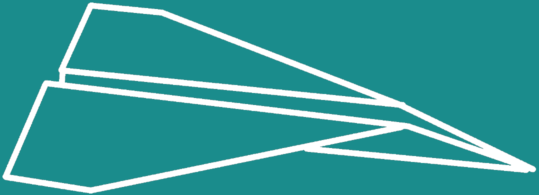


Séminaire du CREM
Vendredi 25 novembre 2022

Trois pliages pour argumenter
en géométrie et trigonométrie

Laure Ninove

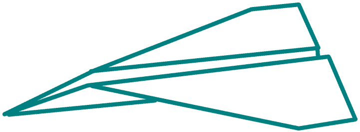
UCLouvain — Haute École Léonard de Vinci — GEM

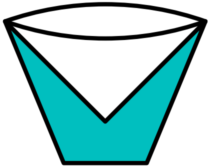
Au menu

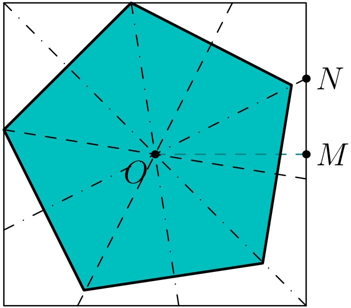
Un avion

Un gobelet

Un pentagone



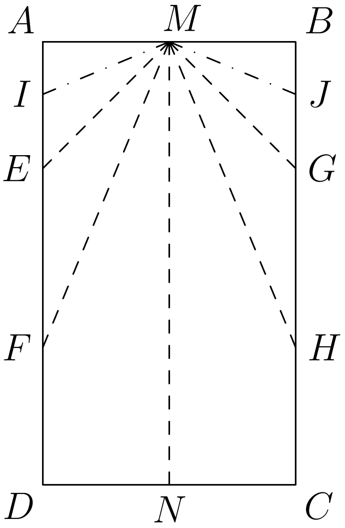




Un avion

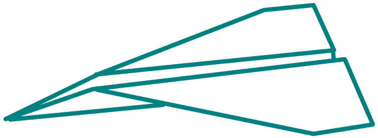
Plions

1. Prenez un rectangle $ABCD$, avec $|AB| < |BC|$.
2. Pliez pour amener A sur B. Dépliez.
   Nommez M et N les extrémités de ce pli, avec M sur $[AB]$ et N sur $[CD]$ respectivement.
3. Pliez pour amener $[AM]$ sur $[MN]$.
   Nommez E le point d'intersection du pli avec $[AD]$.
   De manière symétrique, construisez un pli $[MG]$.
4. Pliez pour amener $[ME]$ sur $[MN]$.
   Nommez F le point d'intersection du pli avec $[AD]$.
   De manière symétrique, construisez un pli $[MH]$.
5. Dépliez. Nommez I le point, extrémité d'un pli, situé entre A et E, ainsi que J son symétrique.



Patientons un peu

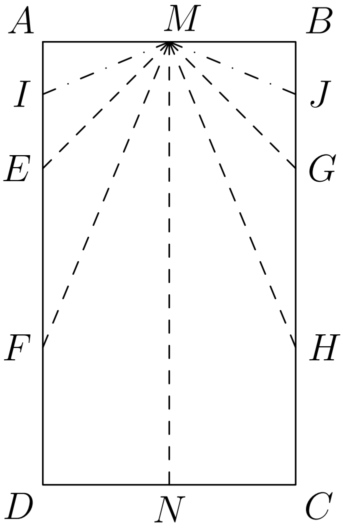
Nous construirons un avion à partir de ces plis…
mais nous prenons d'abord le temps de réfléchir un peu !



Explorons

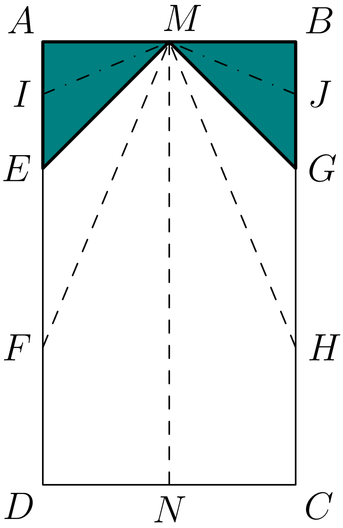
Nous ne nous intéresserons qu'aux triangles formés par les plis déjà marqués et les bords de la feuille.

1. Que peut-on dire des natures des triangles formés ?
2. Trouvez-vous des triangles isocèles ?



Une question assez vite résolue

Les triangles MEA et MGB semblent isocèles rectangles…

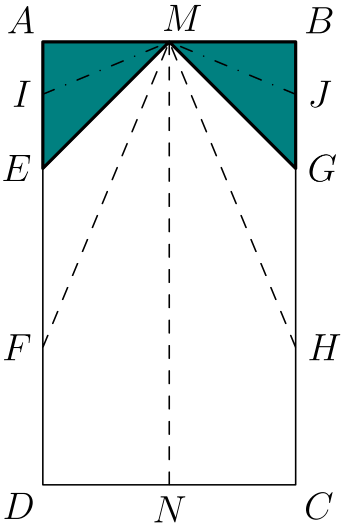


Une question assez vite résolue

Les triangles MEA et MGB semblent isocèles rectangles…

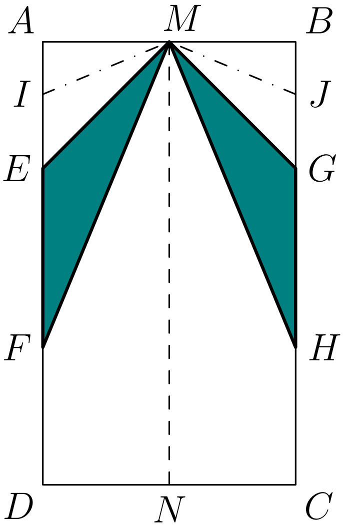
et on peut le justifier aisément :

l'angle droit est celui de la feuille, et un angle de 45° est obtenu en pliant selon la bissectrice de $\widehat{AMN}$ ou $\widehat{BMN}$.



