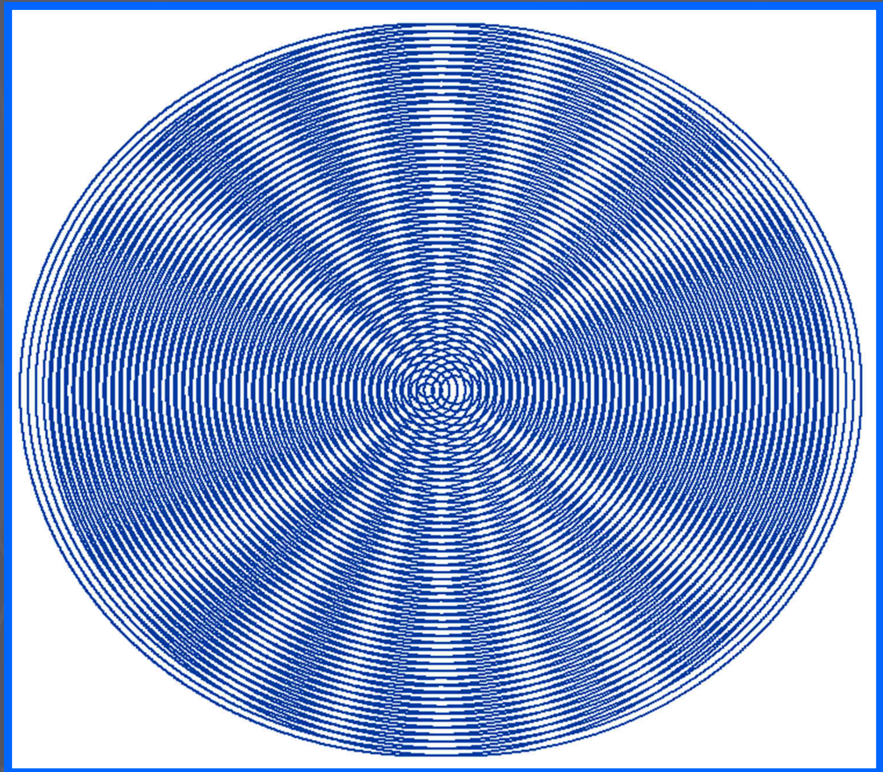
Cherchez le diagramme des courbes de niveau.

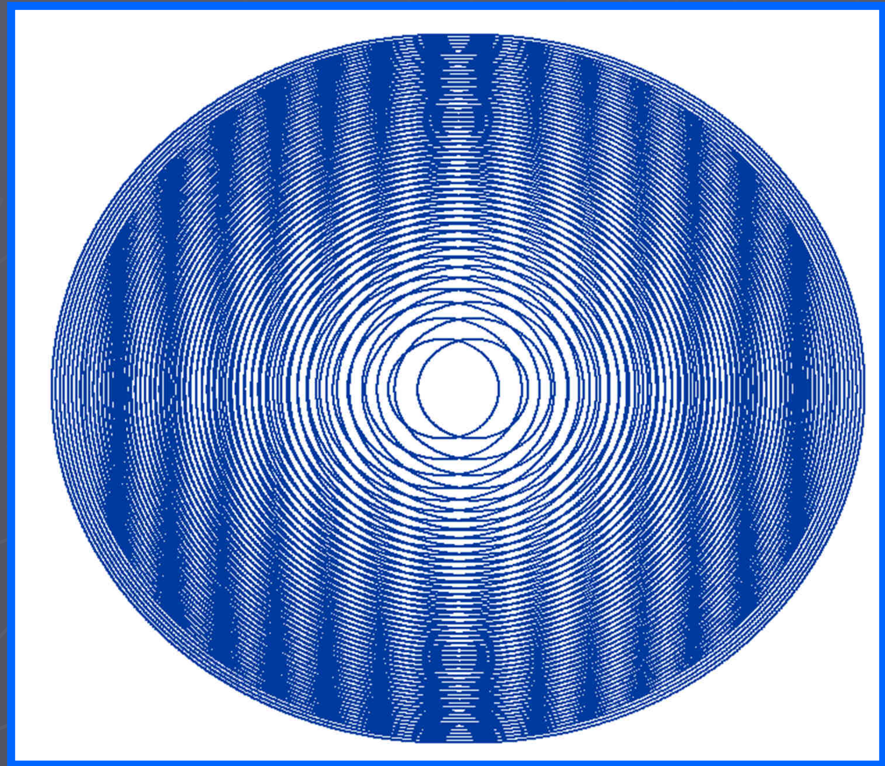




5. Diagrammes superposés

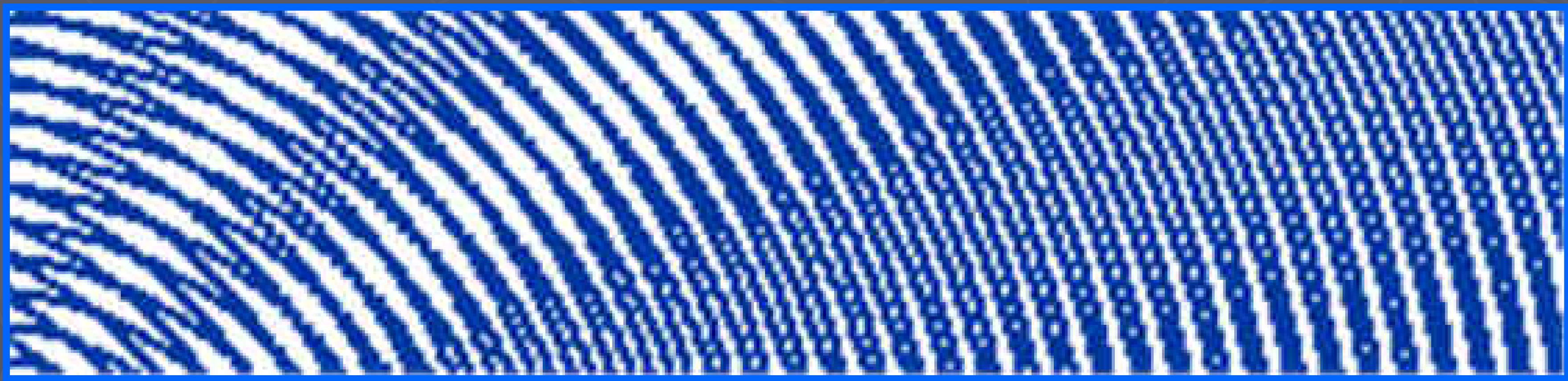
Copiez le diagramme sur une feuille transparente et couvrez l'original avec la feuille transparente qui est décalée un peu. Des bandes brillantes apparaissent sur le dessin. Ce sont des zones de moirage.





5. Diagrammes superposés

Les bandes brillantes apparaissent près des intersections des deux diagrammes de courbes. Parce que les courbes se croisent dans un angle faible, les courbes coïncident dans une zone ou la densité des pixels colorés est minimale. Ce phénomène cause des bandes lumineuses.



5. Diagrammes superposés

Théorie:

Si le diagramme de courbes

$$f\left(x,y\right)=n\cdot c \qquad (n\in Z)$$

est superposé au diagramme décalé dans la direction de l'axe horizontal d'une distance *d*

$$f\left(x-d,y\right)=m\cdot c \qquad (m\in Z)$$

les lieux des intersections des deux diagrammes sont les courbes de moiré

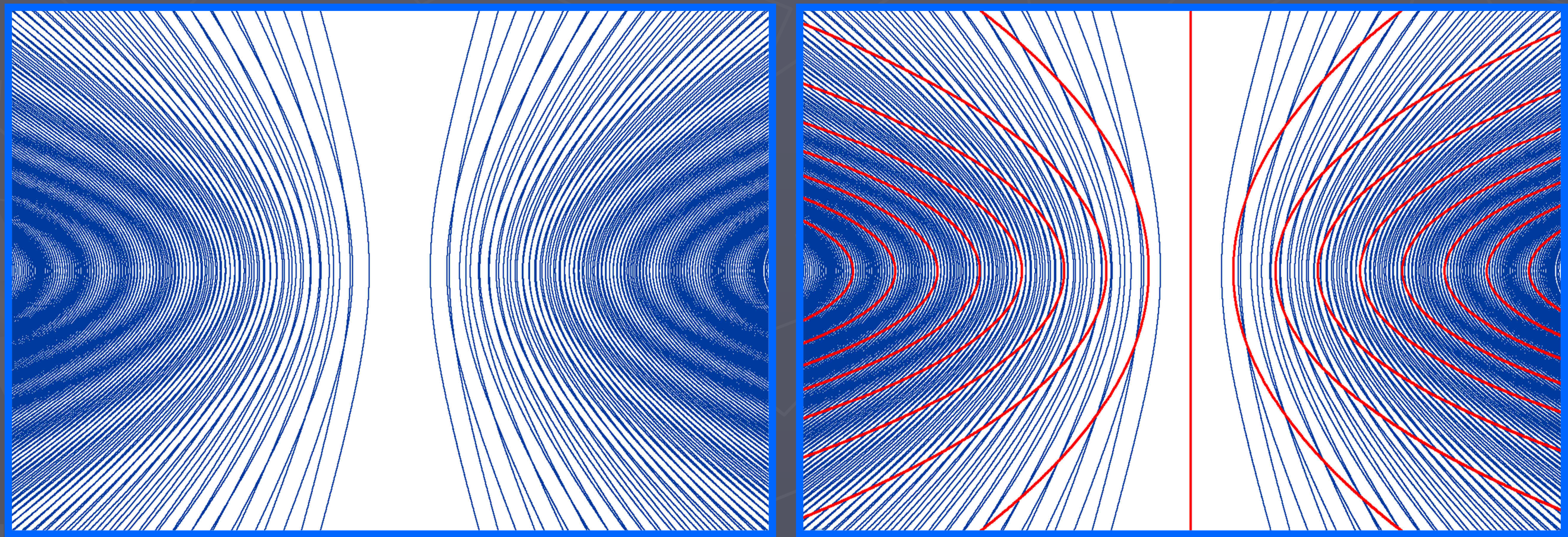
$$f\left(x,y\right)-f\left(x-d,y\right)=\left(n-m\right)\cdot c \qquad (n,m\in Z)$$

$$\boxed{f\left(x,y\right)-f\left(x-d,y\right)=k\cdot c \qquad (k\in Z)}$$

5. Diagrammes superposés

Exercice 3:

Cherchez l'équation des courbes de moiré du diagramme $\frac{x^2}{1+y^2} = n \cdot c$ décalé d'une distance de 0,1.



