Le théorème fondamental comme pierre de touche de l'enseignement et de l'apprentissage de l'analyse au niveau secondaire.

Kevin Balhan

Université de Liège

Plan de l'exposé :

1. Hypothèse de recherche, cadres théoriques et modèle épistémologique de référence.

Plan de l'exposé :

1. Hypothèse de recherche, cadres théoriques et modèle épistémologique de référence.

2. Quelques résultats d'une enquête épistémologique.

Plan de l'exposé :

1. Hypothèse de recherche, cadres théoriques et modèle épistémologique de référence.

2. Quelques résultats d'une enquête épistémologique.

3. Des obstacles d'apprentissages épistémologiques…

Plan de l'exposé :

1. Hypothèse de recherche, cadres théoriques et modèle épistémologique de référence.

2. Quelques résultats d'une enquête épistémologique.

3. Des obstacles d'apprentissages épistémologiques…

4. … En résonance avec des obstacles didactiques.

Plan de l'exposé :

1. Hypothèse de recherche, cadres théoriques et modèle épistémologique de référence.

2. Quelques résultats d'une enquête épistémologique.

3. Des obstacles d'apprentissages épistémologiques…

4. … En résonance avec des obstacles didactiques.

5. Notre ingénierie didactique comme méthodologie de recherche.

6. Conclusion.

1. Hypothèse de recherche, cadres théoriques et modèle épistémologique de référence.

Hypothèse de recherche :

Il se cristallise dans ce théorème toute une série d'obstacles à sa compréhension, que ce soit des difficultés d'apprentissages ou des déficits au niveau de l'enseignement.

Hypothèse de recherche :

Il se cristallise dans ce théorème toute une série d'obstacles à sa compréhension, que ce soit des difficultés d'apprentissages ou des déficits au niveau de l'enseignement.

Deux cadres théoriques :

La Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard

La Théorie des Situations Didactiques de Brousseau

Hypothèse de recherche :

Il se cristallise dans ce théorème toute une série d'obstacles à sa compréhension, que ce soit des difficultés d'apprentissages ou des déficits au niveau de l'enseignement.

Deux cadres théoriques :

La Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard

La Théorie des Situations Didactiques de Brousseau

Postulat de base de la didactique :

« Sa singularité originaire consiste à prendre comme objet premier à étudier (et donc à questionner, à modéliser et à problématiser selon les règles de l'activité scientifique), non pas le sujet apprenant ou le sujet enseignant, mais le savoir mathématique qu'ils sont censés étudier ensemble, ainsi que l'activité mathématique que leur projet commun d'étude les portera à réaliser. Pour expliquer les faits d'enseignement auxquels elle se voit confrontée, la didactique postule que le « mystère » est [d'abord] dans les mathématiques, et non pas dans les sujets qui ont à apprendre et à enseigner les mathématiques ». (Bosch et Chevallard)

Le regard praxéologique de la Théorie Anthropologique du Didactique :

Praxéologie

Le regard praxéologique de la Théorie Anthropologique du Didactique :

Praxéologie

praxis *logos*

Le regard praxéologique de la Théorie Anthropologique du Didactique :

Praxéologie

praxis — *logos*

Tâches — *Techniques*

Le regard praxéologique de la Théorie Anthropologique du Didactique :

Praxéologie

praxis — *logos*

Tâches — *Techniques* — *Discours*

Le regard praxéologique de la Théorie Anthropologique du Didactique :

Praxéologie

praxis — *logos*

Tâches — *Techniques* — *Discours*

Dialectique entre ostensifs et non-ostensifs

Concepts mathématiques

Le regard praxéologique de la Théorie Anthropologique du Didactique :

Praxéologie

praxis — *logos*

Tâches — *Techniques* — *Discours*

Dialectique entre ostensifs et non-ostensifs

Concepts mathématiques

Valence instrumentale

Valence sémiotique

Un feuilletage en deux niveaux praxéologiques (Schneider) :

- *Praxéologie de type « modélisation » :*

- *Praxéologie de type « déduction » :*

Un feuilletage en deux niveaux praxéologiques (Schneider):

- *Praxéologie de type « modélisation » :*

  Une construction à terme des « préconstruits » ou des objets mentaux par des concepts mathématiques…

  … qui suppose des discours technologiques et des définitions intermédiaires non standards.

- *Praxéologie de type « déduction » :*

Un feuilletage en deux niveaux praxéologiques (Schneider):

- *Praxéologie de type « modélisation » :*

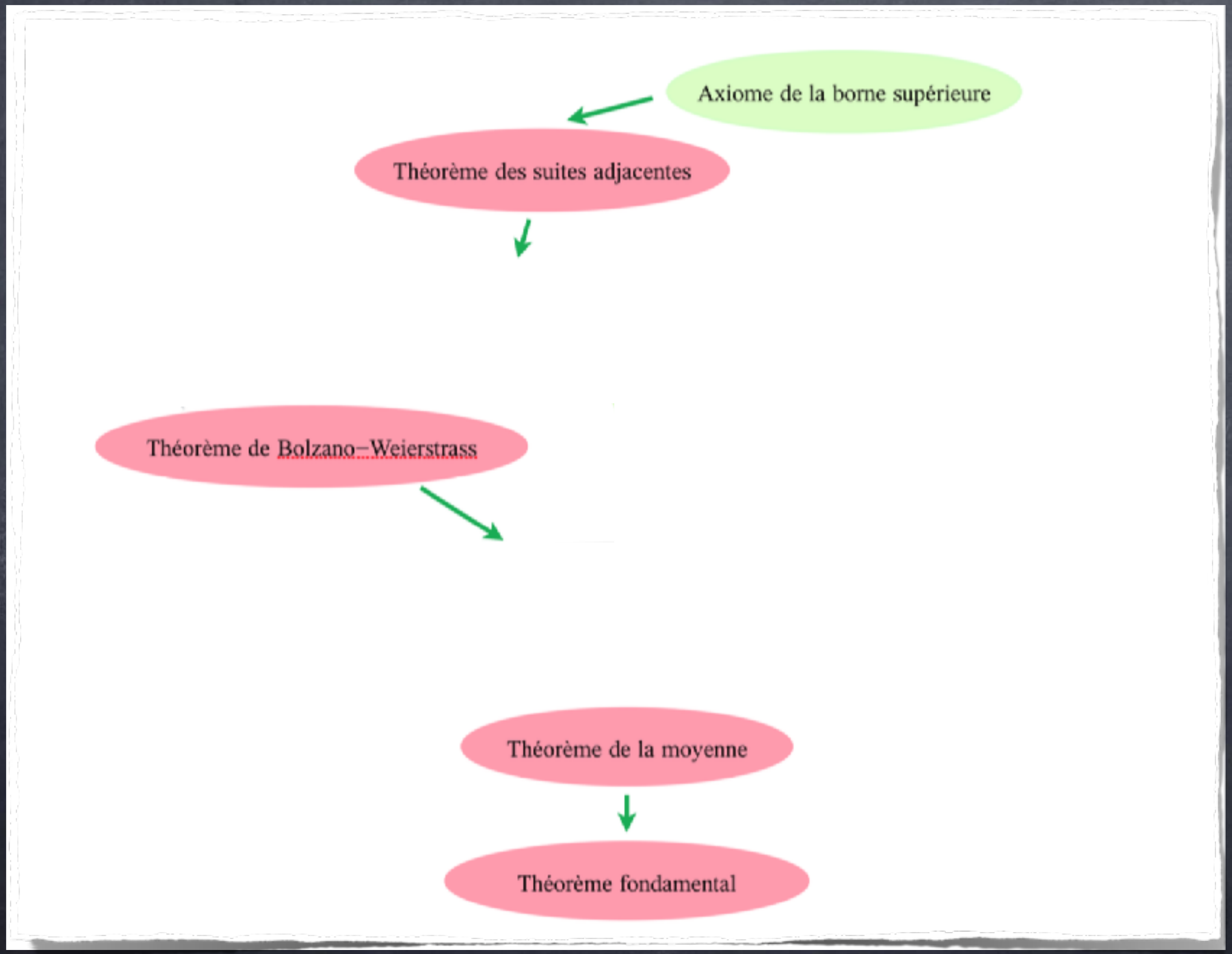
  Une construction à terme des « préconstruits » ou des objets mentaux par des concepts mathématiques…

  … qui suppose des discours technologiques et des définitions intermédiaires non standards

- *Praxéologie de type « déduction » :*

  Les préconstruits sont alors constitués en concepts proprement mathématiques qui donnent prise au raisonnement déductif.

Des praxéologies à « trous », (Rouy)



Un feuilletage en deux niveaux praxéologiques (Schneider):

- *Praxéologie de type « modélisation » :*

  Une construction à terme des « préconstruits » ou des objets mentaux par des concepts mathématiques…

  … qui suppose des discours technologiques et des définitions intermédiaires non standards

- *Praxéologie de type « déduction » :*

  Les préconstruits sont alors constitués en concepts proprement mathématiques qui donnent prise au raisonnement déductif.

Echelle de codétermination didactique de Chevallard :

Niveau -3	Civilisation
Niveau -2	Société
Niveau -1	Ecole
Niveau 0	Pédagogie
Niveau 1	Discipline : mathématique
Niveau 2	Domaine : Analyse
Niveau 3	Secteur : Calcul Intégral
Niveau 4	Thème : Théorème fondamental
Niveau 5	Sujet : Calcul d'une aire

Echelle de codétermination didactique de Chevallard :

Niveau -3	Civilisation
Niveau -2	Société
Niveau -1	Ecole
Niveau 0	Pédagogie
Niveau 1	Discipline : mathématique
Niveau 2	Domaine : Analyse
Niveau 3	Secteur : Calcul Intégral
Niveau 4	Thème : Théorème fondamental
Niveau 5	Sujet : Calcul d'une aire

2. Quelques résultats d'une enquête épistémologique

Problèmes d'optimisation

Problèmes géométriques de recherche de tangentes à des courbes

Problèmes de vitesses variables

Problèmes de quadratures, cubatures…

Fermat

Newton

Leibniz

Problèmes d'optimisation

Problèmes géométriques de recherche de tangentes à des courbes

Problèmes de vitesses variables

Fermat

Problèmes de quadratures, cubatures…

Newton

Leibniz

Méthode d'adégalité

Problèmes d'optimisation

Problèmes géométriques de recherche de tangentes à des courbes

Problèmes de vitesses variables

Problèmes de quadratures, cubatures…

Fermat

Newton

Leibniz

Méthode d'adégalité

Réciprocité

Nouvelle méthode

Théorème fondamental

- *fédère des problèmes variés en une praxéologie globale*
- *fournit une technique de calcul d'aires, de volumes, ...*

Théorème fondamental

- *fédère des problèmes variés en une praxéologie globale*
- *fournit une technique de calcul d'aires, de volumes, ...*

Grandeurs aires, volumes, vitesses, ...