Conjecturons

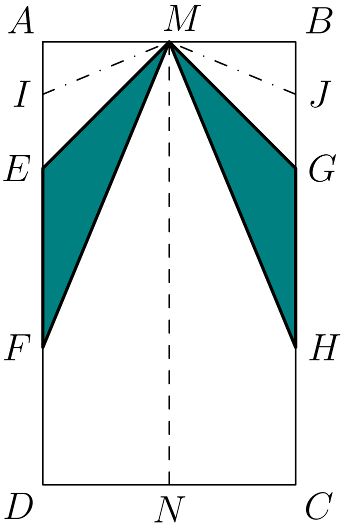
Les triangles *MEF* et *MGH* semblent isocèles.



Un premier niveau de vérification

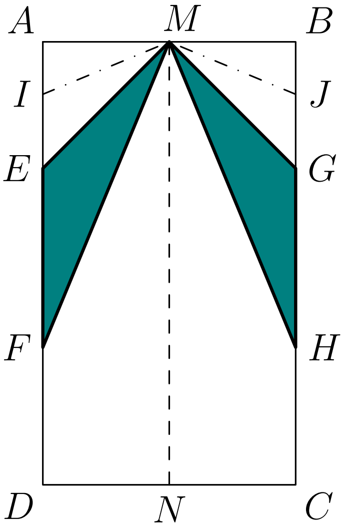
Des arguments souvent entendus :

- « J'ai mesuré les deux longs côtés du triangle et ils ont même longueur. »
- « Quand je plie pour amener [*FE*] sur [*ME*], cela se superpose bien, les deux côtés ont donc bien même longueur. »
- « Quand je plie selon la hauteur du triangle issue de *E*, les points *F* et *M* se superposent. Ça veut dire que la hauteur est aussi médiane du triangle et donc que le triangle est isocèle. »



Un premier niveau de vérification

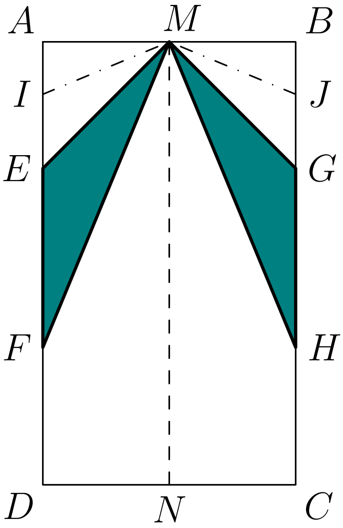
Les arguments cités se basent sur des vérifications dans le monde réel (mesurage, pliage a posteriori pour constater une superposition).



Un premier niveau de vérification

Les arguments cités se basent sur des vérifications dans le monde réel (mesurage, pliage a posteriori pour constater une superposition).

On vise un autre niveau de justification : un raisonnement déductif, sur la figure « idéale » définie par le protocole de construction, qui n'utiliserait que les données et des propriétés déjà démontrées.



Expliquons

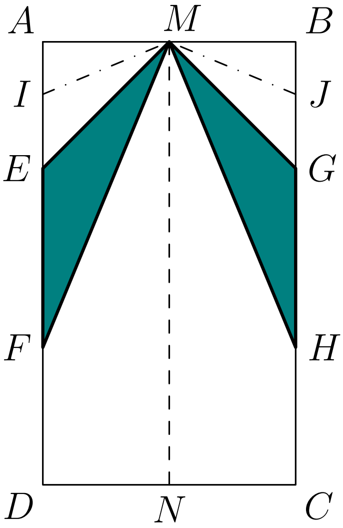
Via des angles alternes-internes

Les angles $\widehat{EMF}$ et $\widehat{NMF}$ ont même amplitude par pliage, car MF est la bissectrice de l'angle $\widehat{EMN}$.

Par ailleurs, les angles $\widehat{NMF}$ et $\widehat{EFM}$ sont alternes-internes déterminés par deux parallèles, ils ont donc même amplitude.

Par transitivité, les angles $\widehat{EMF}$ et $\widehat{EFM}$ ont même amplitude.

Le triangle est donc isocèle.



Expliquons

Via la somme des amplitudes des angles d'un triangle

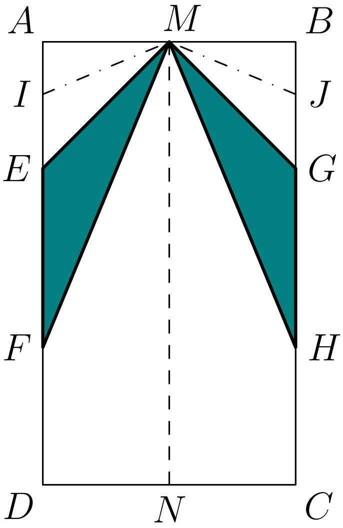
On a déjà dit que le triangle AME était rectangle isocèle.

Les deux angles $\widehat{AEM}$ et $\widehat{FEM}$ étant supplémentaires,
on a donc $|\widehat{FEM}| = 135°$.

Par ailleurs, $|\widehat{FME}| = 22{,}5°$,
puisque MF est la bissectrice d'un angle de $45°$.

La somme des amplitudes des angles d'un triangle valant $180°$, on en déduit donc que $|\widehat{EFM}| = 22{,}5°$.

Le triangle est donc isocèle.