5. Diagrammes superposés

Réponse:

$$\frac{x^2}{1+y^2}-\frac{(x-0,1)^2}{1+y^2}=k\cdot c$$

$$\Leftrightarrow x^2-(x-0,1)^2=k\cdot c\cdot\left(1+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 0,2\cdot x-0,01=k\cdot c\cdot\left(1+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow x=5k\cdot c\cdot\left(1+y^2\right)+0,05$$

Les courbes de moiré sont des paraboles avec l’axe horizontal comme axe de symétrie.

6. Moirage et dérivation

Théorie:

Si le décalage *d* des diagrammes des courbes est presque zéro, nous pouvons approcher les courbes de moiré:

$$f(x,y) - f(x-d,y) = k \cdot c \qquad (k \in Z)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x,y) - f(x-d,y)}{d} = k \cdot \frac{c}{d} \qquad (k \in Z)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx} f(x,y) \approx k \cdot \frac{c}{d} \qquad (k \in Z)$$

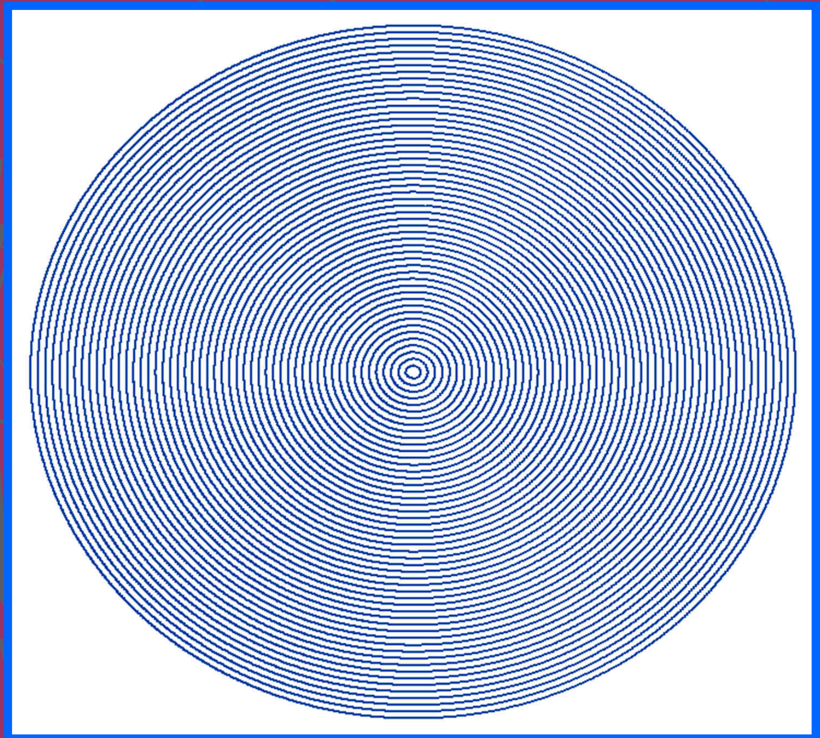
$$\boxed{\frac{d}{dx} f(x,y) \approx u_k \qquad (k \in Z)}$$

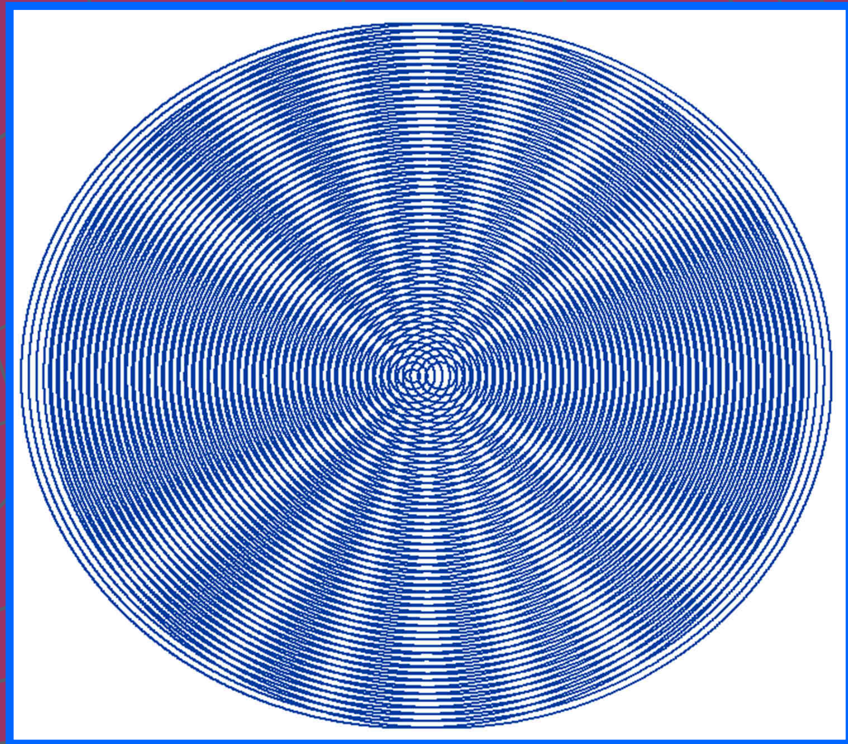
6. Moirage et dérivation

Exercice 4:

Cherchez l'équation des courbes de moiré du diagramme $1-\sqrt{x^2+y^2}=n\cdot c$

décalé d'une distance presque zéro. Prouvez qu'on a des droites passant par l'origine.





6. Moirage et dérivation

Réponse:

$$\frac{d}{dx} f\left(x, y\right) \approx u_k \qquad (k \in Z)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right) \approx u_k \qquad (k \in Z)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \approx u_k \qquad (k \in Z)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 \approx {u_k}^2\left(x^2+y^2\right) \qquad (k \in Z)$$

$$\Rightarrow \quad y^2 \approx \left(\frac{1}{{u_k}^2}-1\right)x^2 \qquad (k \in Z)$$

$$\Rightarrow \quad y \approx x\sqrt{\frac{1}{{u_k}^2}-1} \quad \vee \quad y \approx -x\sqrt{\frac{1}{{u_k}^2}-1} \qquad (k \in Z)$$

7. Moirage et intégration

Théorie:

Si on veut obtenir un effet moiré de la forme

$$g(x, y) \approx u_k \qquad (k \in Z)$$

on peut utiliser des diagrammes de courbes de niveau de la fonction

$$\boxed{f(x, y) = \int g(x, y)\,\mathrm{d}x}$$

décalés dans la direction de l'axe horizontal d'une distance minime.

7. Moirage et intégration

Exemple:

Supposons que vous voulez envoyer secrètement un message d'amour avec des cœurs concentriques. Comment le faire?

Cherchez sur l'internet l'équation des cœurs, par exemple:

$$x^2 + y^2 - y \cdot \sqrt[3]{x^2} = u_k$$

Prenez le côté gauche (la suite arithmétique est du côté droit)

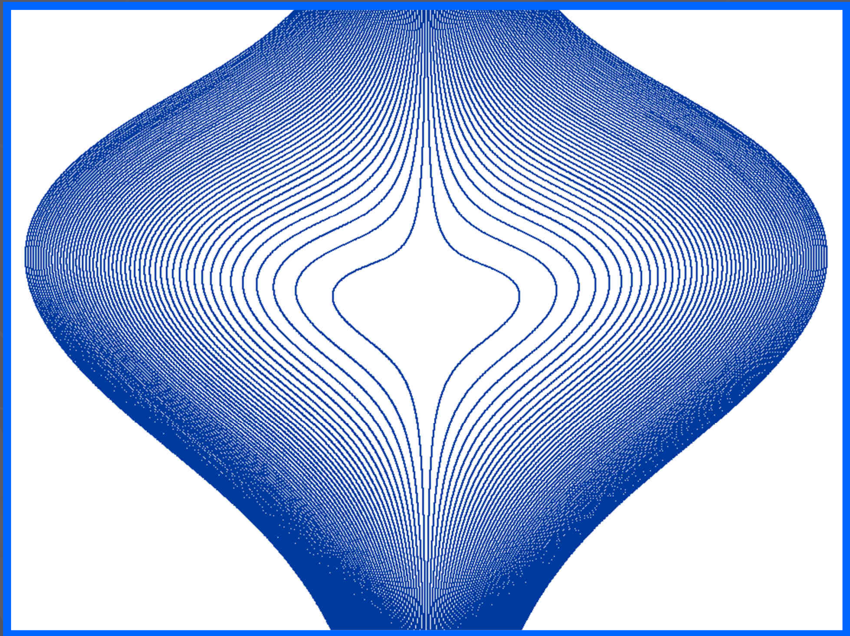
$$g(x, y) = x^2 + y^2 - y \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