Modèles des grandeurs dans une dialectique ostensifs/non ostensifs.

Newton

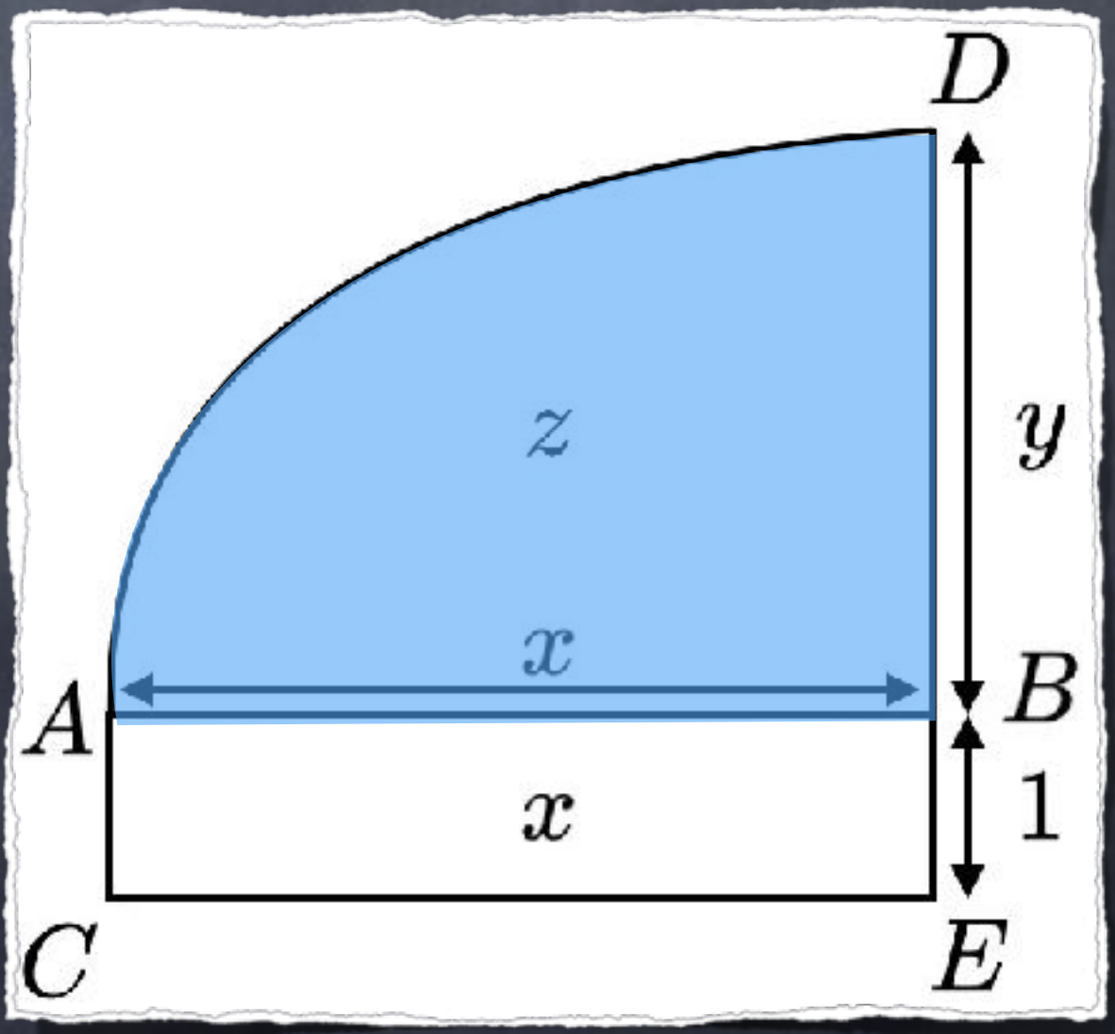
Fluentes : grandeurs qui varient dans le temps

$$x, y, z$$

Fluxions : taux d'écoulement des grandeurs dans le temps $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$

Newton

« Je vais considérer dans cet ouvrage les grandeurs mathématiques non pas comme étant formées de parties constantes même infiniment petites mais comme étant engendrées par un mouvement continu. Les lignes seront décrites et par là générées non par addition de parties mais par un mouvement continu de points, les surfaces par un mouvement de lignes, les solides par un mouvement de surfaces. »

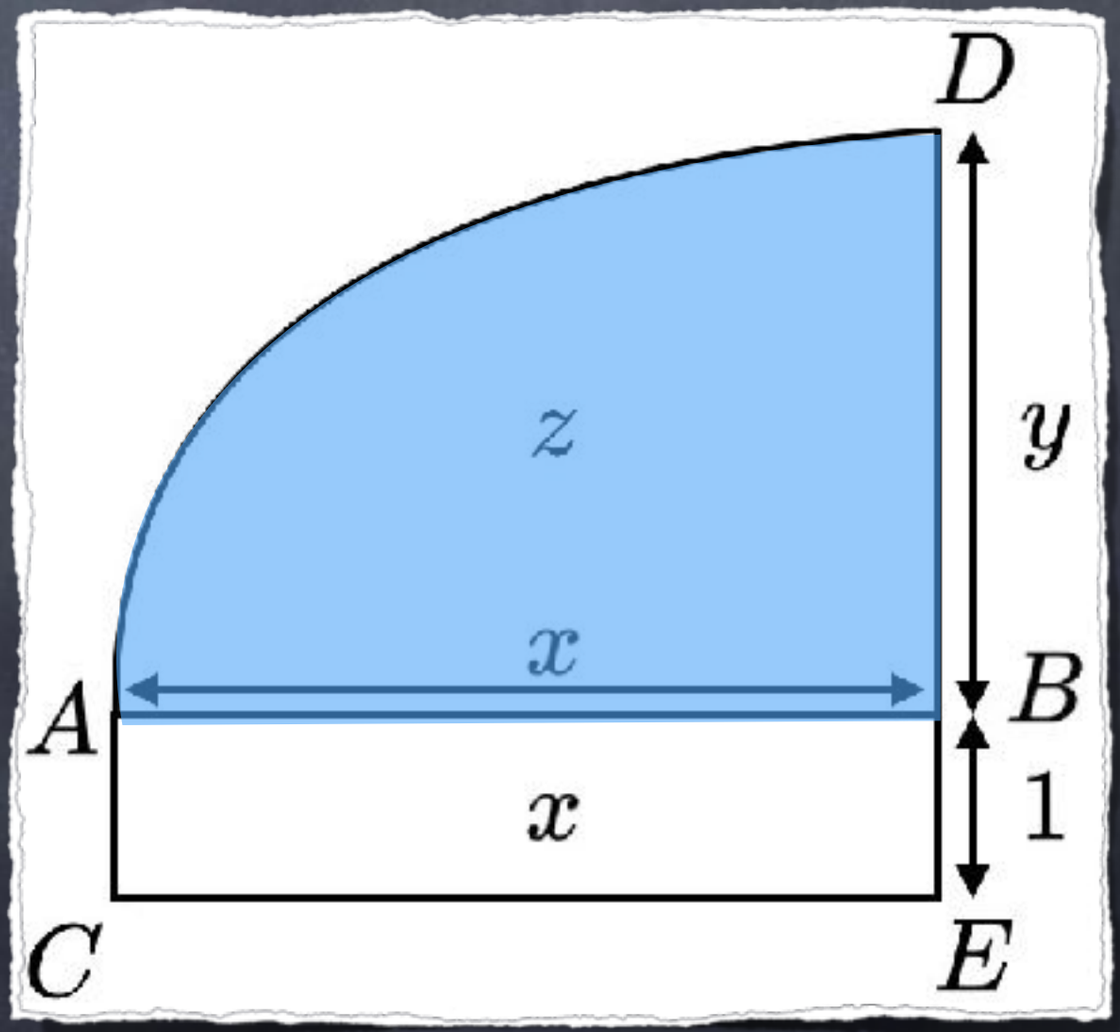


Newton

« Je vais considérer dans cet ouvrage les grandeurs mathématiques non pas comme étant formées de parties constantes même infiniment petites mais comme étant engendrées par un mouvement continu. Les lignes seront décrites et par là générées non par addition de parties mais par un mouvement continu de points, les surfaces par un mouvement de lignes, les solides par un mouvement de surfaces. »

Ultima ratio : $\dfrac{z}{\dot{x}}$

$$\dot{x} = 1$$



Leibniz

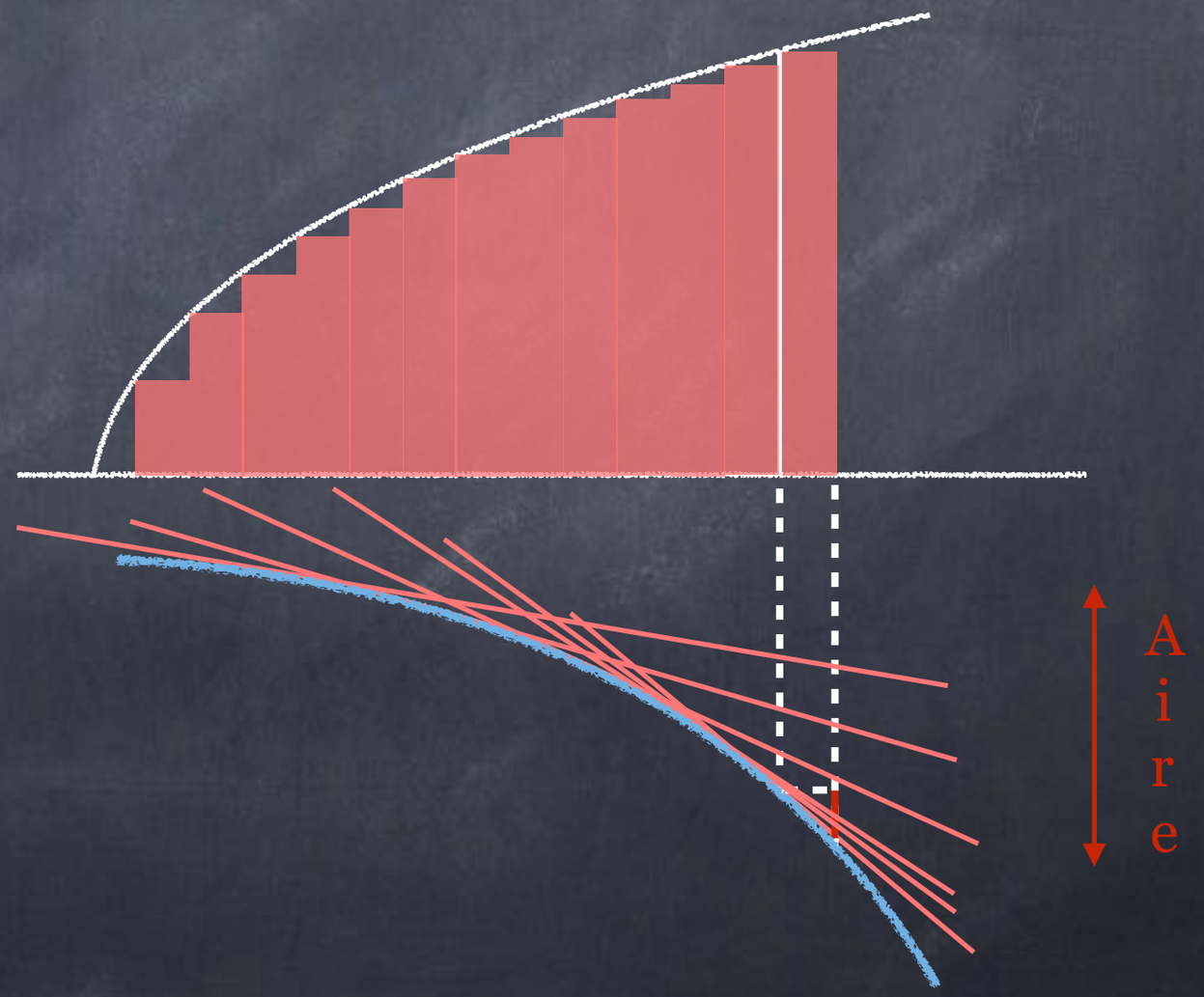
« Je voudrais montrer à présent que le problème général des Quadratures revient à construire une courbe dont les pentes obéissent à une loi donnée; [...] »