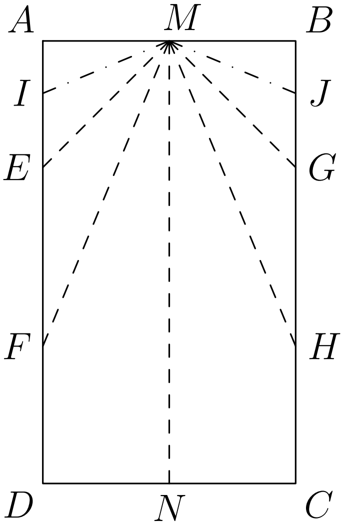
Prenons de la hauteur

Passage d’une géométrie instrumentée à une géométrie argumentée

Outre la mobilisation de notions liées aux propriétés de figures et aux angles, l’activité vise à travailler la distinction entre

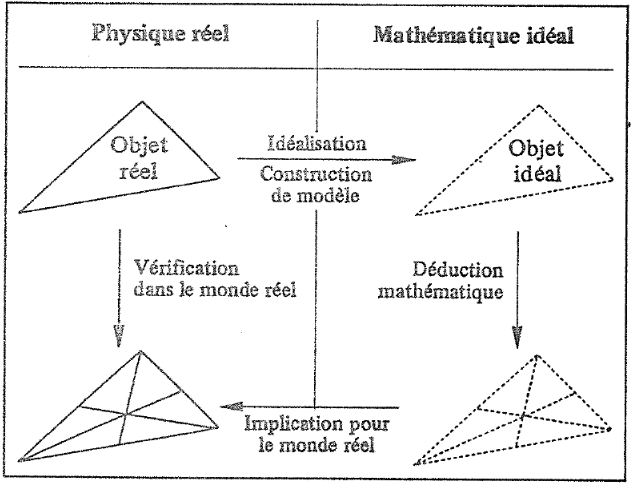
- *vérification par pliage* (ou par mesure),
  basée sur une construction réalisée a posteriori
- et *justification argumentée*,
  basée sur une construction réalisée a priori.

Dans le cas d’une vérification sur base de la construction a posteriori d’une hauteur, la distinction est subtile, car les apprenants se basent sur une propriété « non évidente » d’un triangle isocèle, ce qui peut donner l’impression de réaliser une justification dûment argumentée.



Prenons de la hauteur

Une distinction entre l'objet réel et l'objet idéal



Source : Davis et Hersh (1985), cité par Gaud et al. (1988)

Prenons de la hauteur

Trois temps pour l'appréhension des objets géométriques

Roland Charnay (1997-1998) dinstingue trois temps pour l'appréhension des objets géométriques :

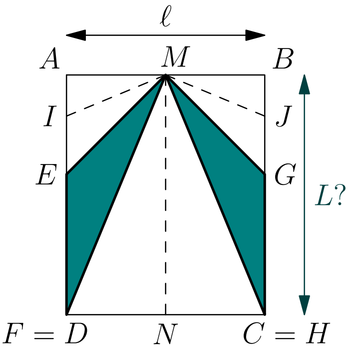
1. le temps de la géométrie « perceptive »,
2. le temps de la géométrie « instrumentée »,
3. le temps de la géométrie « mathématisée ».

D'autres modèles plus détaillés ont été proposés, comme les cinq niveaux de pensée en géométrie de P. et D. van Hiele (1958) et les trois paradigmes géométriques de C. Houdement et A. Kuzniak (1998-1999), adaptés en quatre paradigmes par B. Parzysz (2002).

L'articulation entre les deux modèles (niveaux des van Hiele et paradigmes géométriques) n'est pas si simple (cf. B. Parzysz (2002) et A. Braconne-Michoux (2014)).

D'autres exploitations possibles du pliage

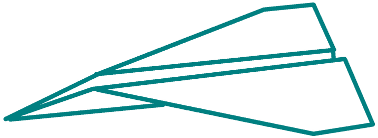
- Comme pour beaucoup de pliages, on peut demander aux élèves de décrire eux-mêmes géométriquement la construction, dans le but de travailler le vocabulaire spécifique.
- En 3e année, on peut aussi faire chercher la longueur de la feuille (en supposant sa largeur fixée) qui permettrait de construire un avion aux ailes triangulaires.
  $\longrightarrow$ *Pythagore et/ou trigonométrie du triangle rectangle*



Et maintenant, l’avion !

Pour terminer l’avion (en prenant une autre feuille de papier par exemple), repliez selon $[MN]$ pour amener le trapèze $MNCH$ sur $MNDF$.

Ensuite, pliez parallèlement à MN de part et d’autre du pliage pour former les ailes de l’avion (le choix de la position exacte de ces deux derniers plis, symétriques, est laissé à votre créativité de plieur).

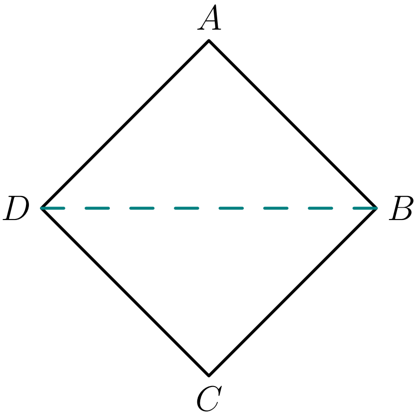


Un gobelet

Plions

Positionnez la feuille carrée $ABCD$ avec la face blanche visible.

Pliez pour amener le sommet C sur le sommet A.



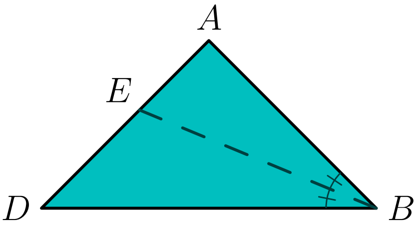
Plions

Vous obtenez un triangle à double couche.