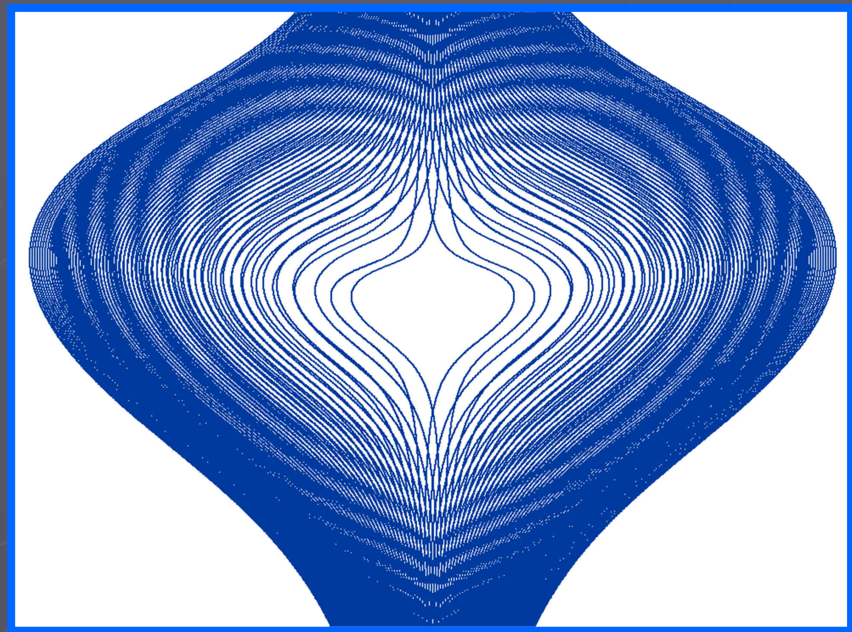
Cherchez l'intégrale indéfinie

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + x \cdot y^2 - \frac{3}{5} y \cdot \sqrt[3]{x^5}$$

7. Moirage et intégration

et dessinez le diagramme des courbes de niveau.





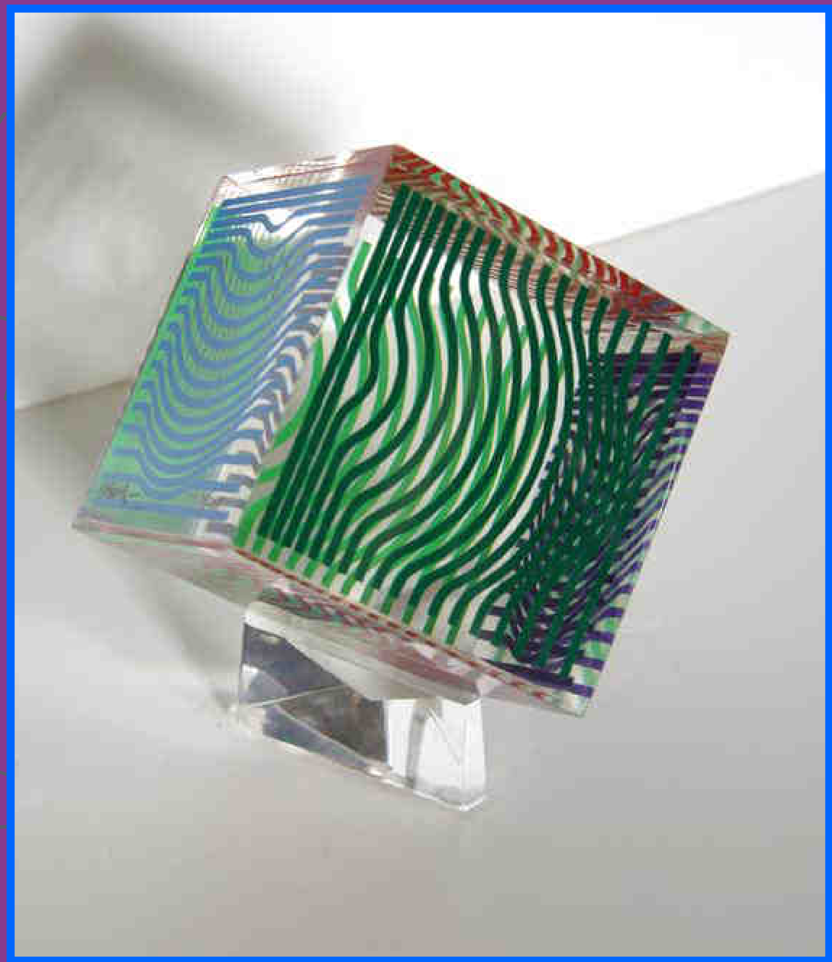
8. Art cinétique

L'art cinétique est un courant artistique fondé sur l'esthétique du mouvement.

Quelques genres dans l'art cinétique:

- mécanismes motorisés (par magnétisme ou électricité)
- mobiles qui bougent (par l'énergie éolienne ou de l'eau)
- sculptures mises en mouvement par le spectateur
- configurations dans un éclairage changeant (néon art)
- moirages (œuvre immobile, le spectateur se déplace)

8. Art cinétique



Victor Vasarely, Moiré wave (1980)

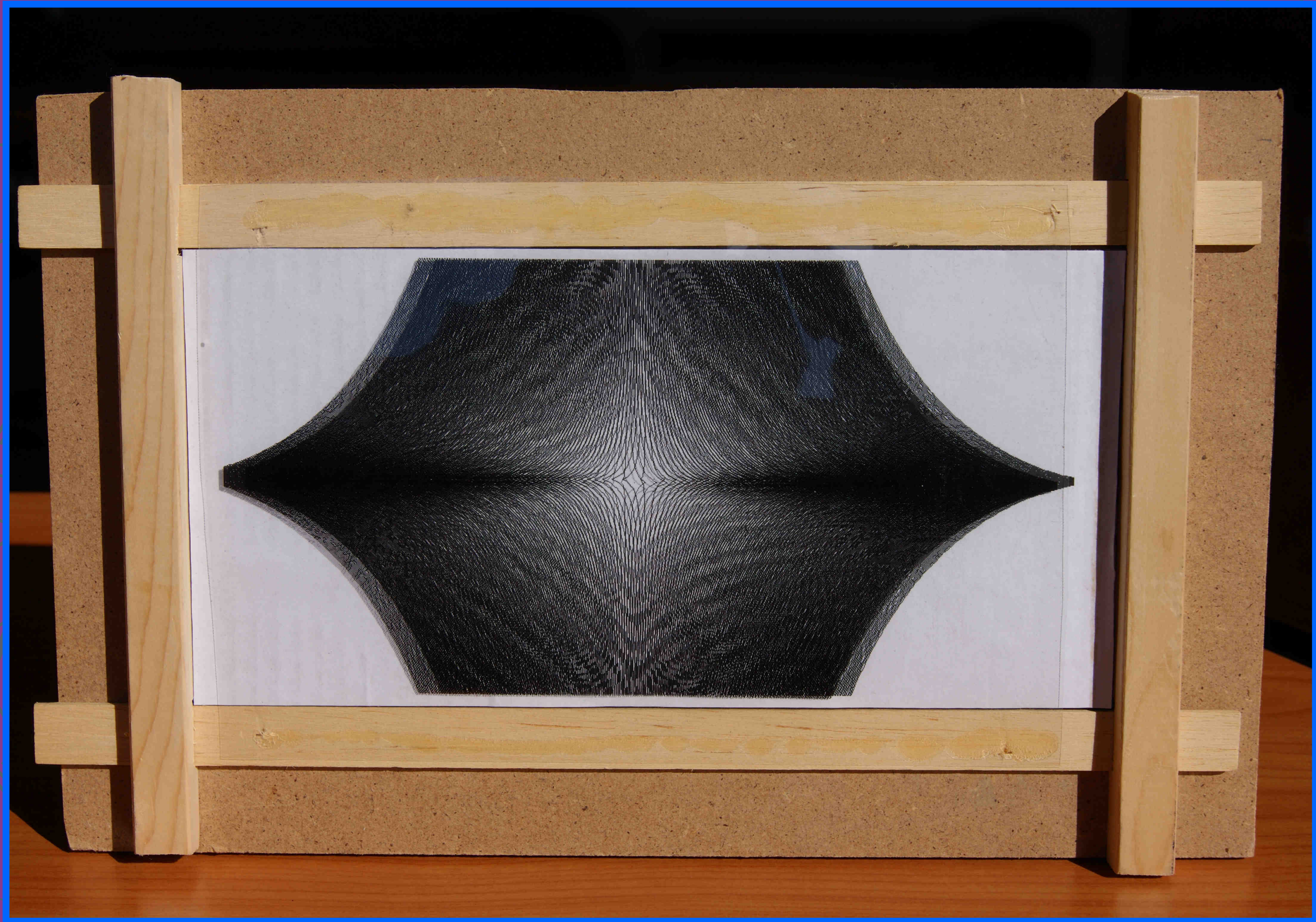
8. Art cinétique

Rae Douglass, Energy dance (2010)