Leibniz

« Je voudrais montrer à présent que le problème général des Quadratures revient à construire une courbe dont les pentes obéissent à une loi donnée; [...] »

Leibniz

« Je voudrais montrer à présent que le problème général des Quadratures revient à construire une courbe dont les pentes obéissent à une loi donnée; [...] »

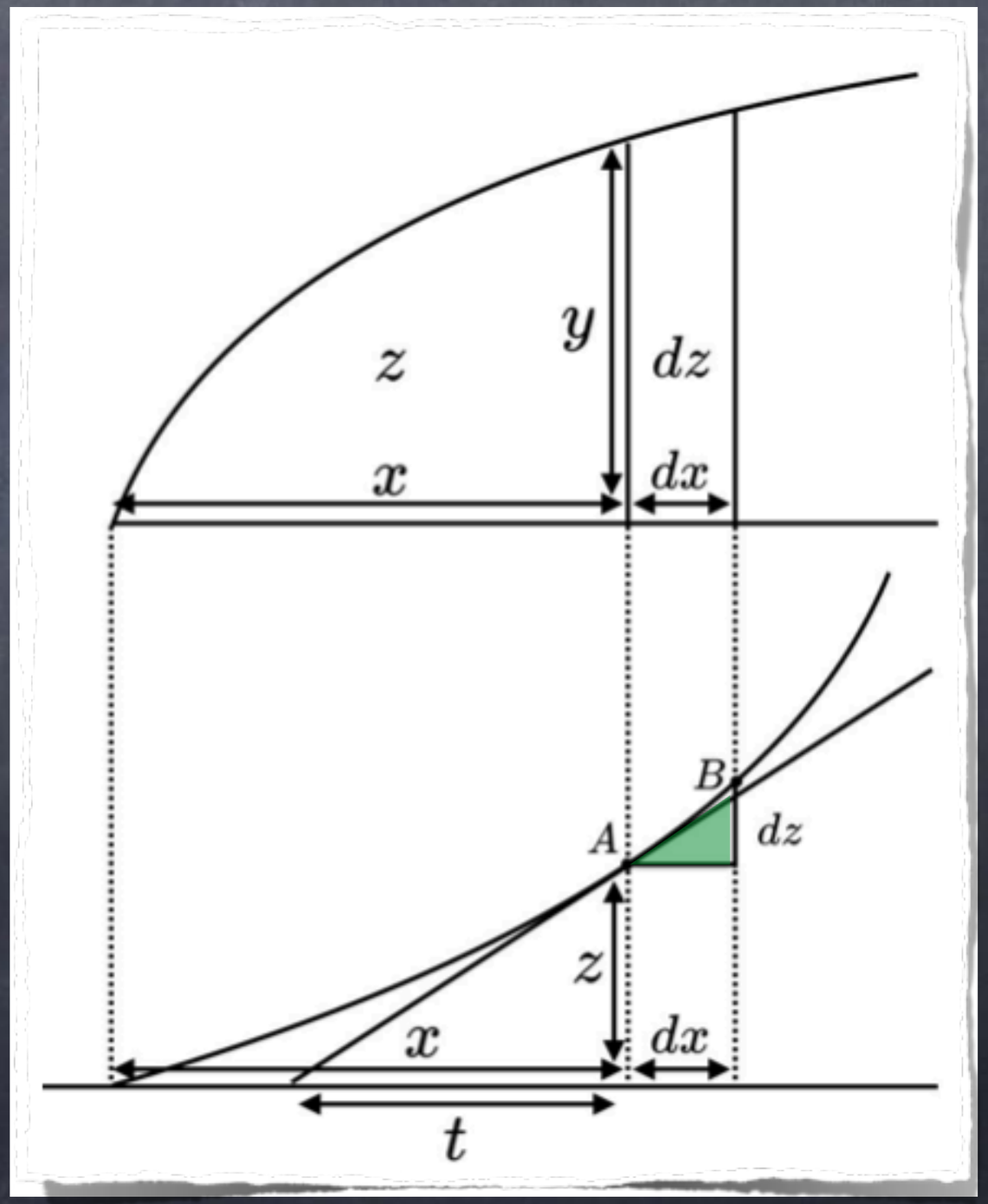


Leibniz

Différentielles : dx, dy, dz

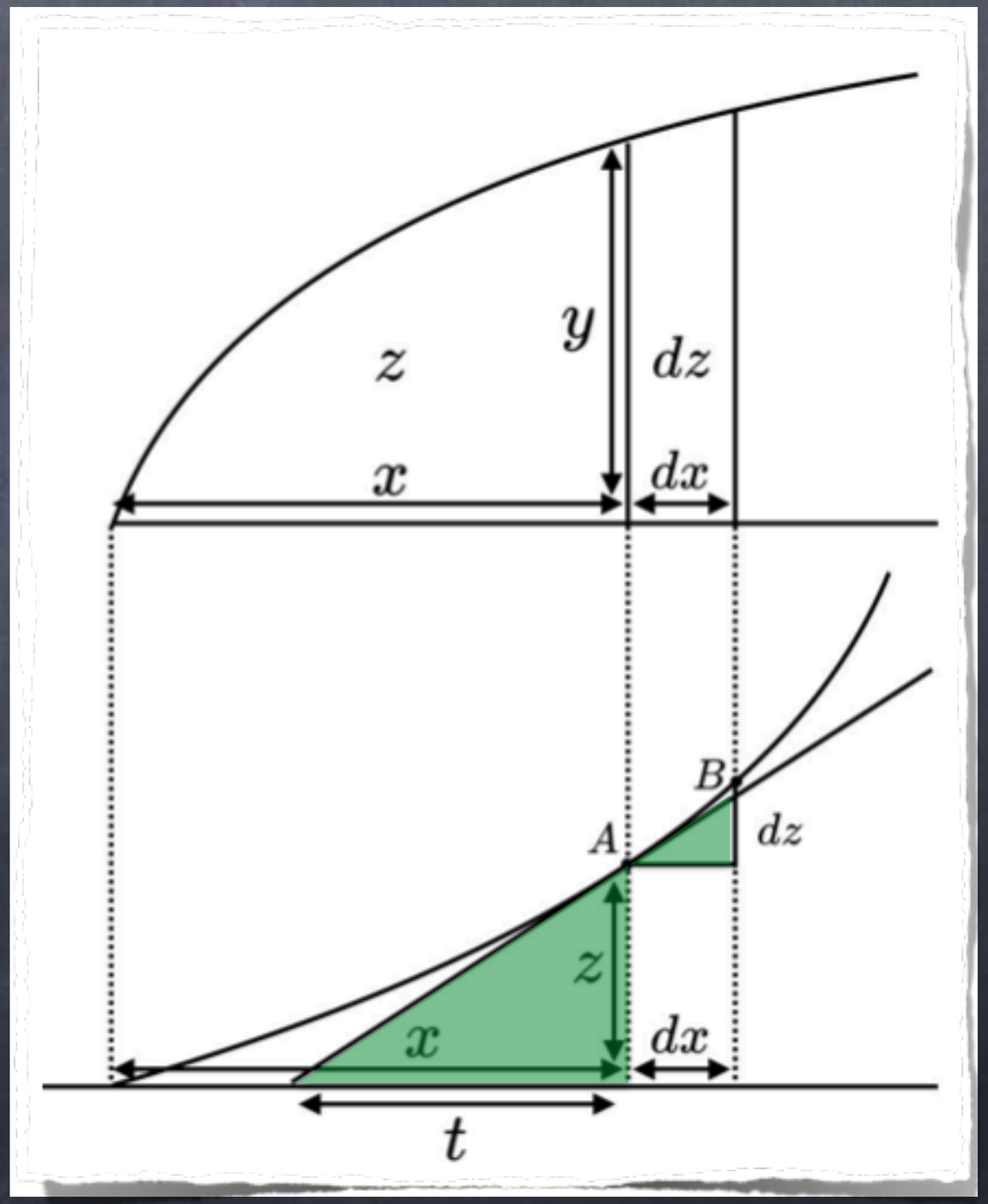
Leibniz

Différentielles : dx, dy, dz



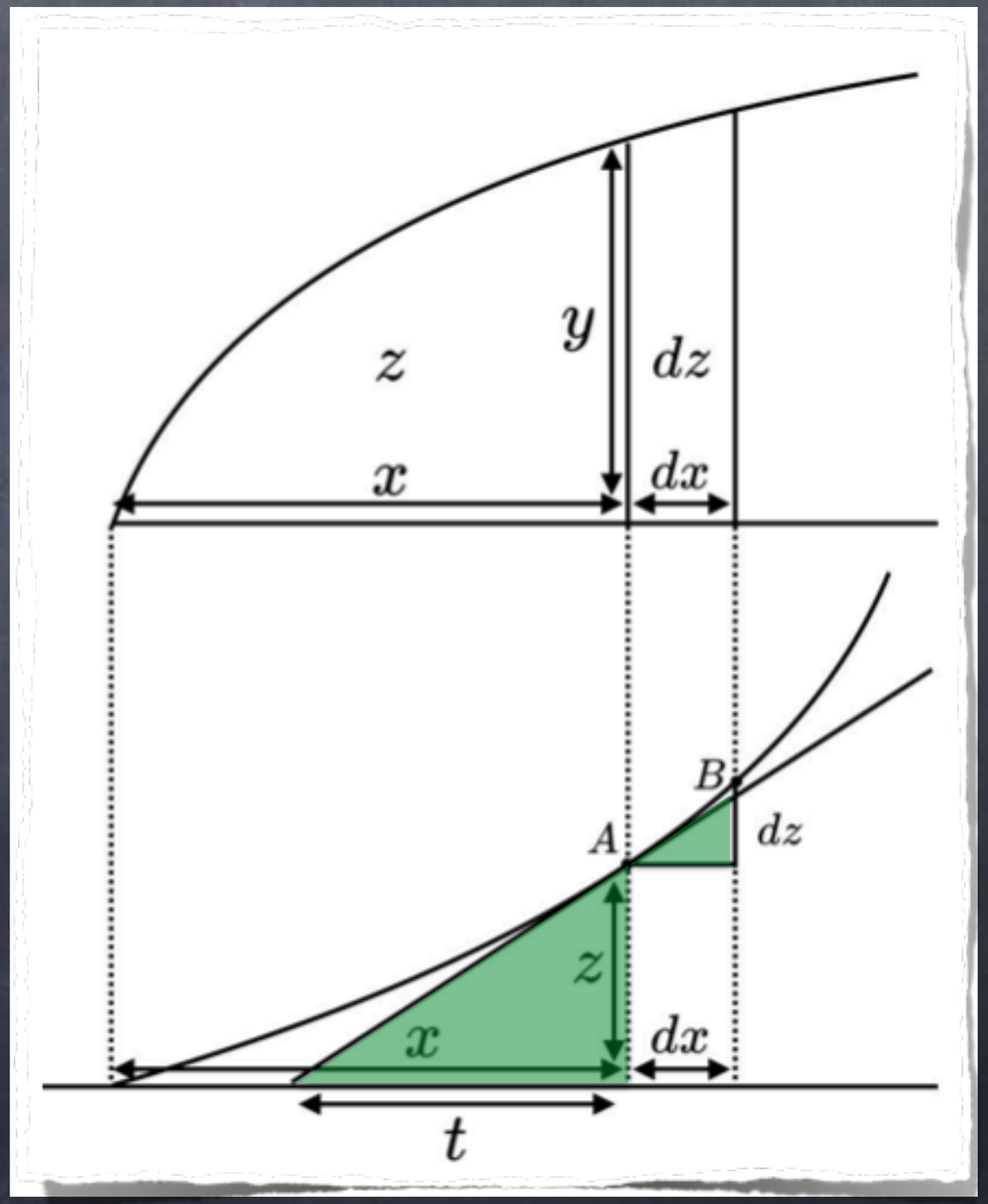
Leibniz

Différentielles : dx, dy, dz



Leibniz

Différentielles : $dx,\ dy,\ dz$



$$\frac{dz}{dx} = y$$

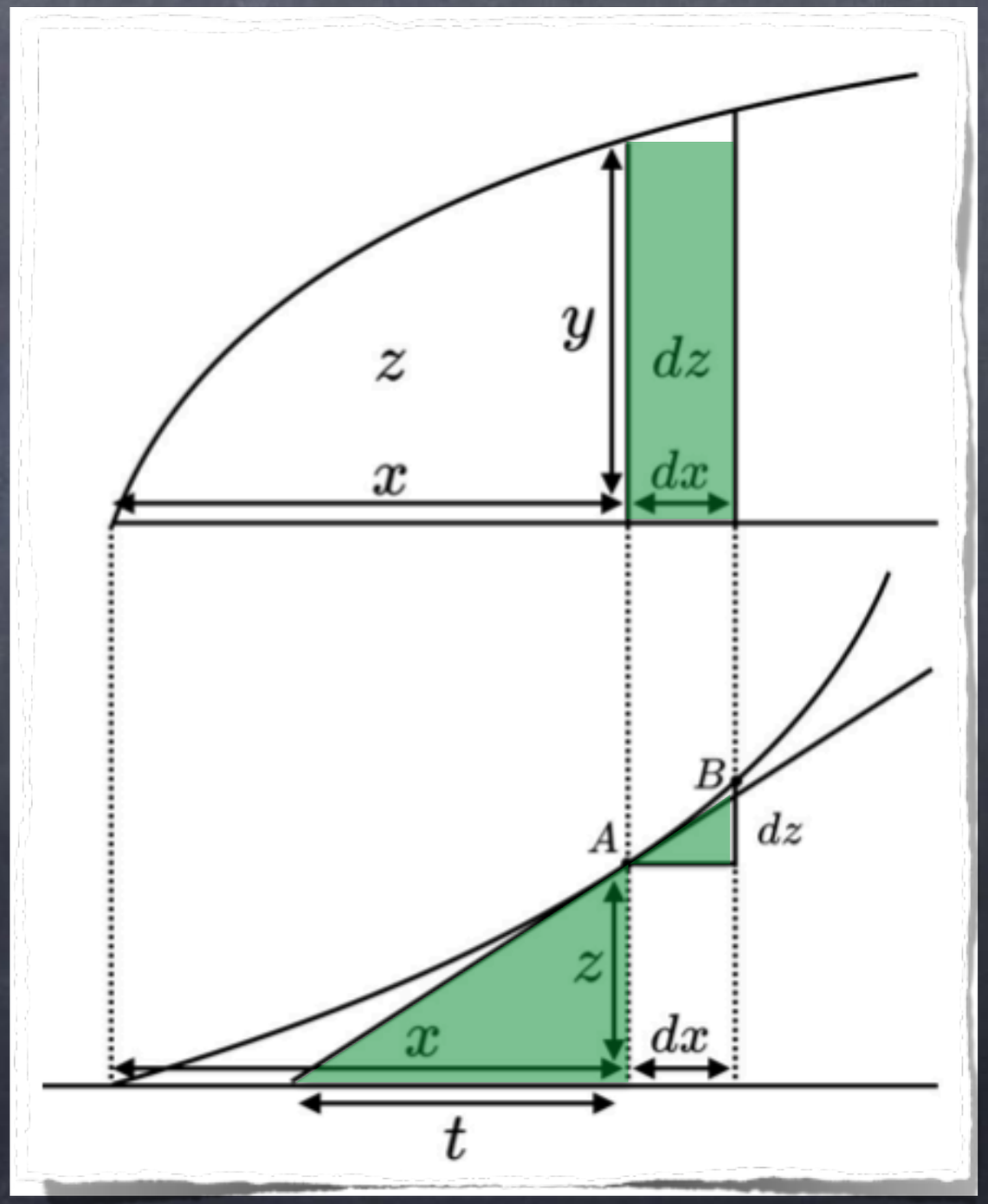
Leibniz

Différentielles : $dx,\ dy,\ dz$

$$dz = y\,dx$$

relation homogène en dx *et en* dz

$$\frac{dz}{dx} = y$$



Le théorème fondamental

- fédère des problèmes variés en une praxéologie globale
- fournit une technique de calcul d'aires, de volumes, ...

Grandeurs aires, volumes, vitesses, ...

Liens explicites

et modélisation assumée

Modèles des grandeurs dans une dialectique ostensifs/non ostensifs.

Newton

« Mais comme nous n'avons pas besoin de considérer ici le temps autrement que comme exprimé et mesuré par un mouvement local uniforme, et qu'outre cela nous ne pouvons jamais comparer ensemble que des quantités du même genre, non plus que leurs