Pliez pour amener le côté $[AB]$ le long du côté $[DB]$ (il suffit de plier une seule épaisseur de papier).

Nommez E le point d'intersection du pli et de $[AD]$.

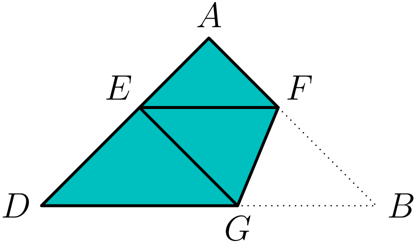
Dépliez.



Plions

Pliez pour amener le sommet B sur le point E.

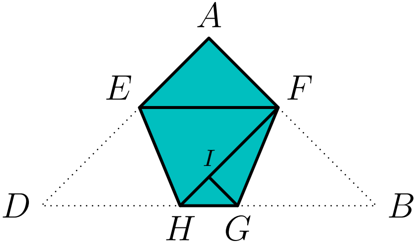
Nommez F le point d'intersection de ce pli et de $[AB]$ et nommez G son intersection avec $[DB]$.



Plions

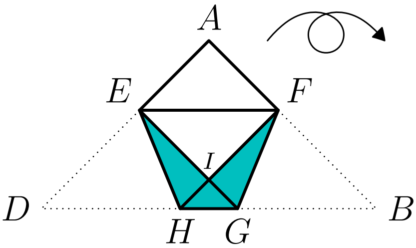
Pliez pour amener le sommet D sur F.

Nommez H l'intersection de ce pli avec $[BD]$ et nommez I l'intersection de $[EG]$ et $[FH]$.



Plions

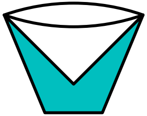
Pliez la couche supérieure de papier selon [*EF*].



Plions

Retournez le pliage et pliez de nouveau la couche de papier restante selon $[EF]$.

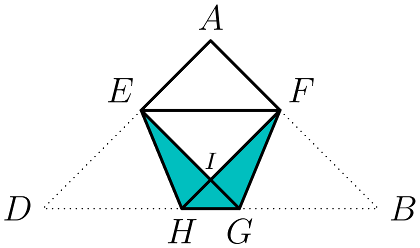
En entrouvrant le pliage, vous obtenez un gobelet.



Explorons

Explorez votre pliage, les points particuliers, les droites qui le forment, les figures géométriques qui le composent.

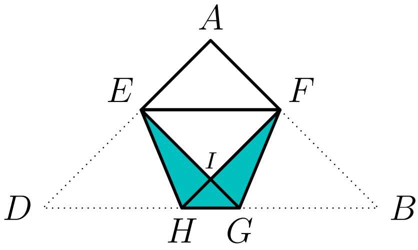
Certaines configurations vous intriguent-elles ?



Conjecturons

Quelques conjectures possibles :

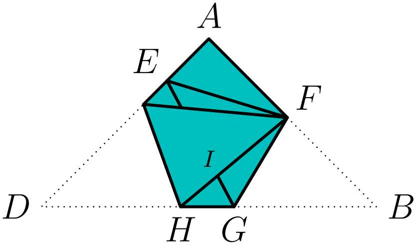
1. Lorsqu'on plie pour amener le sommet B sur le point E, le segment $[EF]$ obtenu est parallèle au côté $[BD]$.
2. Lorsqu'on plie pour amener le sommet D sur le point F, le pli passe par le point E.
3. Lorsqu'on plie la couche supérieure de papier selon EF, tout à la fin du pliage, le sommet se superpose à l'intersection I de deux segments préalablement construits.
4. Les triangles EFH et FEG sont isocèles.



Conjecturons

Quelques conjectures possibles :

1. Lorsqu'on plie pour amener le sommet B sur le point E, le segment $[EF]$ obtenu est parallèle au côté $[BD]$.
2. Lorsqu'on plie pour amener le sommet D sur le point F, le pli passe par le point E.
3. Lorsqu'on plie la couche supérieure de papier selon EF, tout à la fin du pliage, le sommet se superpose à l'intersection I de deux segments préalablement construits.
4. Les triangles EFH et FEG sont isocèles.

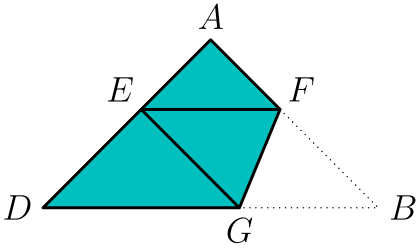


Ces propriétés semblent dépendre de la position du point E.

Expliquons

Un bord parallèle à la base

Le bord $[EF]$ semble parallèle à la base $[BD]$…



Expliquons

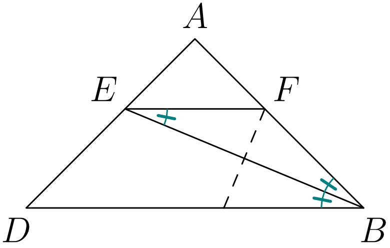
Un bord parallèle à la base

Via des angles alternes-internes

Le point E est construit comme l'intersection de $[AD]$ et de la bissectrice de $\widehat{ABD}$.
On a donc $|\widehat{ABE}| = |\widehat{DBE}|$.

Par ailleurs, le pli amenant B sur E superpose, par construction, les angles $\widehat{FBE}$ et $\widehat{FEB}$.
On a donc $|\widehat{FBE}| = |\widehat{FEB}|$.

Par transitivité, on a donc
$|\widehat{FEB}| = |\widehat{FBE}| = |\widehat{ABE}| = |\widehat{DBE}|$.
Les angles alternes-internes $\widehat{FEB}$ et $\widehat{DBE}$ ayant même amplitude, les droites EF et BD sont parallèles.