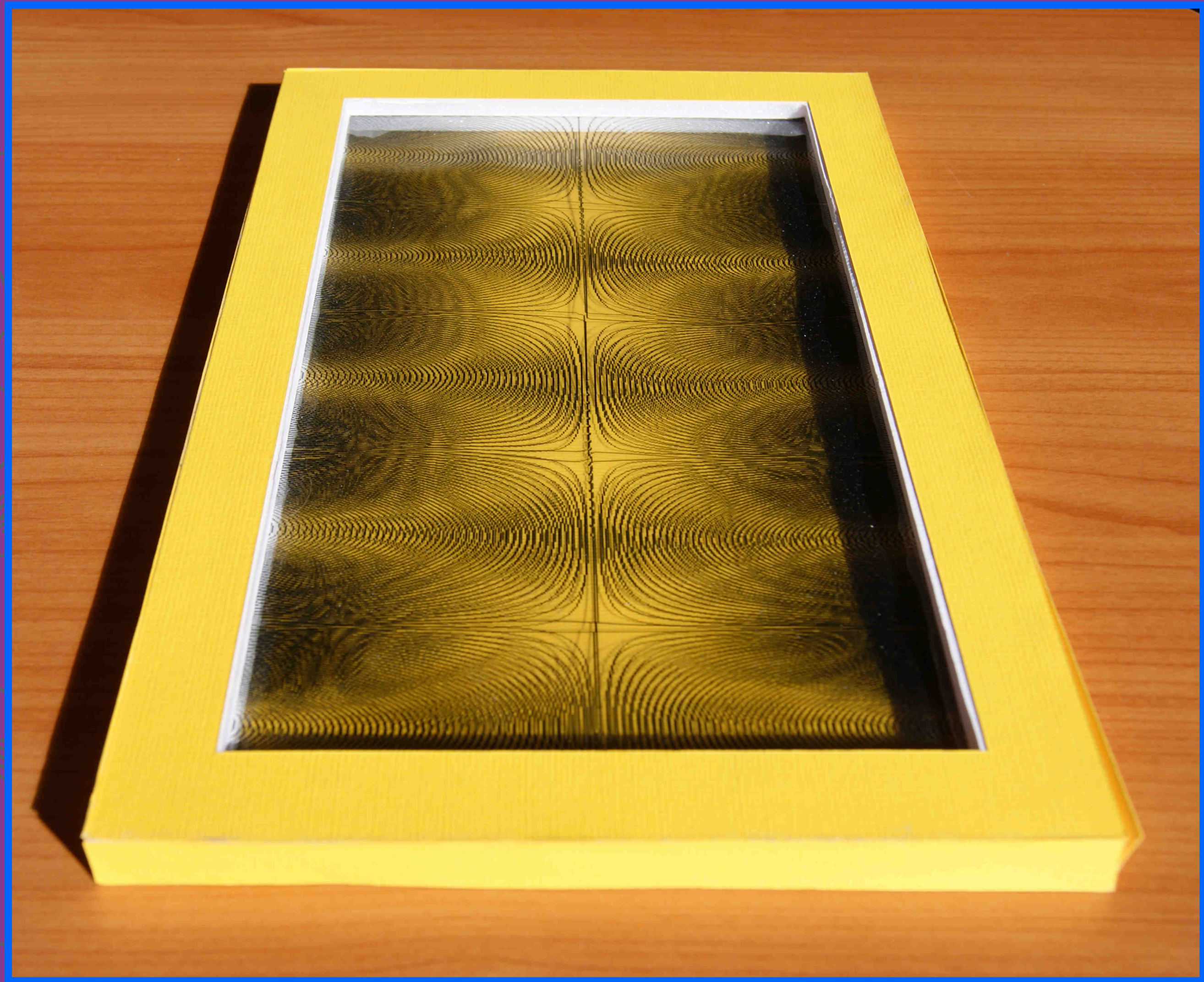
8. Art cinétique

Alberto Biasi, L' irragiungibile tartaruga (2001)

8. Art cinétique



8. Art cinétique



8. Art cinétique

FIN

merci pour votre attention

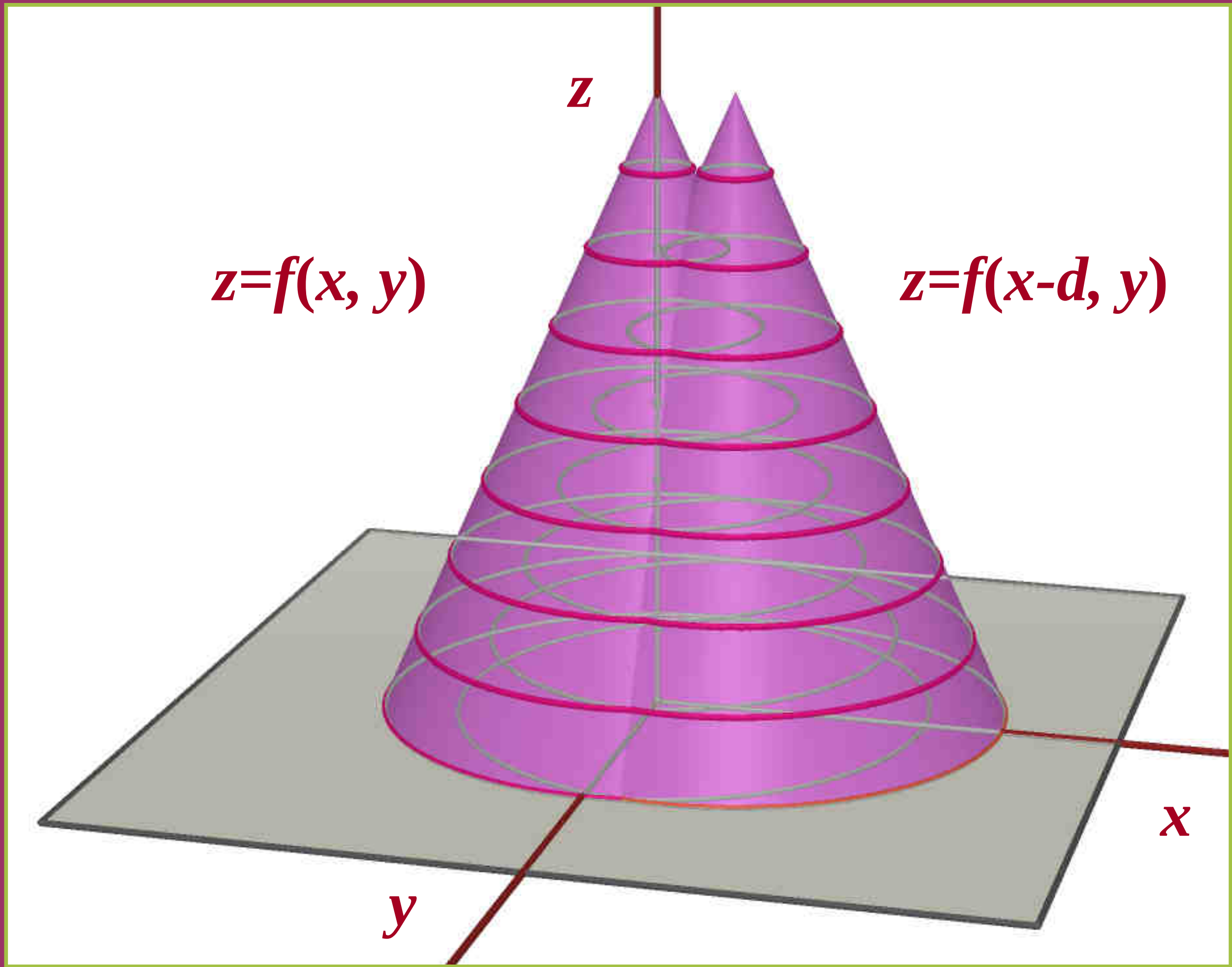
9. Appendice: interprétation de la formule de courbes de moiré

Il y a une preuve de la formule des courbes de moiré dans le plan à partir de la vision en trois dimensions.

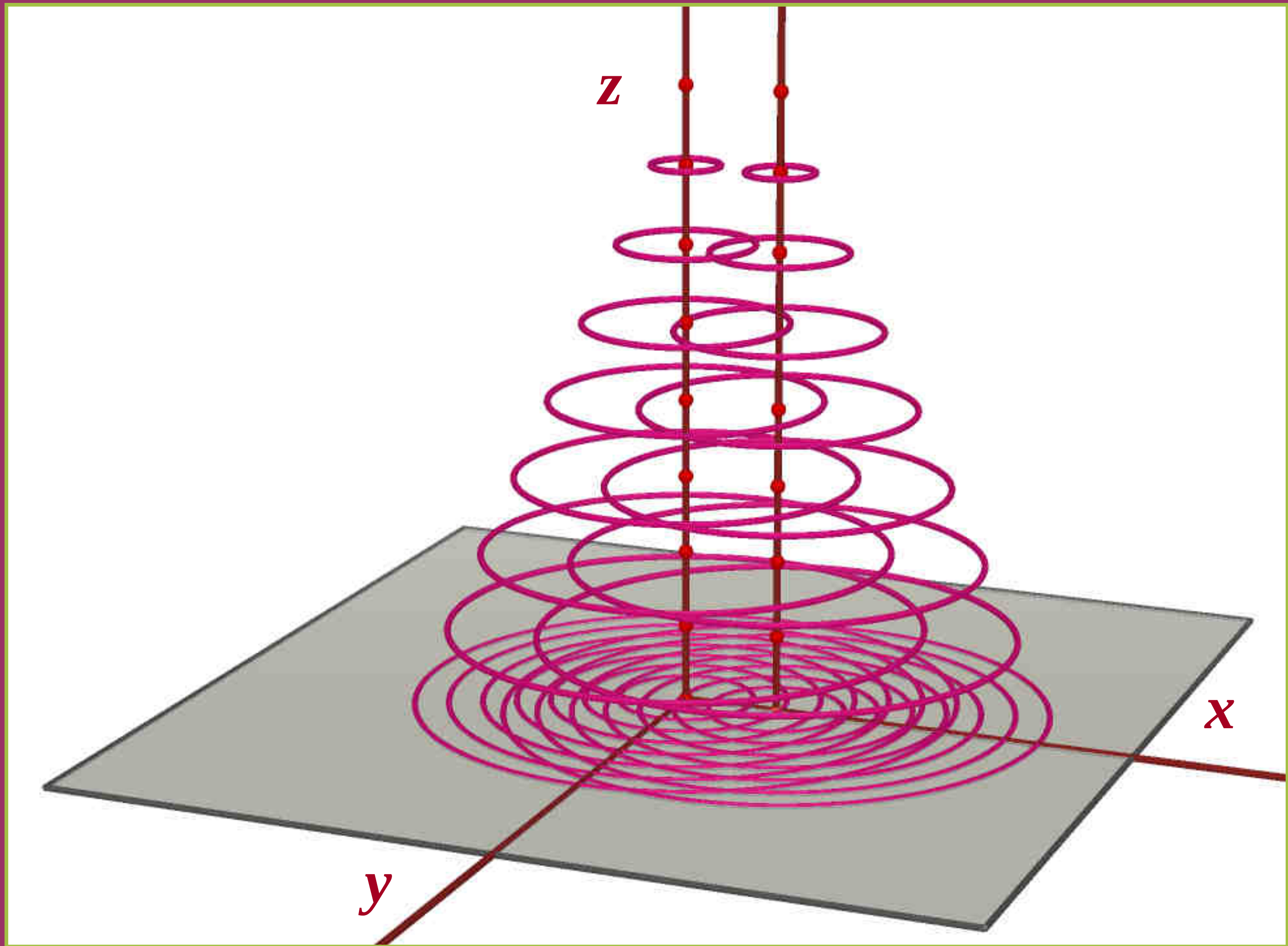
La courbe moiré de numéro *k* a une équation:

$$\boxed{f(x,y) - f(x-d,y) = k \cdot c \qquad (k \in Z)}$$

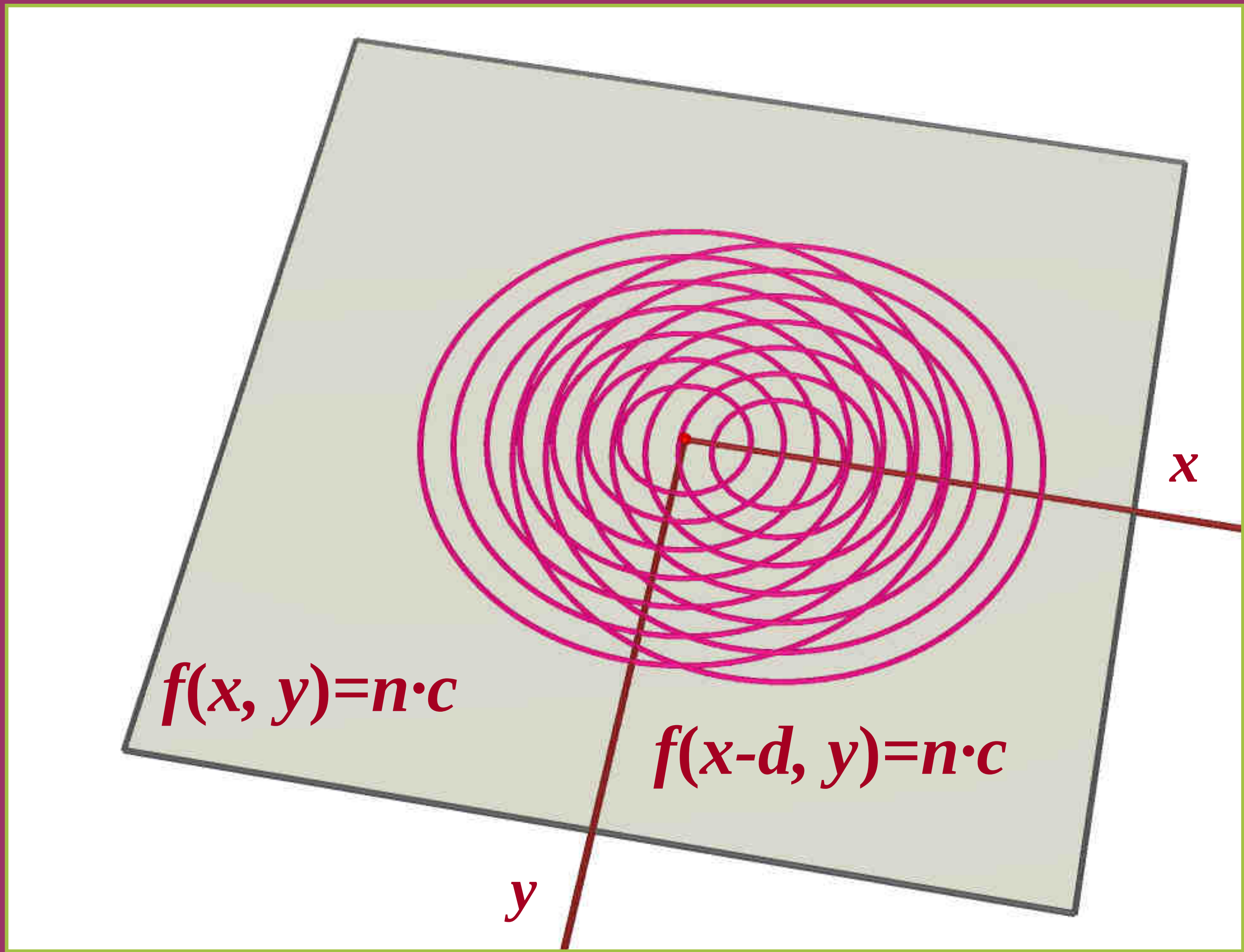
Deux graphiques décalés dans la direction de l'axe *x* d'une distance *d* …



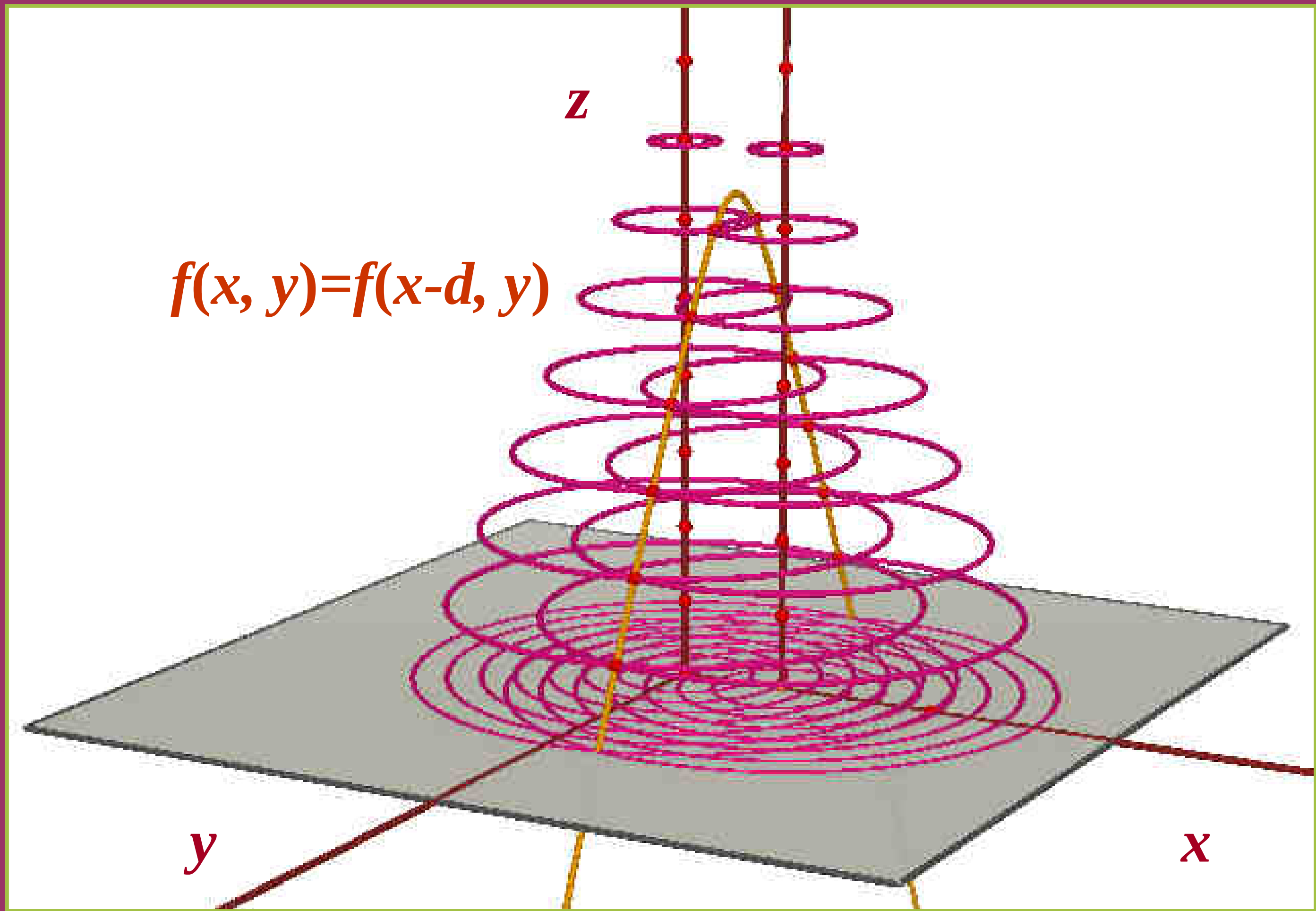
sont coupés par des plans parallèles.