vitesses d'accroissement et de diminution; je n'aurai dans ce qui suit aucun égard au temps considéré proprement comme tel; mais je supposerai que l'une des quantités proposées de même genre doit augmenter par une fluxion uniforme, à laquelle quantité peut avec raison recevoir le nom de temps; ainsi quand dans la suite pour donner des idées plus claires et distinctes, je me servirai du mot temps, je n'entends jamais le temps proprement pris comme tel, mais seulement une autre quantité par l'augmentation ou fluxion de laquelle le temps peut être exprimé et mesuré. »

$$\dot{x} = 1$$

Leibniz

[...] les seules différentielles restantes, dx et dy, apparaissent toutes en dehors des dénominateurs et des radicaux; de surcroît, chacun de ses membres est multiplié soit par dx, soit par dy, puisque, aussi compliqué que soit le calcul, on y a toujours respecté la loi d'homogénéité à l'égard de ces deux grandeurs. On peut par conséquent toujours en déduire la valeur de $\frac{dx}{dy}$ *[...]*

$$a\,dx = z\,dy$$

Le théorème fondamental

- *fédère des problèmes variés en une praxéologie globale*
- *fournit une technique de calcul d'aires, de volumes, ...*

Grandeurs aires, volumes, vitesses, ...

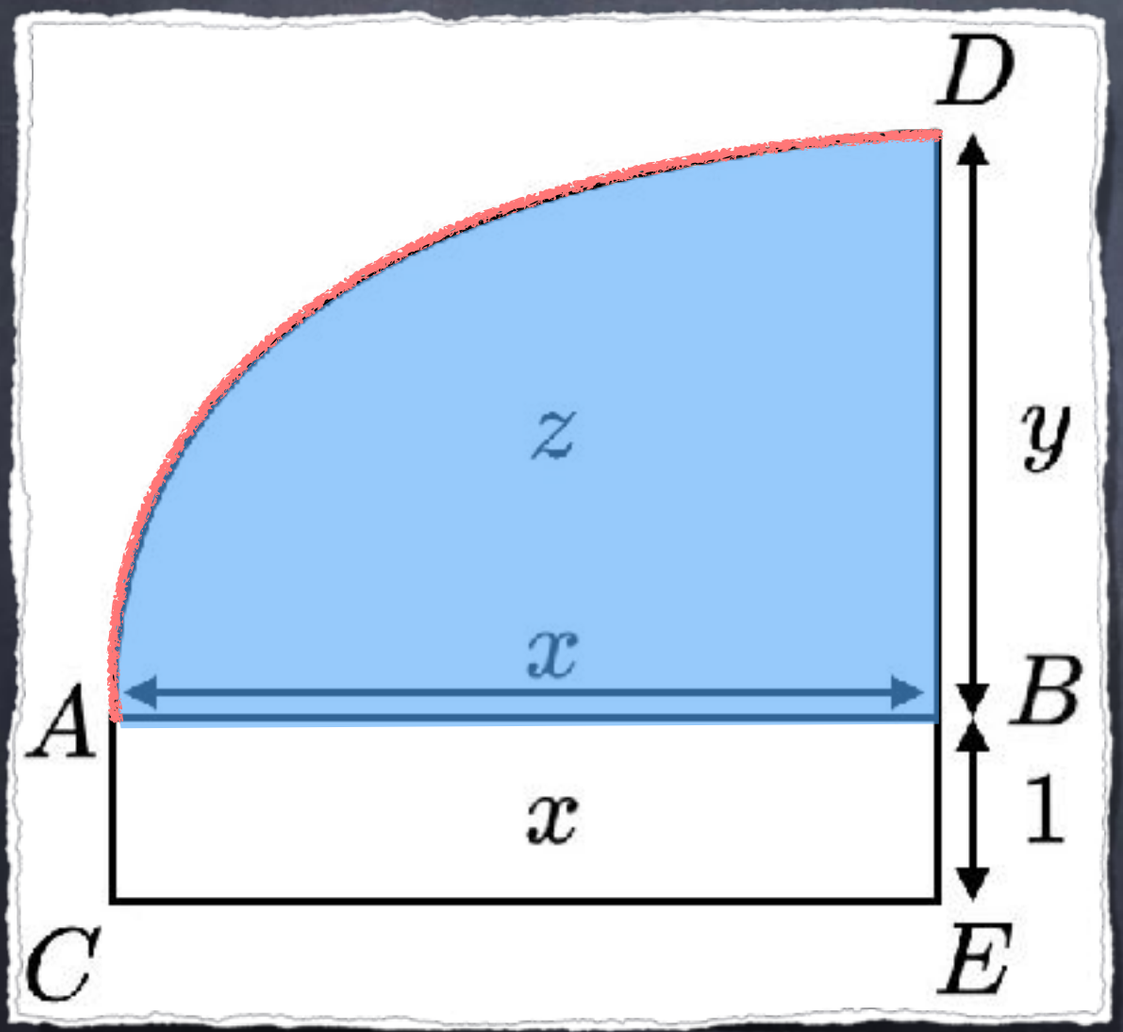
Liens explicites et modélisation assumée

Modèles des grandeurs dans une dialectique ostensifs/non ostensifs.