Expliquons

Un bord parallèle à la base

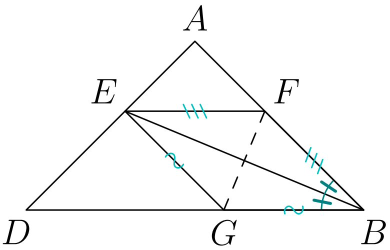
Via un losange

Par construction, $|EF| = |BF|$ et $|EG| = |BG|$. Le quadrilatère est donc un cerf-volant dont la diagonale FG est bissectrice des angles de sommets F et G.

Par ailleurs, par construction du point E, la diagonale BE est bissectrice des angles des autres sommets B et E.

Le quadrilatère $EFBG$ est donc un losange.

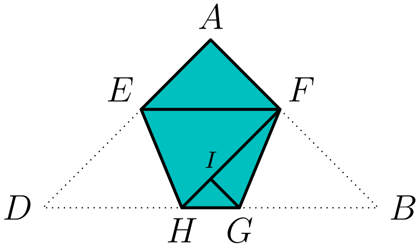
Ses côtés EF et BG sont donc parallèles.



Expliquons

Un pli passant par un point

Quand on plie pour amener D sur F,
le pli semble passer par le point E déjà construit…



Expliquons

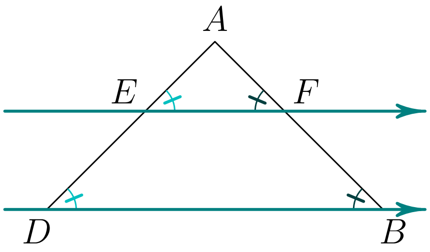
Un pli passant par un point

Puisque EF et DB sont parallèles, le triangle AFE est un triangle (rectangle) isocèle comme ADB.

Donc $|AE| = |AF|$ et aussi $|ED| = |FB|$.

Or, par construction, $|EF| = |FB|$.
Donc, par transitivité, $|EF| = |ED|$.
Le point E se situe donc bien sur le pli amenant D sur F, médiatrice de $[DF]$

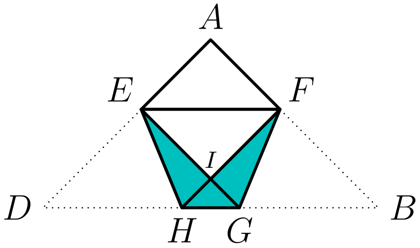
On aurait aussi pu raisonner sur des propriétés de symétrie de la figure.



Expliquons

Position du sommet replié

Quand on plie la couche supérieure de papier selon $[EF]$, le sommet semble se superposer à l'intersection I des segments $[EG]$ et $[FH]$ déjà construits…



Expliquons

Position du sommet replié

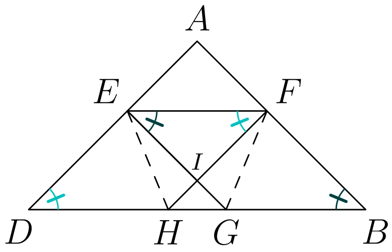
On a déjà montré plus haut que le triangle AEF est un triangle isocèle, rectangle en A.

L'angle $\widehat{FEG}$ mesure 45° car il se superpose par construction à l'angle $\widehat{FEG}$.

De même, l'angle $\widehat{EFH}$ mesure 45° comme $\widehat{EDH}$.

Il en découle que le troisième angle $\widehat{EIF}$ du triangle IEF mesure 90°.

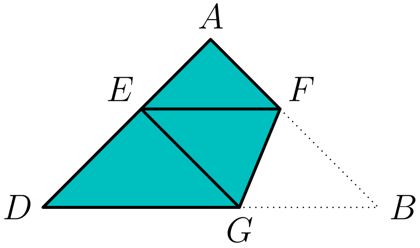
Ces deux triangles rectangles isocèles AEF et IEF ayant leur hypoténuse commune, ils sont isométriques.
Ils sont superposables par le pli EF.



Expliquons

Un triangle isocèle

Le triangle *EFG* semble isocèle…

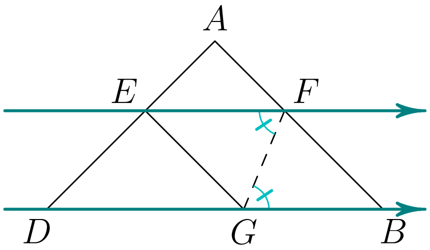


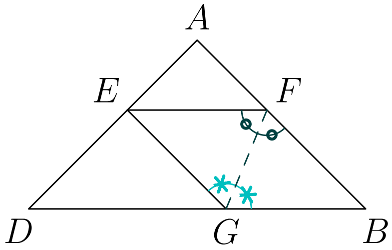
Expliquons

Un triangle isocèle

On pourrait le montrer de diverses manières…

Via un losange (1)
Via un losange (2)
Via des angles alternes-internes
Via la somme des angles d'un triangle





Prenons de la hauteur

Explorer pour conjecturer

Outre la mobilisation de notions liées aux propriétés de figures et aux angles, l'activité vise à travailler

- l'exploration libre du pliage,
- et l'extraction de conjectures,
- avant de passer aux preuves (très variées ici).

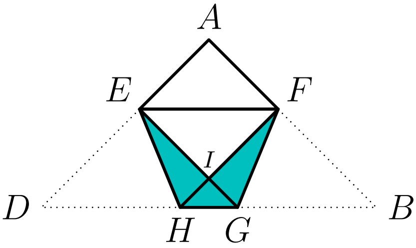
On travaille donc dans une démarche

« explorer, conjecturer, démontrer »

ou encore

« explorer, extraire, expliquer »

en référence au TriEx de Sherman Stein (1996).