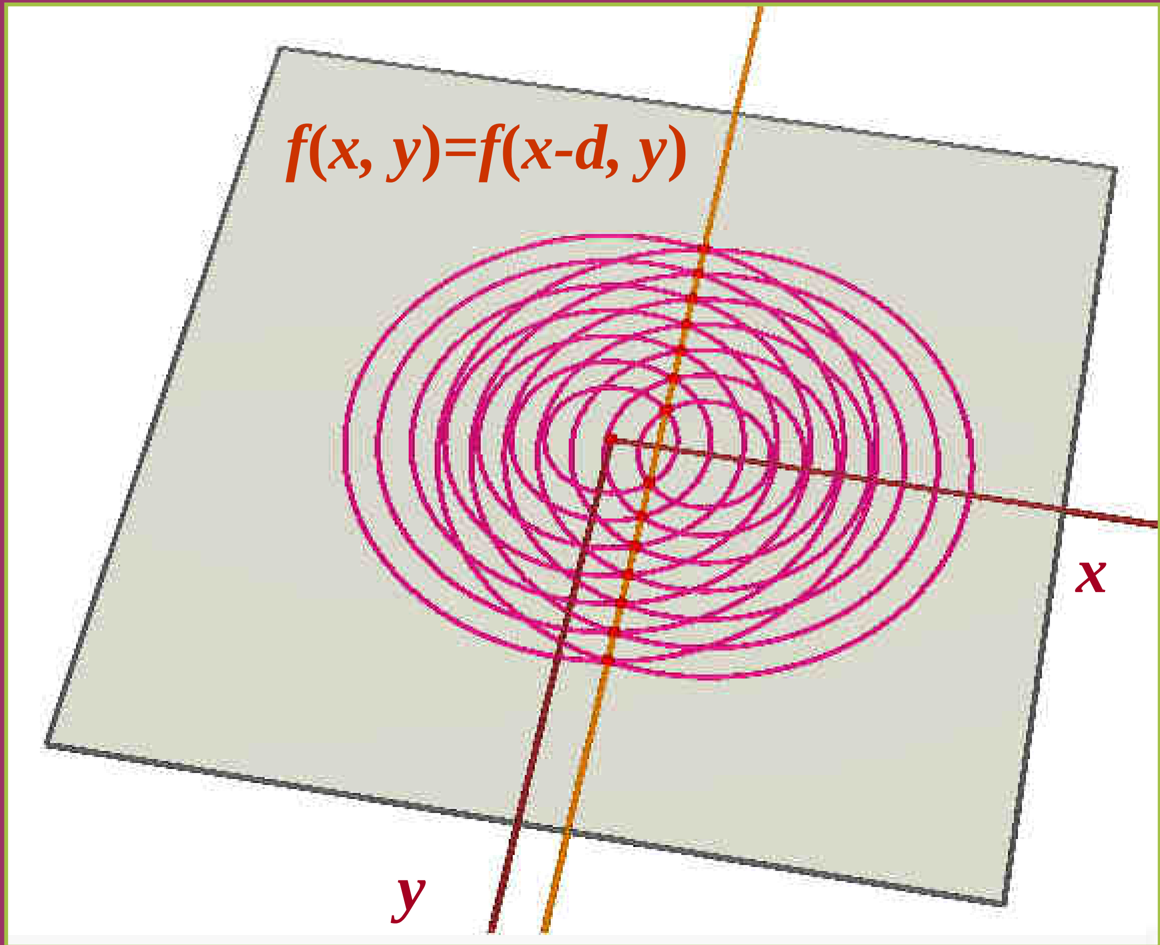
La vue du dessus nous montre deux diagrammes de courbes de niveau superposées.



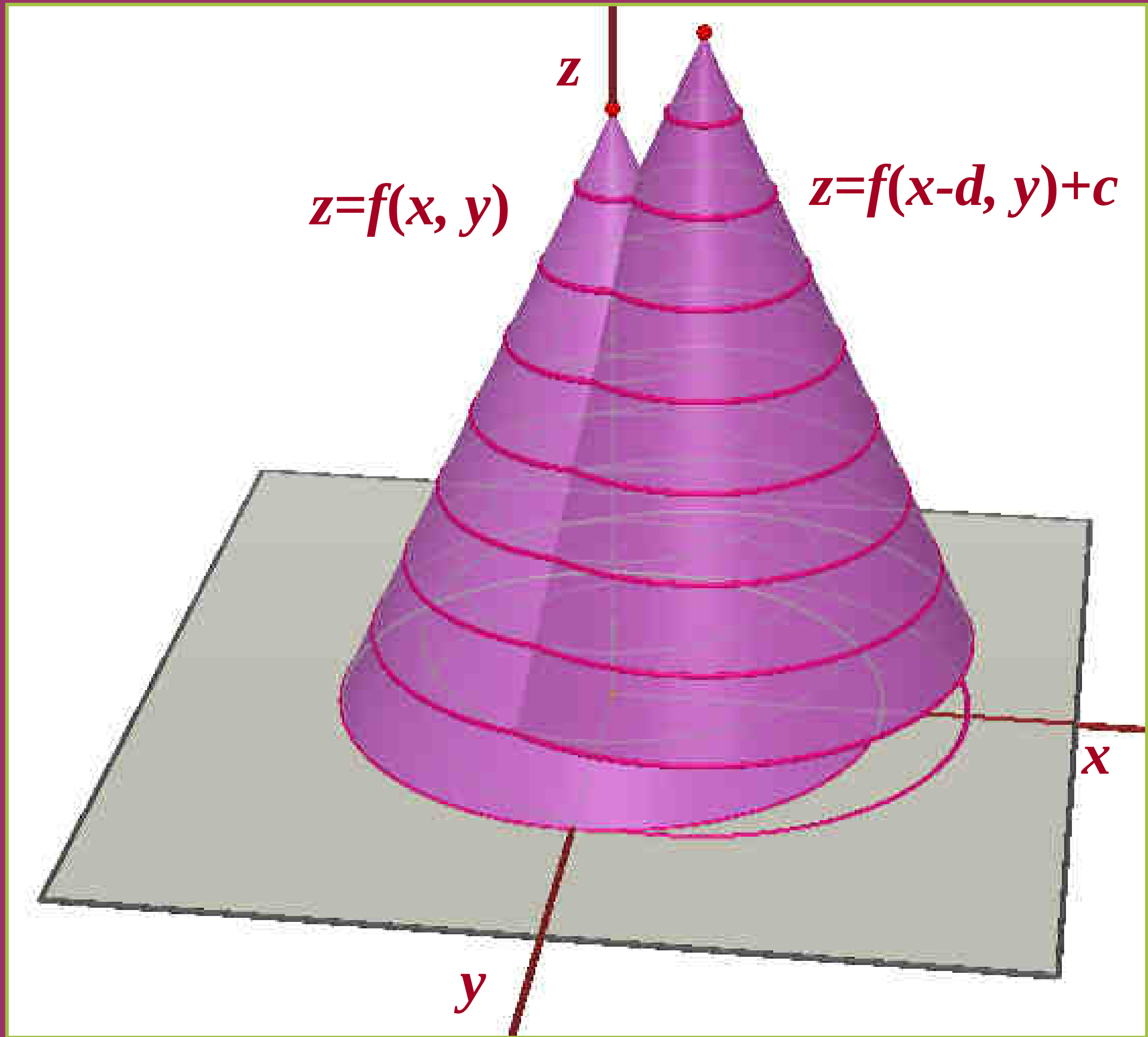
Prenons le lieu des intersections des chemins à la même hauteur.



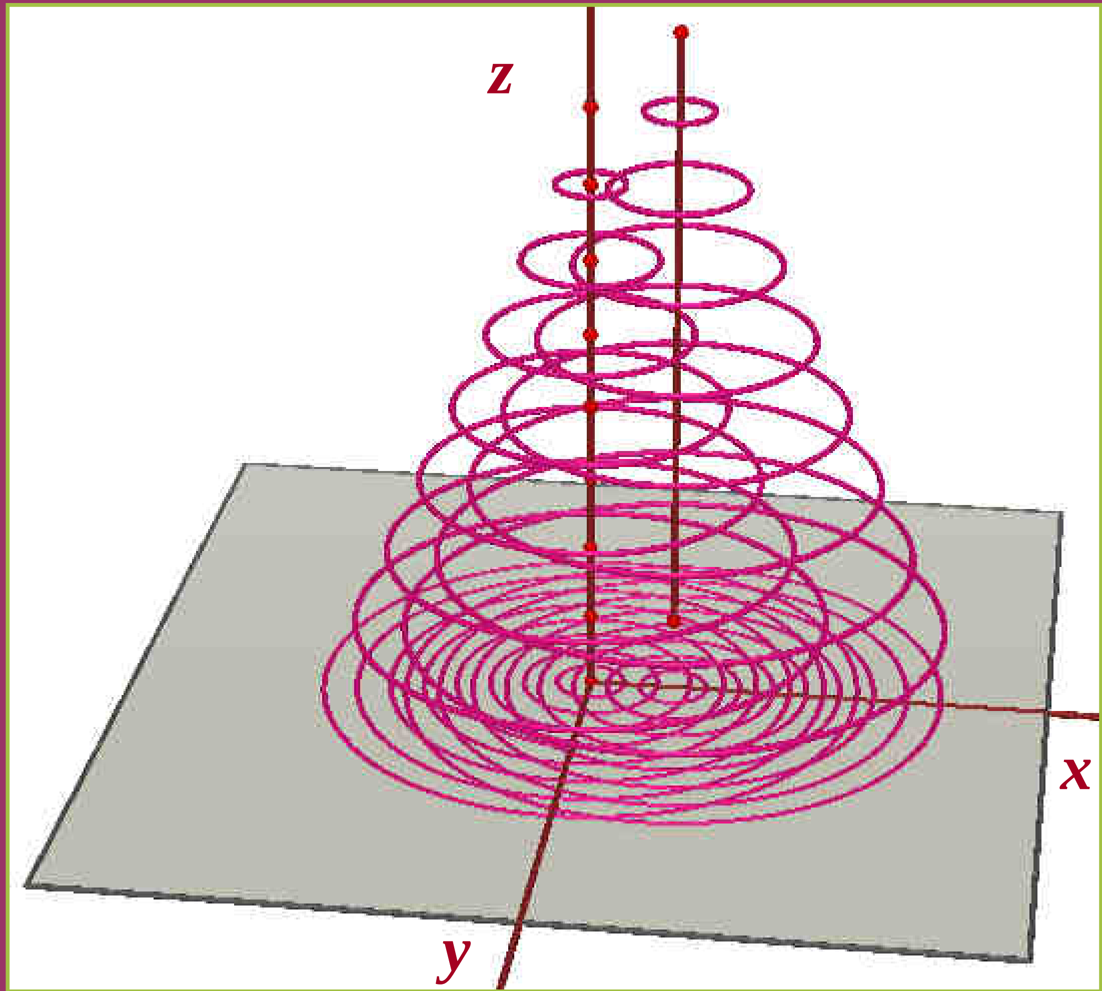
La projection dans le plan xy est la courbe de moiré de numéro zéro.