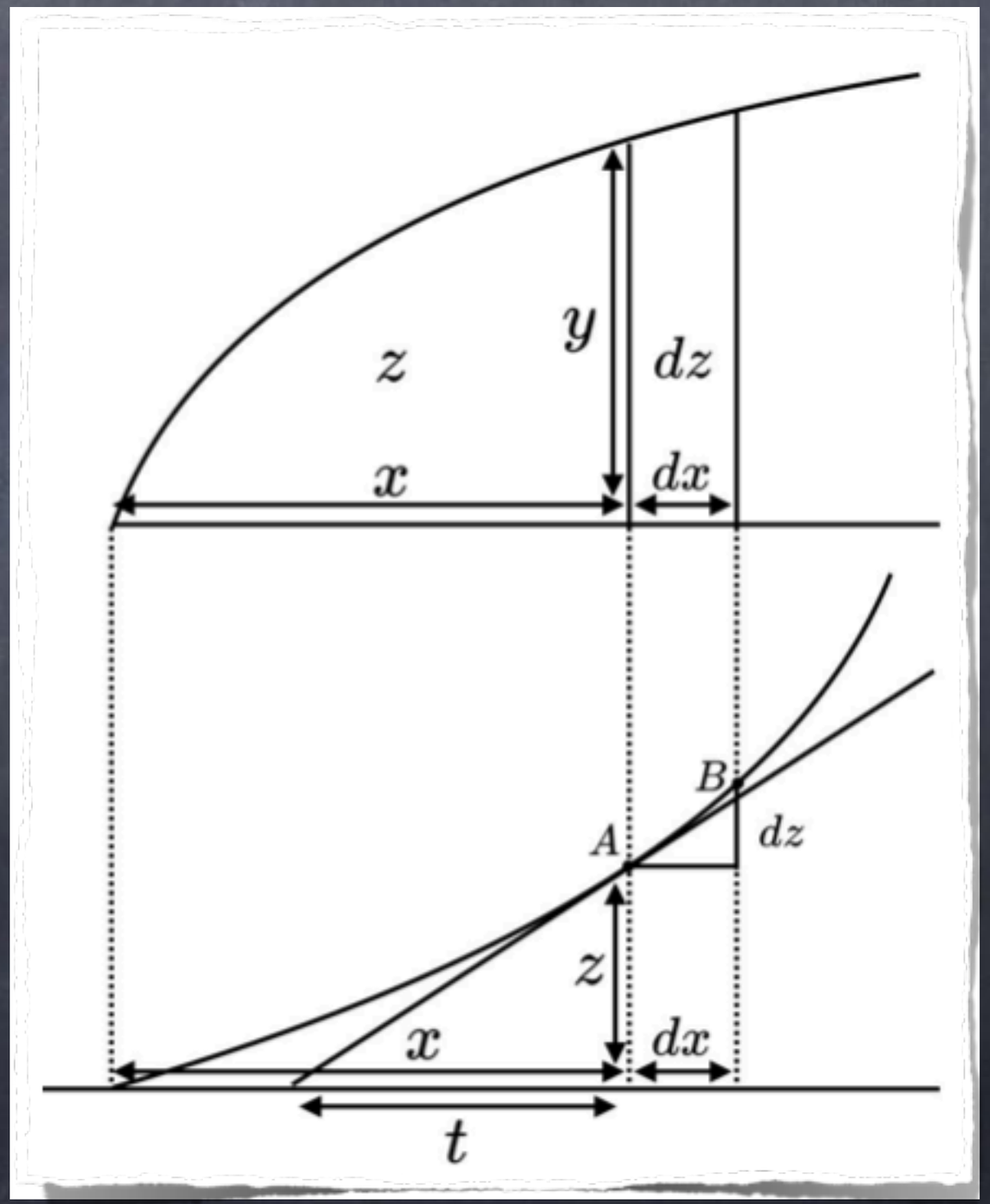
Mise en correspondance de deux covariations