Prenons de la hauteur

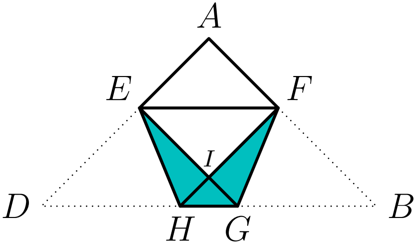
Le Tri Ex : Explorer, Extraire, Expliquer

I propose that we offer our classes what I call “triex” problems ; “triex” stands for, “Explore, Extract, Explain.” Such problems do not begin with, “show that,” “prove that,” or “verify that.” Instead, they begin with an opportunity for experimenting. The experiments should suggest a plausible conjecture to most students, even though at first glance the answer should not be at all evident. The conjecture should be easy enough for many of the students to prove. Even students who do not complete the third step of a triex are at least primed to appreciate the explanation when given by the instructor or by another student.

S. Stein (1996)

D'autres exploitations possibles du pliage

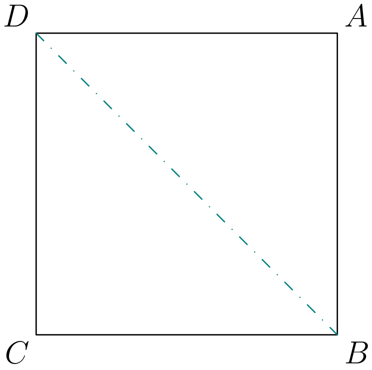
- On peut demander aux élèves de décrire eux-mêmes géométriquement la construction, dans le but de travailler le vocabulaire spécifique.
- Au 2e degré, on peut aussi faire chercher la hauteur du gobelet en fonction du côté de la feuille (ou l'inverse).
  $\longrightarrow$ *Thalès, Pythagore et/ou trigo du triangle rectangle, manipulations algébriques, avec éventuellement équation du second degré*
  $\longrightarrow$ *Bonus : découverte de* $\tan 22{,}5^\circ = \sqrt{2} - 1$
- Au 2e degré, on peut faire chercher l'aire latérale du gobelet en fonction du côté de la feuille.
  $\longrightarrow$ *Thalès, Pythagore, manipulations algébriques, ou découpage en puzzle*



Un pentagone

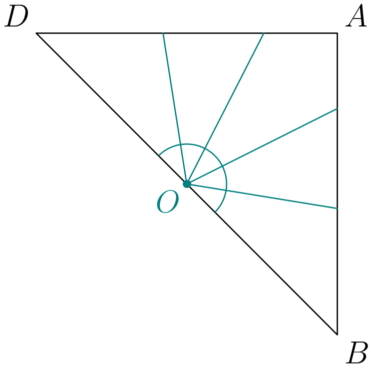
Plions

1. Commencer par plier la feuille de papier carrée en deux, selon sa diagonale.



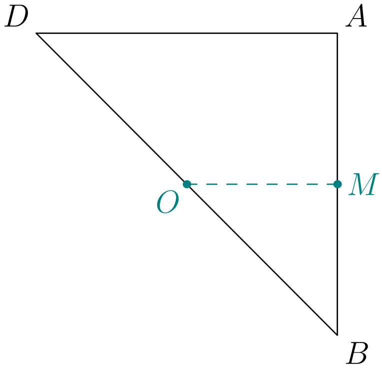
Plions

- L'idée sera de partager l'angle plat en cinq.



Plions

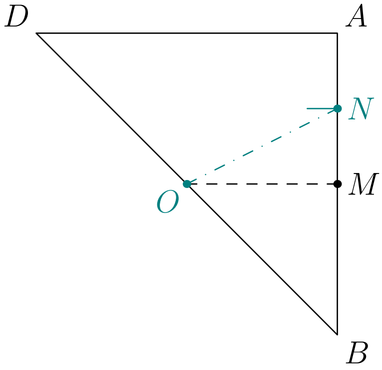
2. Faire un pli amenant B sur A.
   Nommer O l'extrémité de ce pli sur $[BD]$
   et M l'extrémité de ce pli sur $[AB]$.
   Déplier.



Plions

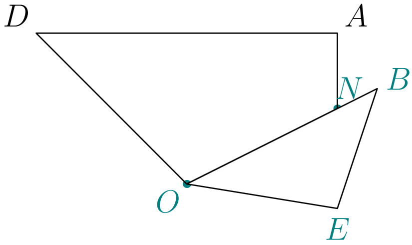
3. Par un pli court amenant A sur M, marquer le point N, milieu de $[AM]$. Déplier.

   Faire ensuite un pli montagne (vers l'arrière) passant par O et N. Déplier.



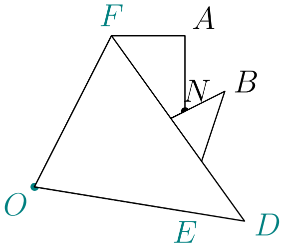
Plions

4. Faire un pli, passant par O, amenant $[OB$ sur $[ON$.
   Nommer E le point d'intersection de ce pli avec le bord de la feuille.



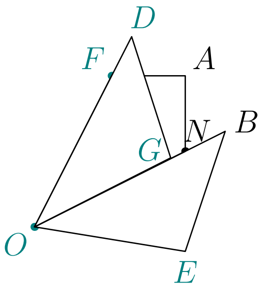
Plions

5. Faire un pli, passant par O, amenant $[OD$ sur $[OE$.
   Nommer F le point d'intersection de ce pli avec le bord de la feuille.



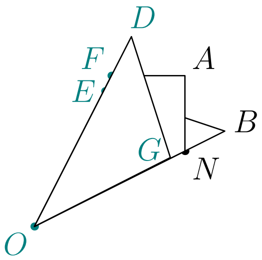
Plions

6. Faire un pli, à travers le volet supérieur, passant par O et amenant $[OD$ sur $[OF$. Nommer G le point d'intersection de ce pli avec le bord de la feuille.