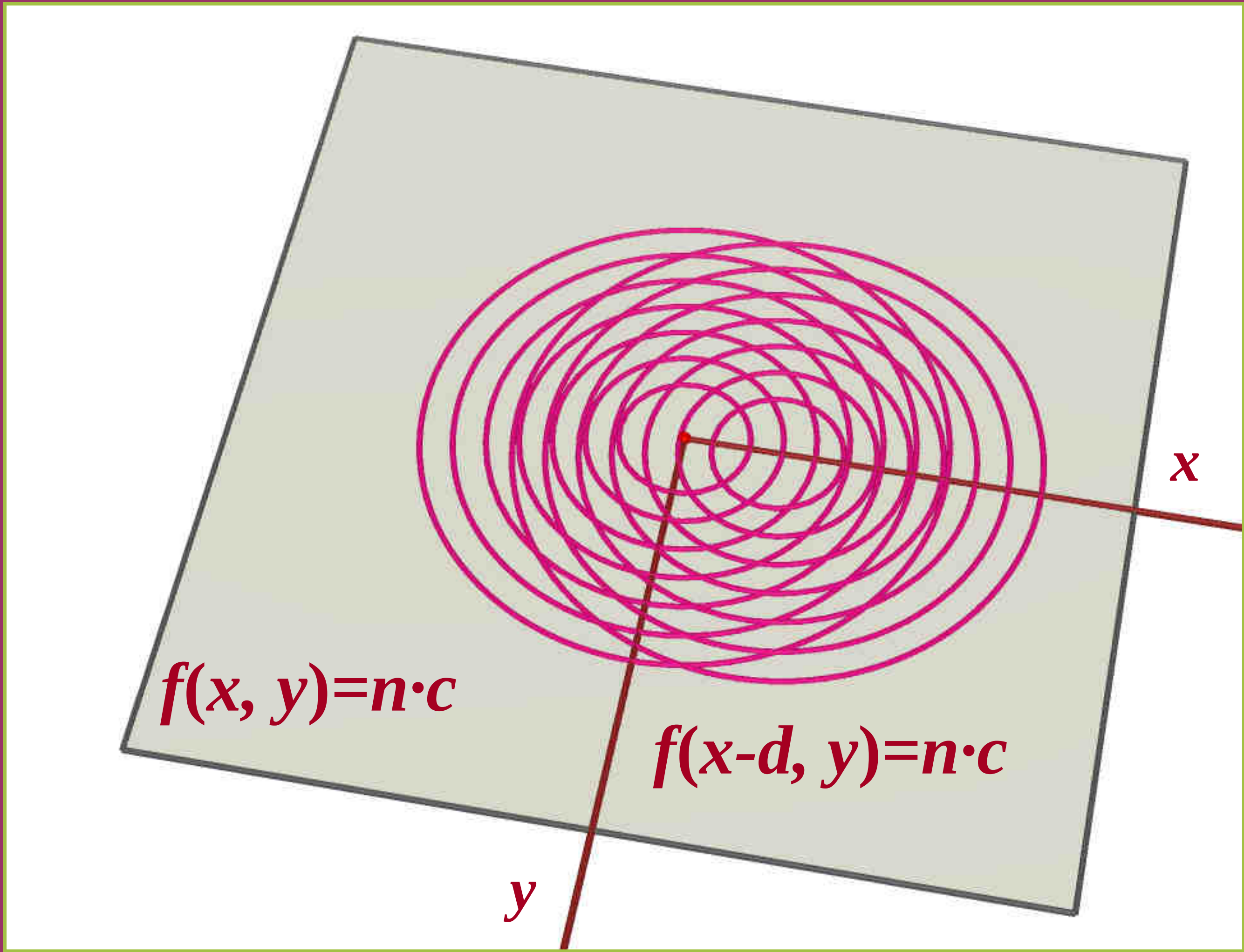
Si le graphique à droite se déplace en haut d'un étage …



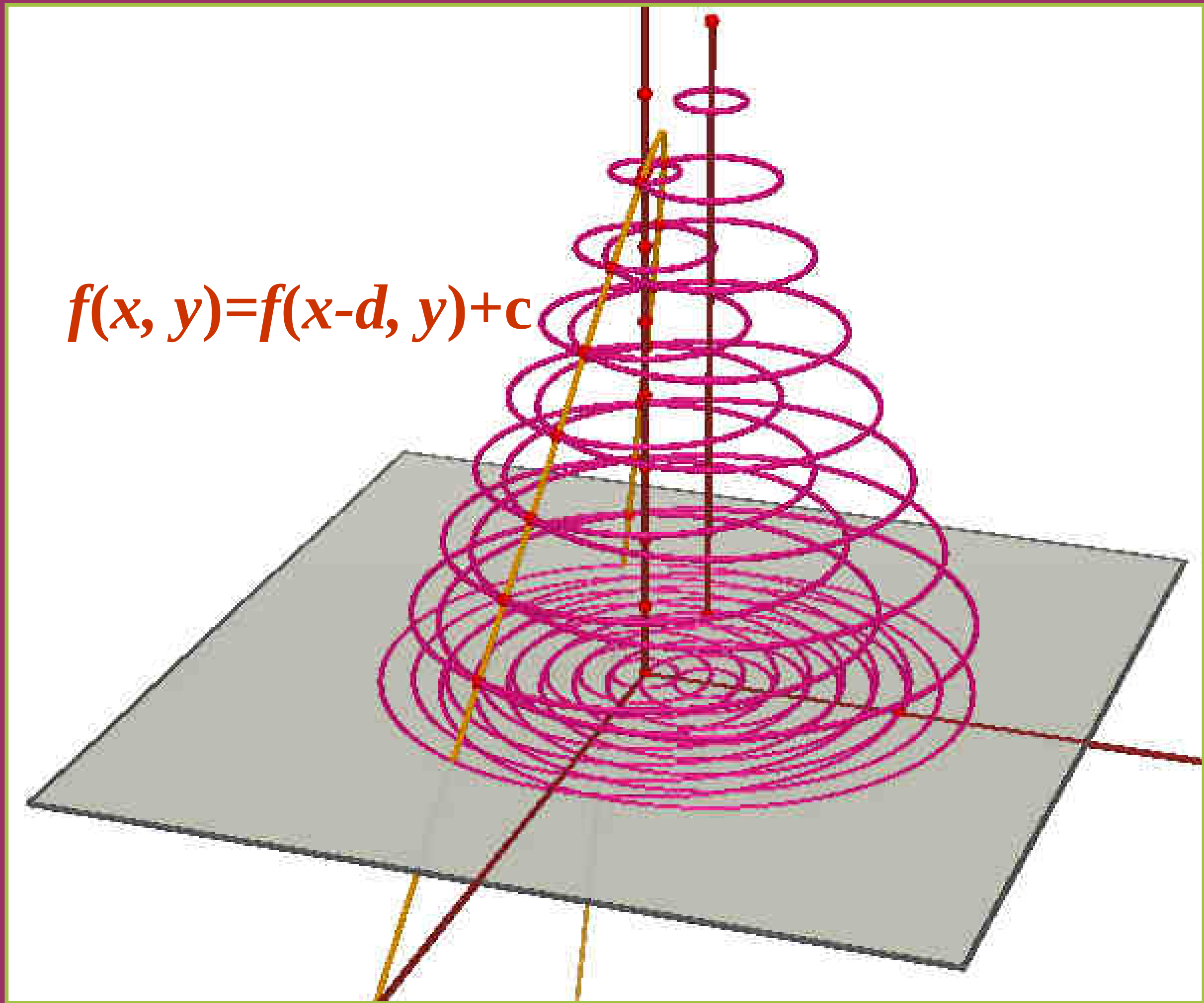
… et on coupe de nouveau avec des plans parallèles …



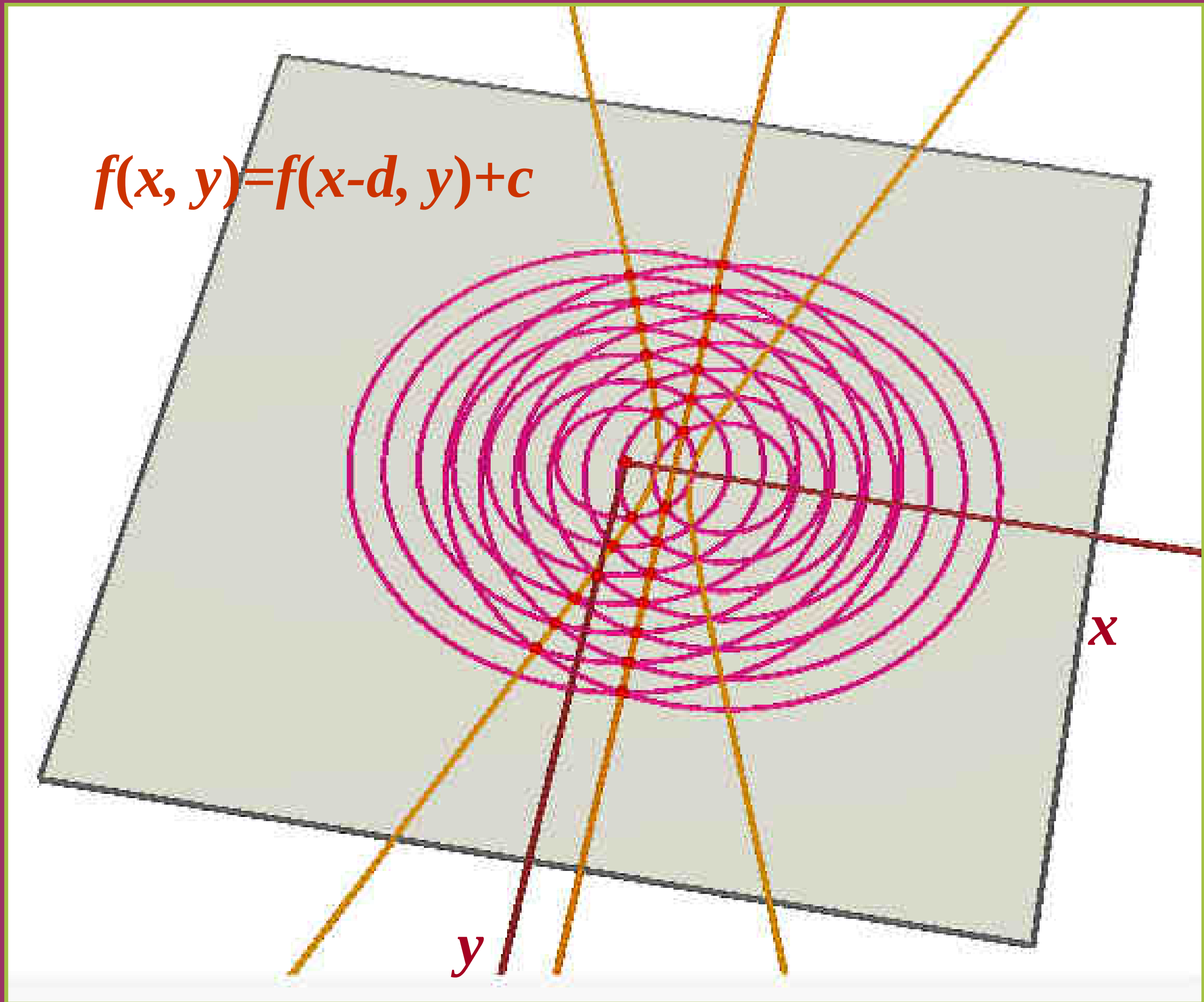
… le diagramme des courbes de niveau reste invariant.