Une mise en correspondance de deux covariations…

Newton

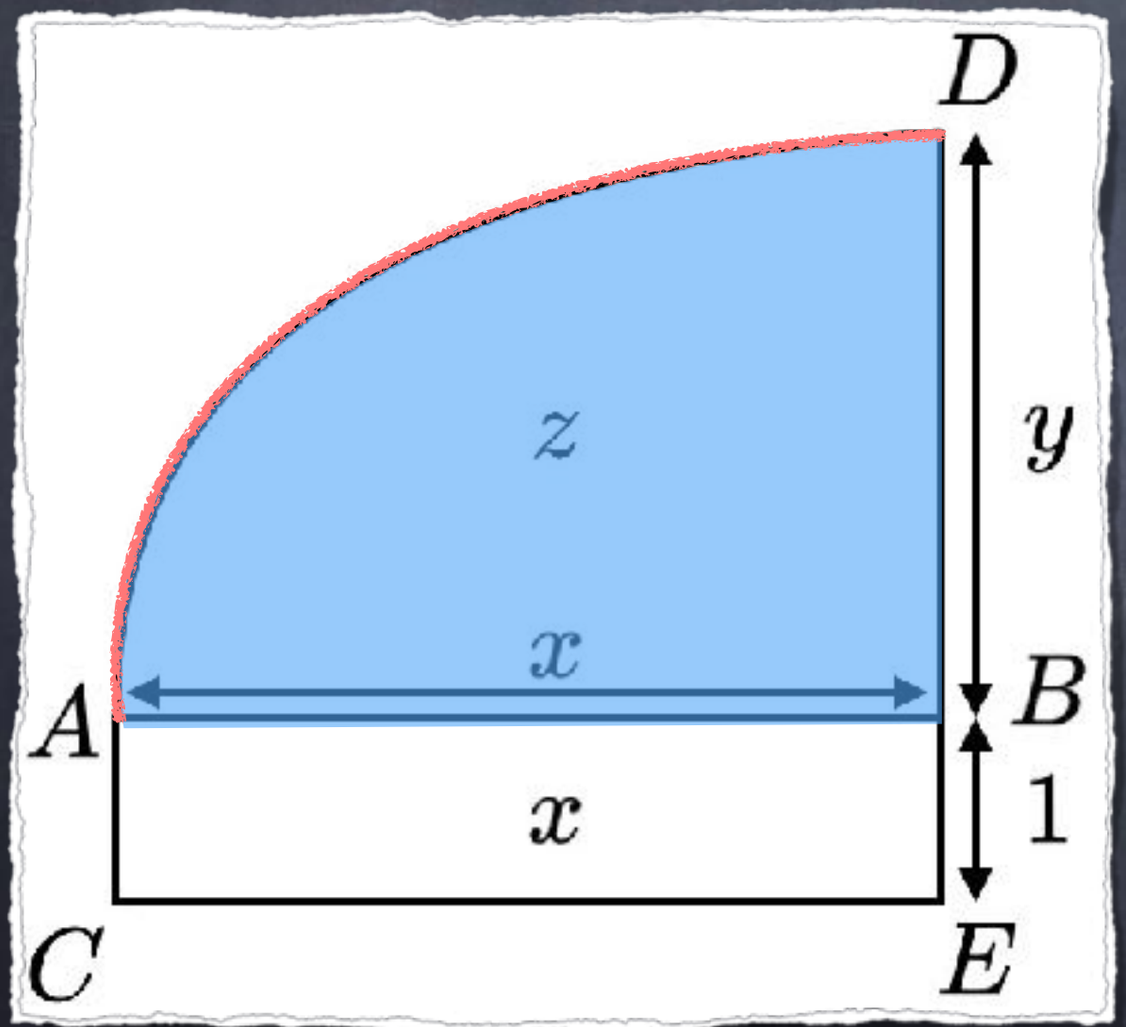


Leibniz

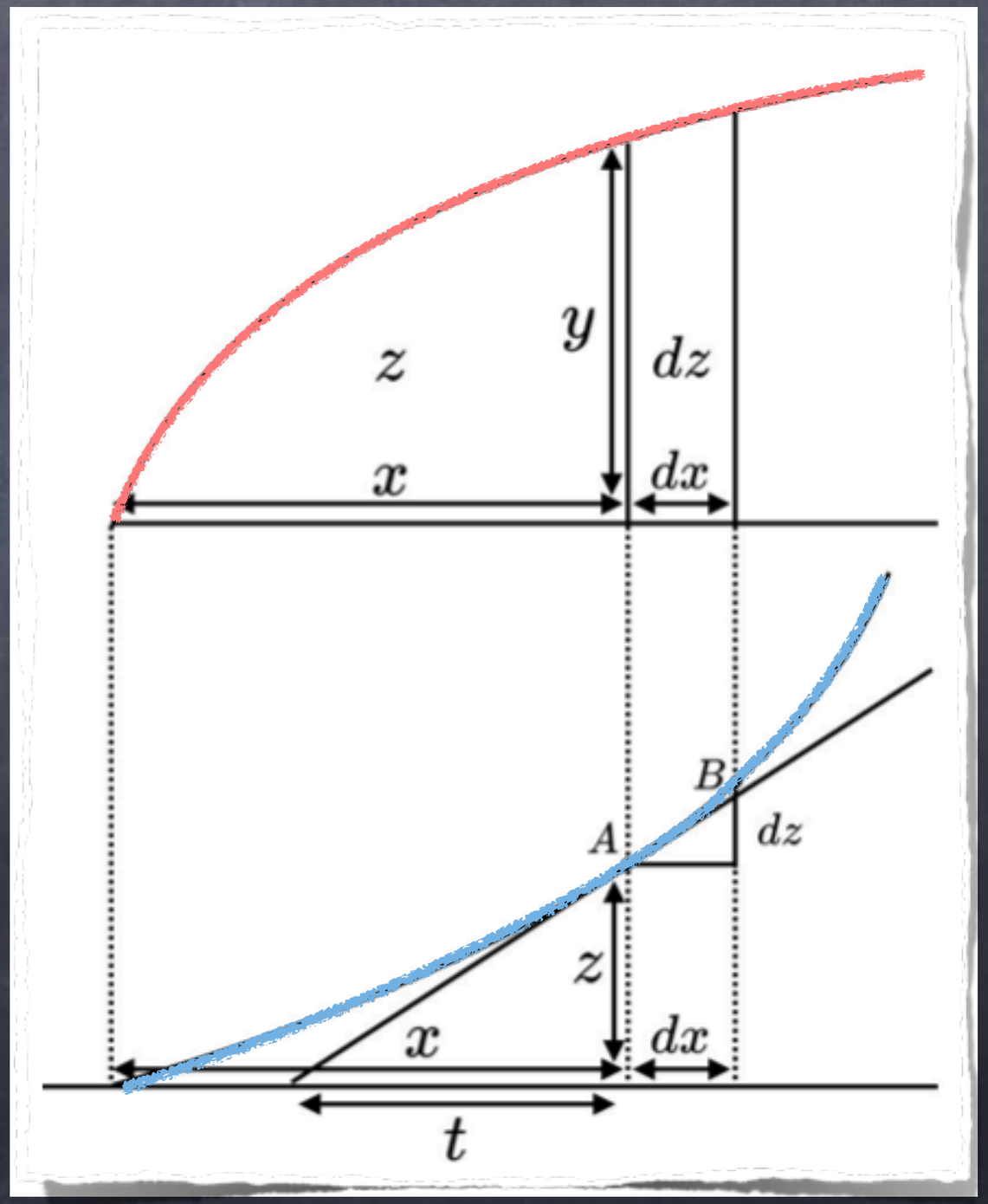


Une mise en correspondance de deux covariations…

Newton



Leibniz



Le théorème fondamental

- fédère des problèmes variés en une praxéologie globale
- fournit une technique de calcul d'aires, de volumes, ...

Grandeurs aires, volumes, vitesses, ...

Liens explicites et modélisation assumée

Modèles des grandeurs dans une dialectique ostensifs/non ostensifs.

Mise en correspondance de deux covariations

Double regard fonctionnel

- qui articule le local et le global

Articulation local/global… selon Rogalski

Propriété ponctuelle

Propriété locale

Propriété locale universelle

Propriété globale

Articulation local/global... selon Rogalski

Propriété ponctuelle

Propriété locale

Propriété locale universelle

Propriété globale

$$D \int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

Articulation local/global… selon Rogalski

Propriété ponctuelle

Propriété locale

Propriété locale universelle

Propriété globale

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Articulation local/global… selon Schneider

Théorème fondamental

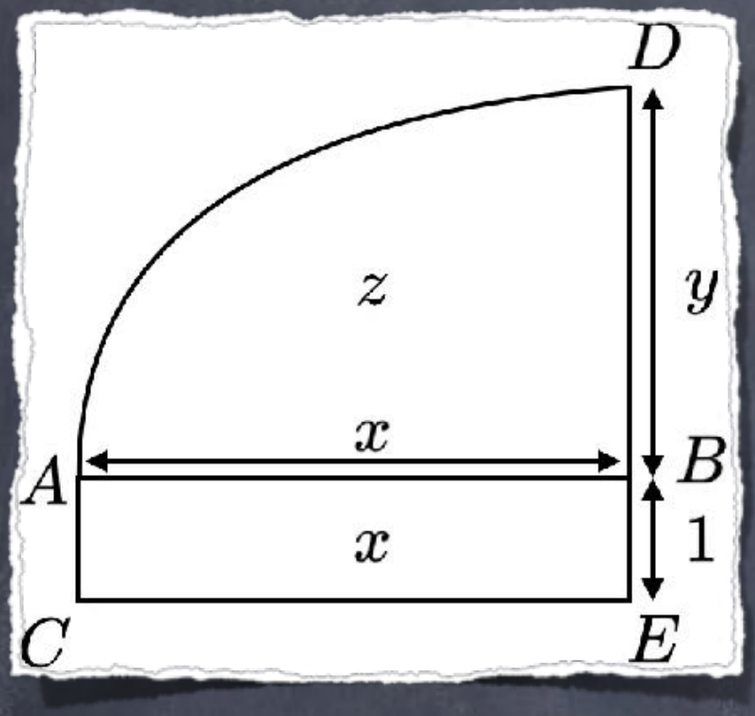
local seulement
en apparence

CAR une fonction est une « chose »