Plions

7. Replier, en montagne, selon $[ON]$.

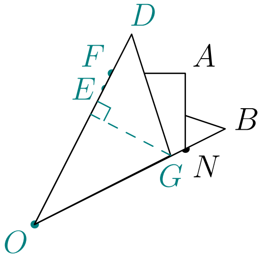


Plions

8. Faire un pli vallée (vers l'avant) à travers le volet supérieur, passant par G et perpendiculaire au bord $[OF$.

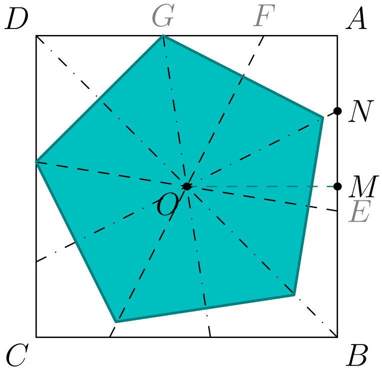
   Faire le même pli en montagne à travers le reste du pliage.

   Déplier complètement.



Réfléchissons

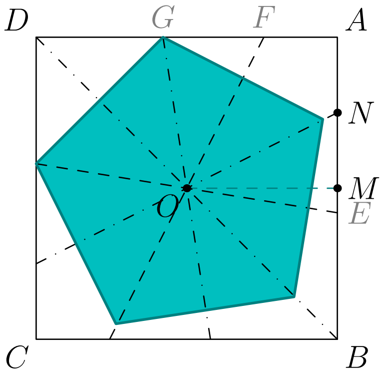
Le pentagone est-il régulier ?



Réfléchissons

Le pentagone est-il régulier ?

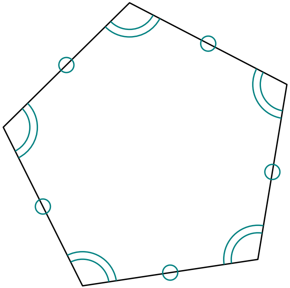
Plus précisément : peut-on *déduire*,
à partir des données du problème
(les instructions de pliage),
et utilisant des propriétés connues,
que l'*objet idéal* considéré
est un pentagone régulier ?



Réfléchissons

Un pentagone régulier est un pentagone équilatéral et équiangle. Autrement dit, un pentagone régulier est un pentagone tel que

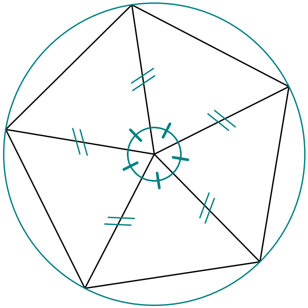
- ses cinq côtés ont même longueur,
- et ses cinq angles au sommet ont même amplitude.



Réfléchissons

On peut aussi caractériser le pentagone régulier comme

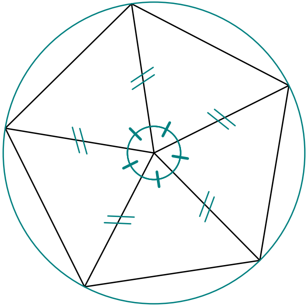
- un pentagone inscriptible à un cercle
- dont les cinq angles au centre ont même amplitude.



Réfléchissons

On peut aussi caractériser le pentagone régulier comme

- un pentagone inscriptible à un cercle
- dont les cinq angles au centre ont même amplitude.

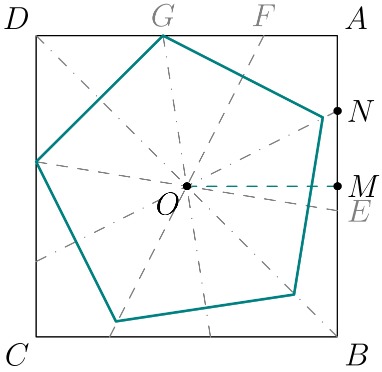


Dans un cas comme dans l'autre, cela fait beaucoup de choses à établir si on veut montrer que le pentagone construit est régulier…

Réfléchissons

Et si le pentagone *n'était pas régulier* ?
Que devrait-on établir pour le démontrer ?

Pour démontrer que le pentagone n'est *pas* régulier, il suffit de montrer qu'*une seule* des conditions précédentes est fausse.

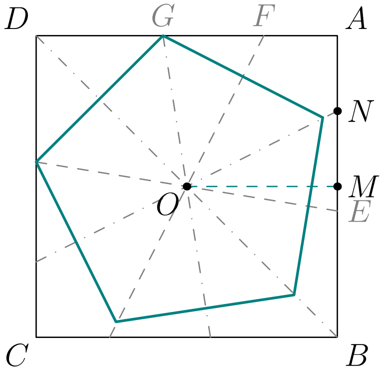


Réfléchissons

Et si le pentagone *n'était pas régulier* ?
Que devrait-on établir pour le démontrer ?

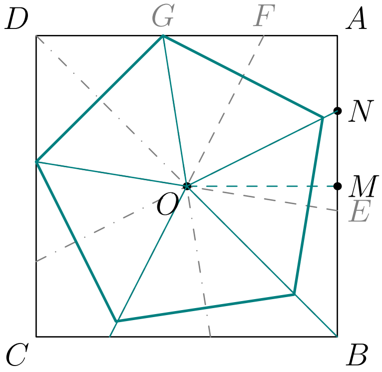
Pour démontrer que le pentagone n'est *pas* régulier, il suffit de montrer qu'*une seule* des conditions précédentes est fausse.