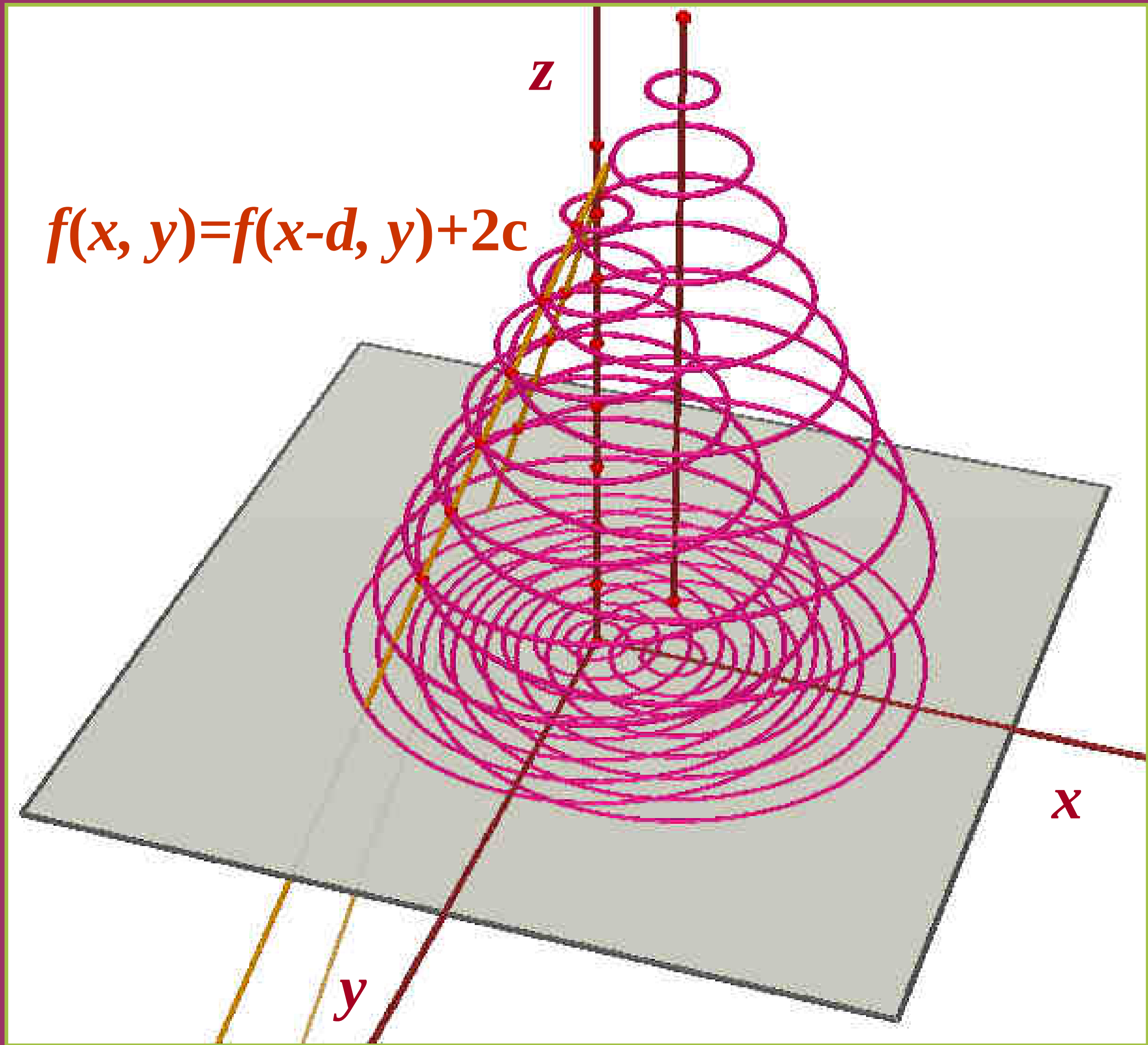
Prenons le lieu des intersections des chemins à la même hauteur.



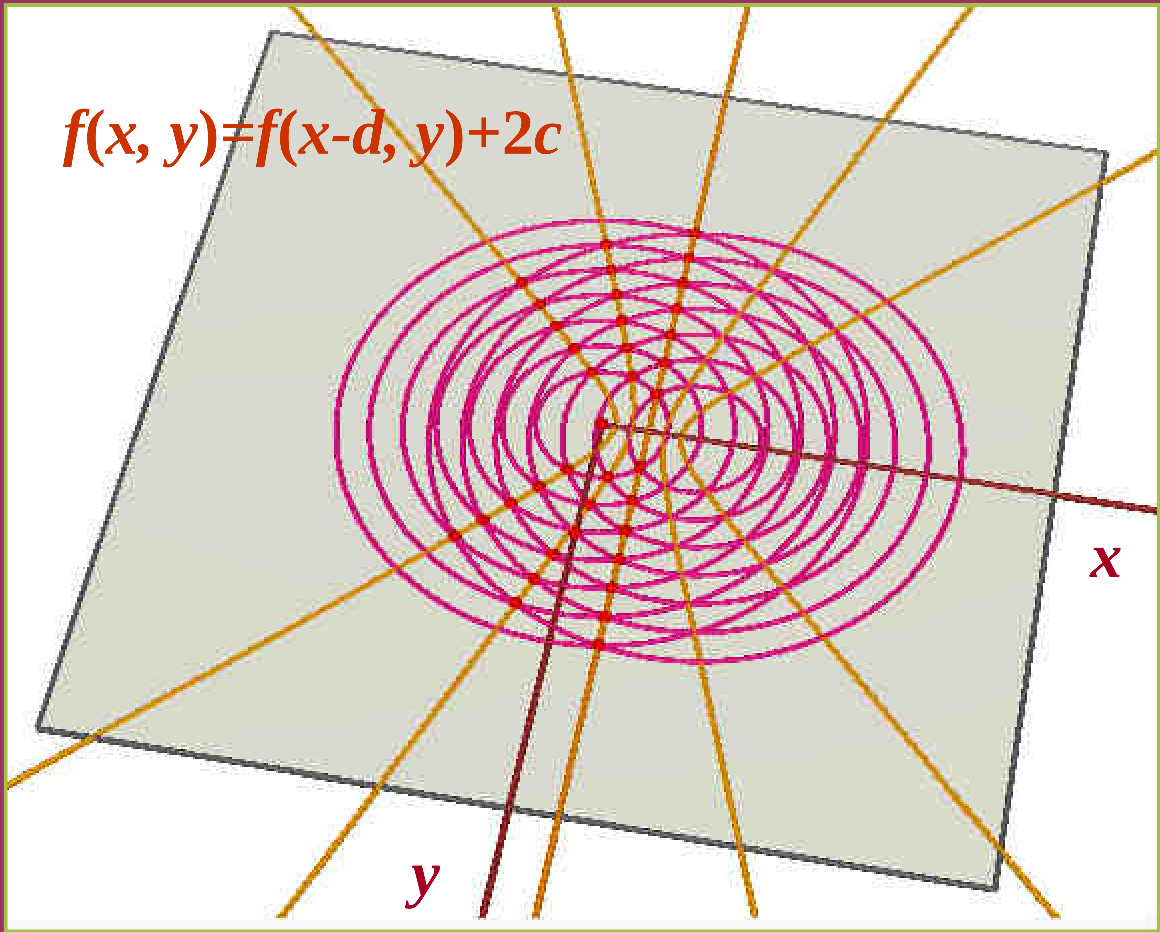
La projection dans le plan xy est la courbe de moiré de numéro un



Si le graphique à droite se déplace vers le haut de deux étages …



… on trouve la courbe de moiré de numéro deux.



En général:

La courbe moiré de numéro *k* a une équation:

$$\boxed{f\left(x,y\right)=f\left(x-d,y\right)+k\cdot c \qquad (k\in Z)}$$

ou:

$$\boxed{f\left(x,y\right)-f\left(x-d,y\right)=k\cdot c \qquad (k\in Z)}$$