- locale
  image en une abscisse
- globale
  ensemble des images

Une articulation local/global… chez Newton et Leibniz

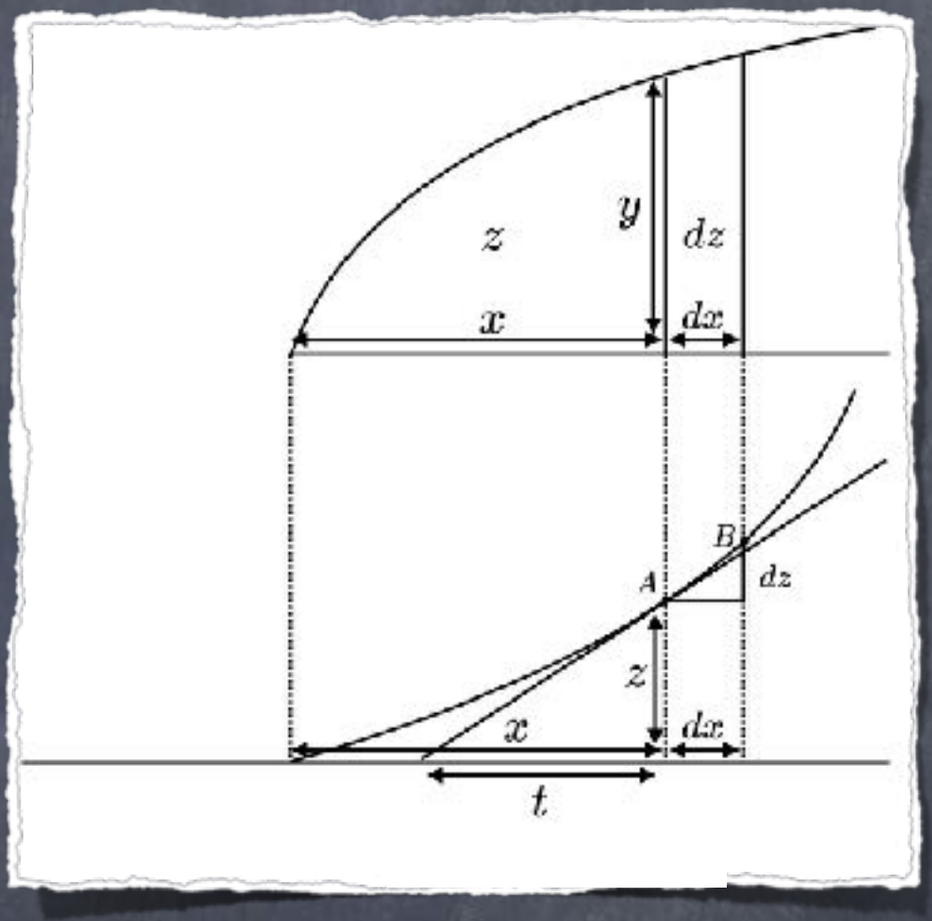
Newton



$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$$

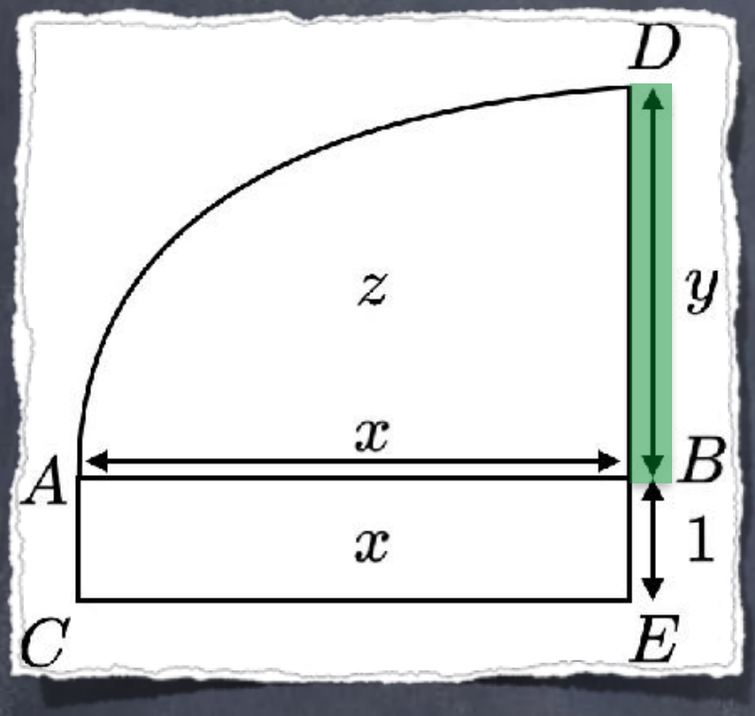
$z \longrightarrow y$

Leibniz



Une articulation local/global… chez Newton et Leibniz

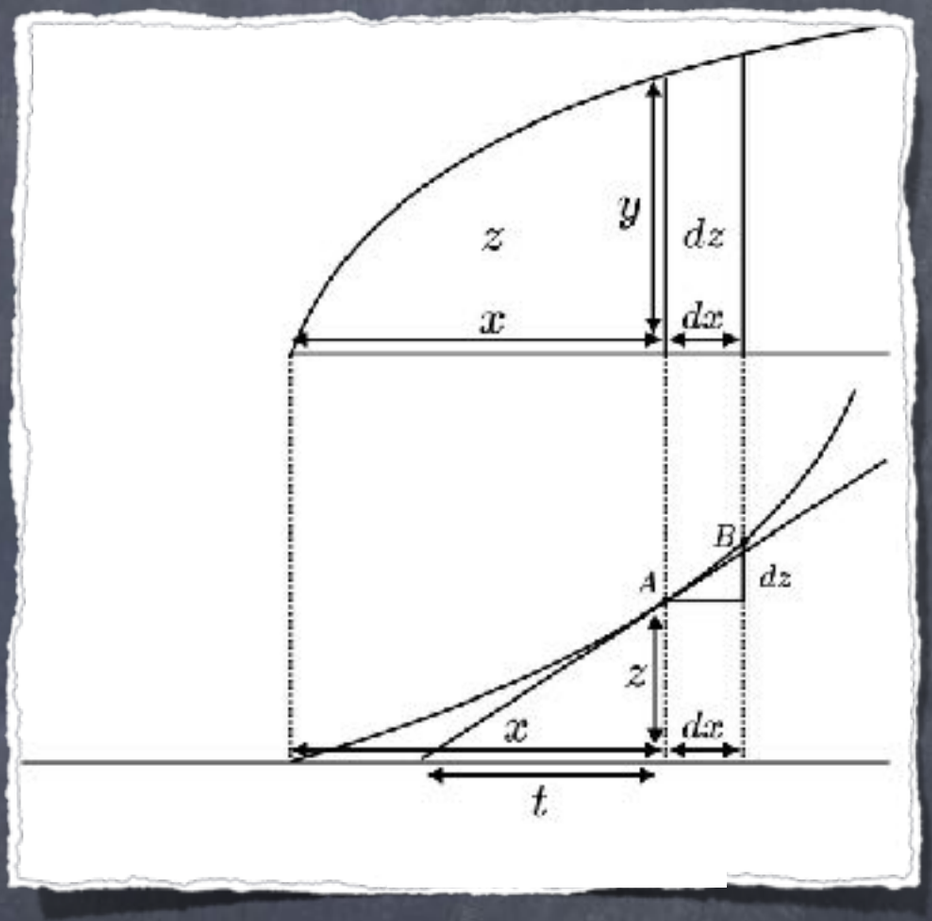
Newton



$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$$

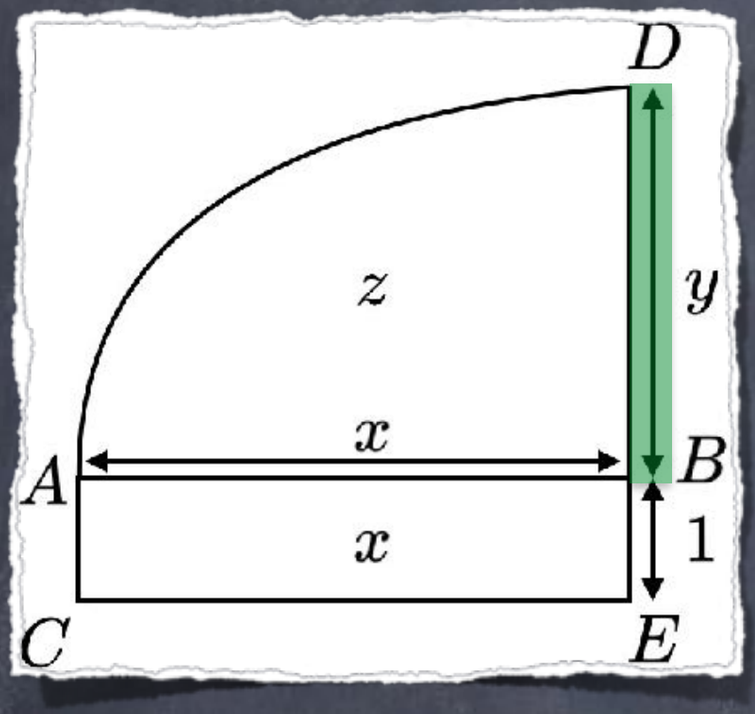
z ⟷ y

Leibniz



Une articulation local/global… chez Newton et Leibniz

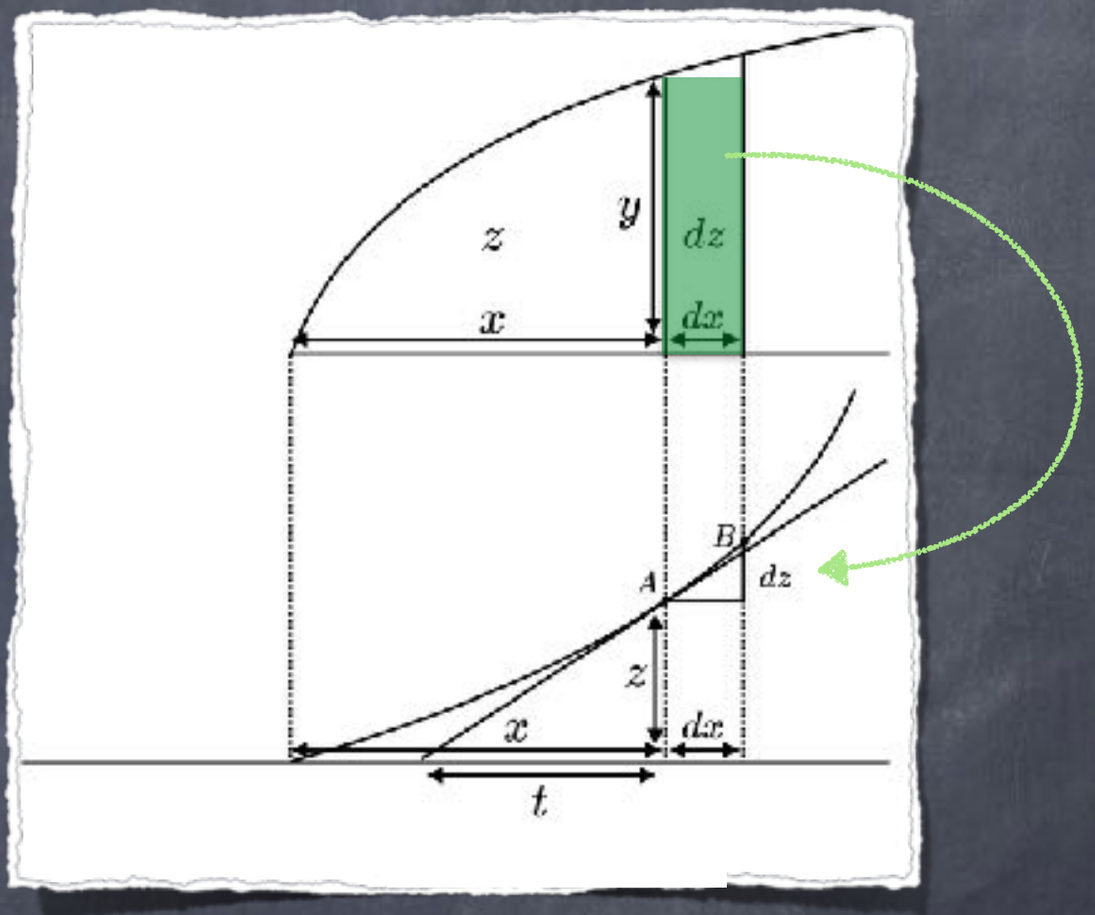
Newton



$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$$

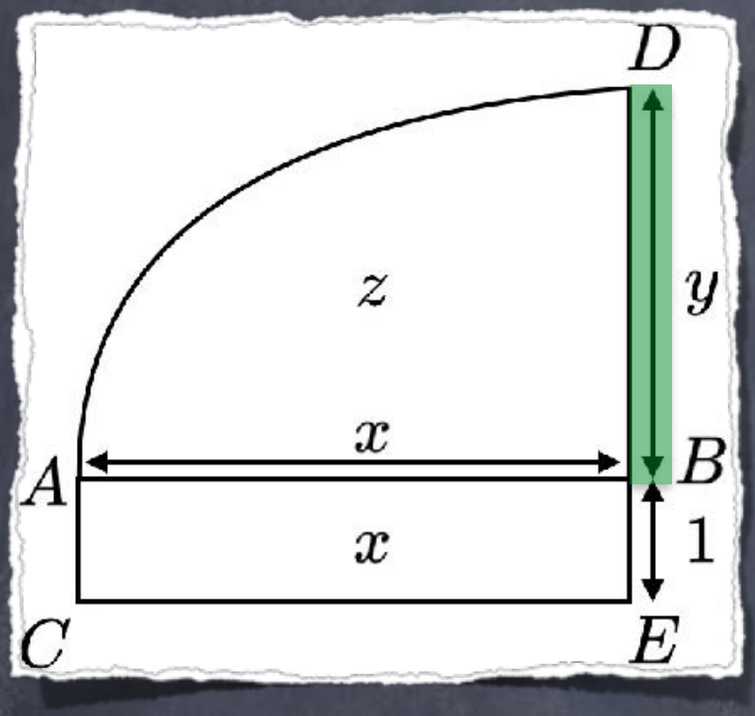
z ⟷ y

Leibniz



Une articulation local/global… chez Newton et Leibniz

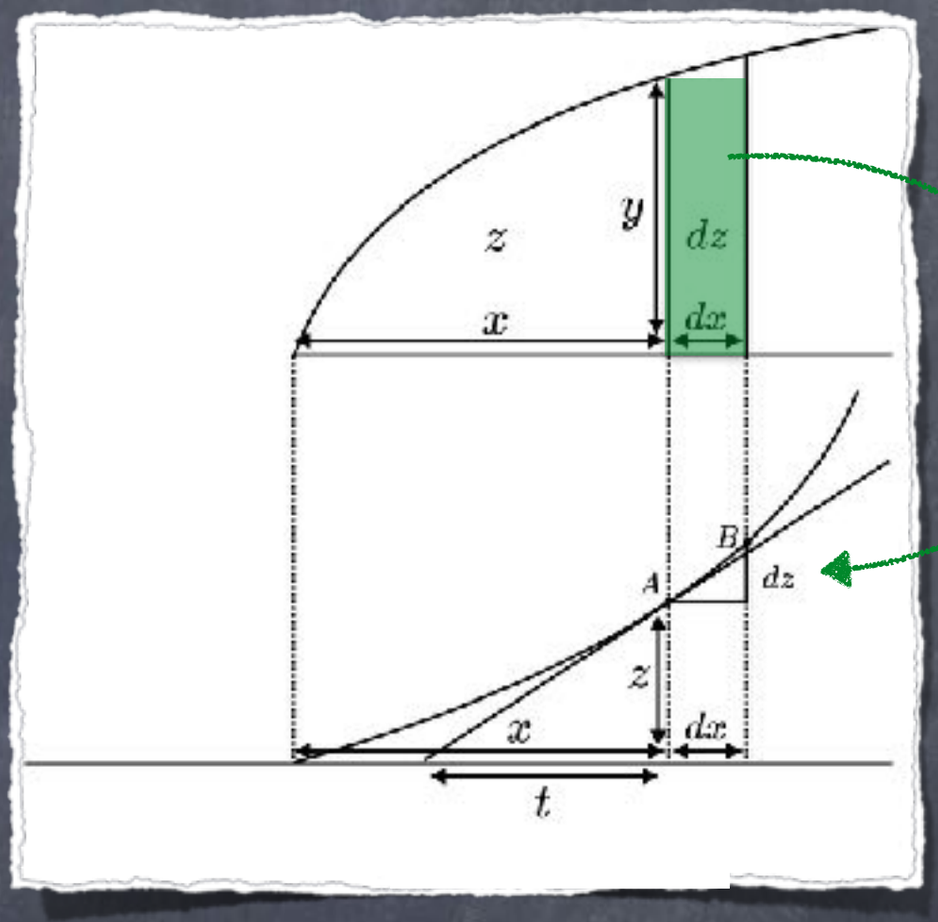
Newton



$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$$

$$z \quad \rightleftarrows \quad y$$

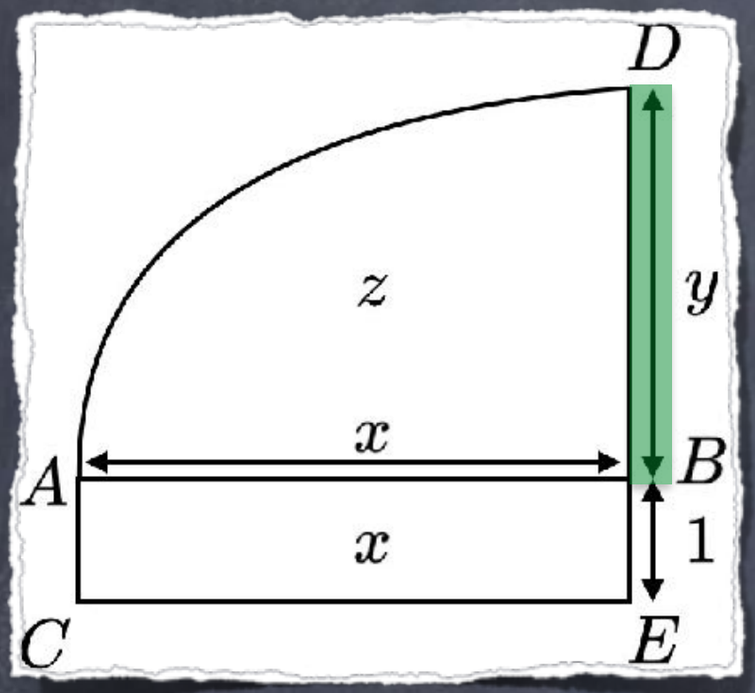
Leibniz



$$dz = y\,dx \quad \rightleftarrows \quad \frac{dz}{dx} = y$$

Une articulation local/global… chez Newton et Leibniz

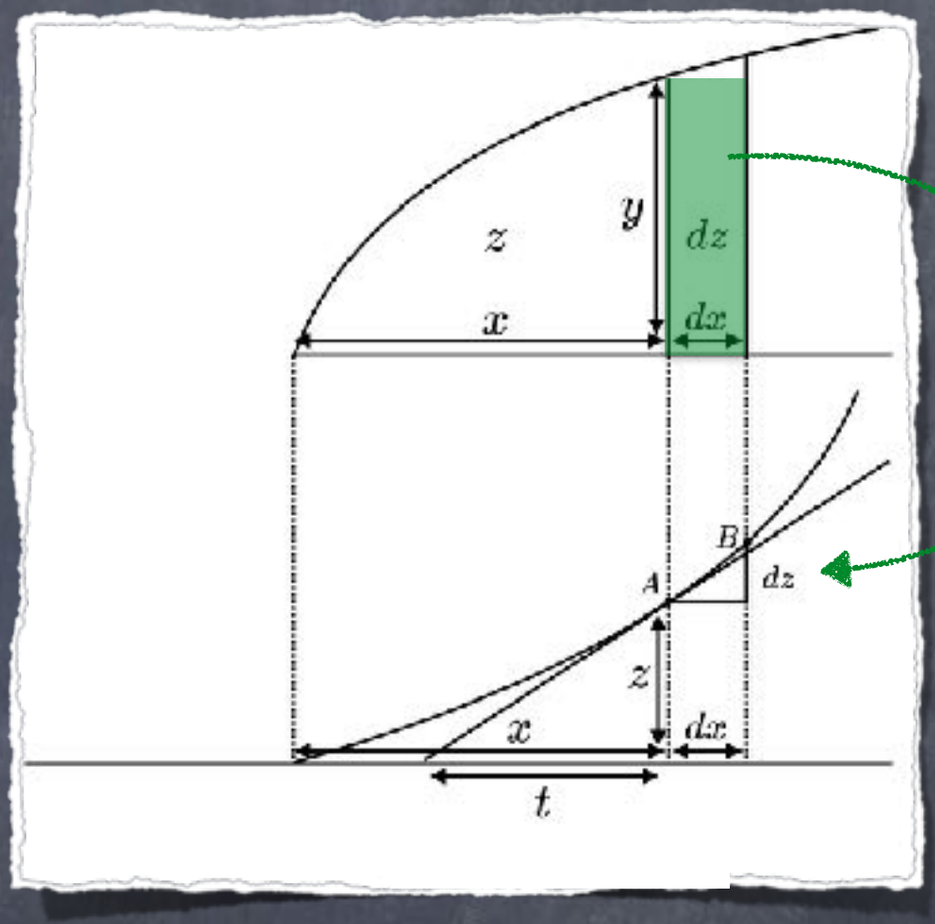
Newton



$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$$

$$z \quad \longleftrightarrow \quad y$$

Leibniz



$$dz = y\,dx \quad \longleftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = y$$

$$z = \int dz = \int y\,dx$$

Le théorème fondamental

- fédère des problèmes variés en une praxéologie globale
- fournit une technique de calcul d'aires, de volumes, …

Grandeurs aires, volumes, vitesses, …

Liens explicites

et modélisation assumée

Modèles des grandeurs dans une dialectique ostensifs/non ostensifs.

Mise en correspondance de deux covariations

Double regard fonctionnel

- qui articule le local et le global
- qui rassemble et standardise des grandeurs de différentes natures

Le théorème fondamental

- fédère des problèmes variés en une praxéologie globale
- fournit une technique de calcul d'aires, de volumes, ...

Grandeurs aires, volumes, vitesses, ...

Liens explicites

et modélisation assumée

Modèles des grandeurs dans une dialectique ostensifs/non ostensifs.

Mise en correspondance de deux covariations

Double regard fonctionnel

- qui articule le local et le global
- qui rassemble et standardise des grandeurs de différentes natures