La construction était surtout une histoire de construction d'angles au centre…



Réfléchissons

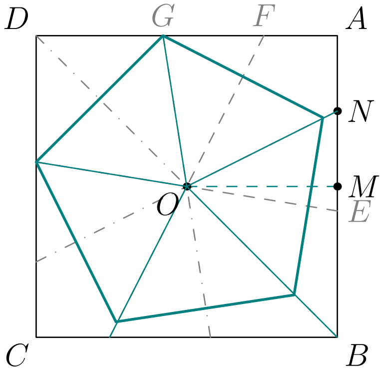
Cherchons donc à montrer que deux des angles au centre sont différents, ou qu'un d'entre eux ne mesure pas le cinquième de 360°.



Réfléchissons

Cherchons donc à montrer que deux des angles au centre sont différents, ou qu'un d'entre eux ne mesure pas le cinquième de 360°.

Quel angle choisir ?

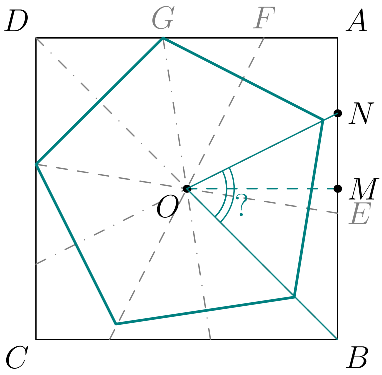


Réfléchissons

Cherchons donc à montrer que deux des angles au centre sont différents, ou qu'un d'entre eux ne mesure pas le cinquième de 360°.

Quel angle choisir ?

Un angle obtenu en tout début de construction.



Calculons

L'angle au centre $\widehat{BON}$ peut être décomposé en $\widehat{BOM}$ et $\widehat{MON}$.

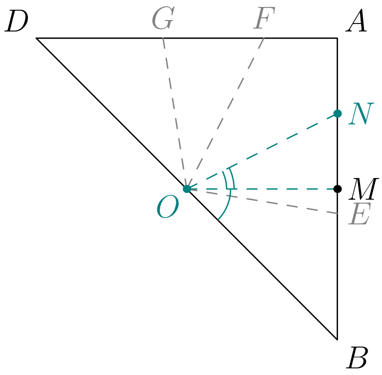
L'angle $\widehat{BOM}$ mesure 45°.

L'amplitude de l'angle $\widehat{MON}$ peut être calculée via trigonométrie dans le triangle rectangle MON :

$$\tan\left|\widehat{MON}\right| = \frac{|MN|}{|MO|} = \frac{1}{2}.$$

On trouve
$\left|\widehat{BON}\right| = 45^\circ + \arctan\frac{1}{2} \approx 71{,}565^\circ \neq 72^\circ$.

Le pentagone n'est donc pas régulier.

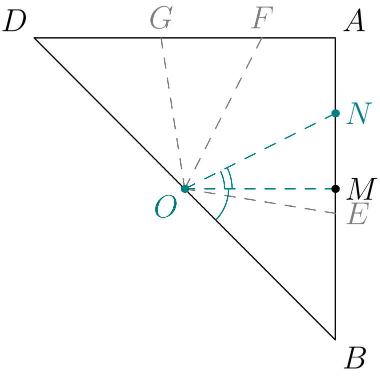


Prenons de la hauteur

Montrer qu'un énoncé est faux

Outre la mobilisation de notions liées aux propriétés des polygones réguliers et à la trigonométrie du triangle rectangle, la preuve que ce pentagone n'est pas régulier vise notamment

- à réfléchir sur le sens et l'utilité des démonstrations,
- à travailler des rudiments de logique : alors que pour montrer que le pentagone est régulier, il faudrait établir les différentes conditions, il suffit d'en infirmer une seule pour montrer qu'il ne l'est pas.



Pour aller plus loin

- D. Boursin et V. Larose (2000), *Pliages et mathématiques*, ACL – Les Éditions du Kangourou, 2e édition, Paris.
- A. Braconne-Michoux (2014), *Proposition d'articulation entre deux théories : les paradigmes géométriques et les niveaux de van Hiele*, Actes du Colloque du GDM 2014.
- P. Chapman-Bell (2006), *How to Make A Regular Decagon (or Pentagon, Whatever) from a Square*, The Fitful Flog, `http://origami.oschene.com/archives/2006/07/04/how-to-make-a-regular-decagon-or-pentagon-whatever-from-a-square/`
- R. Charnay (1997-1998), *De l'école au collège. Les élèves et les mathématiques*, Grand N, nº 62, pp.35-46.
- B. Franco (1999), *Unfolding Mathematics with Unit Origami*, Key Curriculum Press, Emeryville.
- D. Gaud, J.-P. Guichard, M. Marot, C. Robin et M. Robin (1988), *Géométrie de 4ème. Fascicule 1. Initiation à la démonstration. Calculs d'éléments métriques*, IREM de Poitiers.
- C. Houdement et A. Kuzniak (1998-1999), *Géométrie et paradigmes géométriques*, Petit *x*, nº 51, pp.5-21.
- L. Ninove (2015). *Angles et triangles dans un avion*, OrigamiMaths, `http://origamimaths.blogspot.com/2015/10/angles-et-triangles-dans-un-avion.html`
- L. Ninove (2015). *Un pentagone régulier dans un carré ?*, OrigamiMaths, `http://origamimaths.blogspot.com/2021/11/un-pentagone-regulier-dans-un-carre.html`
- L. Ninove (2017). *Un petit panier de Pâques*, OrigamiMaths, `http://origamimaths.blogspot.com/2017/04/un-petit-panier-de-paques.html`
- B. Parzysz (2002), *Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1*, Actes du 28e colloque COPIRELEM.
- S. Stein (1996). *The Triex : Explore, Extract, Explain*, Humanistic Mathematics Network Journal, nº 14, pp. 6-8.
- P. Wantiez et L. Ninove (2013), *Exploiter le pliage pour démontrer au milieu du secondaire*, Losanges, nº 20, 32-42.