3. Des obstacles d'apprentissages épistémologiques…

Théorème fondamental

Grandeurs — *Deux univers aux contours indistincts en raison de…* — *Modèles des grandeurs*

✦… *l'obstacle empiriste (Schneider)*

obstacle géométrique de la limite (Sierpinska, Cornu, Schneider)

obstacle de l'hétérogénéité des dimensions (Schneider)

réserve sur les modèles de grandeurs physiques qui relèvent de l'instantané.

L'obstacle géométrique de la limite (Sierpinska, Cornu, Schneider)

domaine des grandeurs		domaine des mesures
Découpages en rectangles	⟶	Suite de sommes d'aires de rectangles
	THEORIE	↓ limite
Surface curviligne	⟵	Nombre

L'obstacle géométrique de la limite (Sierpinska, Cornu, Schneider)

domaine des grandeurs		domaine des mesures
Découpages en rectangles	$\longrightarrow$	Suite de sommes d'aires de rectangles
	THEORIE	$\downarrow$ limite
Surface curviligne	$\longleftarrow$	Nombre

domaine des grandeurs		domaine des mesures
Découpages en rectangles	$\longleftrightarrow$	Suites de sommes d'aires de rectangles
"limite" $\downarrow$	ELEVES	
Surface curviligne composée de segments	$\longrightarrow$	Nombre

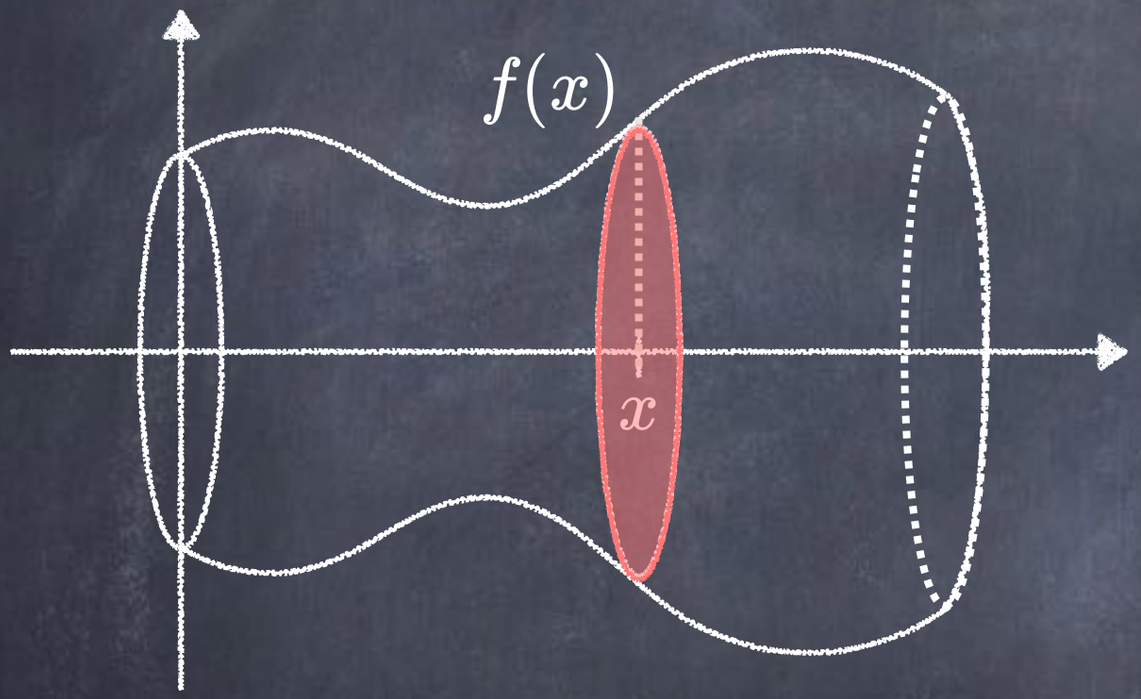
L'obstacle géométrique de la limite (Sierpinska, Cornu, Schneider)

domaine des grandeurs		domaine des mesures
Découpages en rectangles	$\longrightarrow$	Suite de sommes d'aires de rectangles
	THEORIE	$\downarrow$ limite
Surface curviligne	$\longleftarrow$	Nombre

domaine des grandeurs		domaine des mesures
Découpages en rectangles	$\longleftrightarrow$	Suites de sommes d'aires de rectangles
"limite" $\downarrow$	ELEVES	
Surface curviligne composée de segments	$\longrightarrow$	Nombre

« Lorsque les rectangles se réduisent à des segments, ils ont une aire nulle et on voit mal comment obtenir une aire non nulle en sommant des zéros »

L'obstacle de l'hétérogénéité des grandeurs (Schneider) :



Pour déterminer le volume d'un solide de révolution:

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 \, dx$$

Certains élèves proposent alors de calculer :

$$A = \int_a^b 2\pi f(x) \, dx$$

pour déterminer son aire latérale.

Théorème fondamental

Grandeurs ⟷ Deux univers aux contours indistincts en raison de… ⟷ Modèles des grandeurs

- … l'obstacle empiriste
  - obstacle géométrique de la limite
  - obstacle de l'hétérogénéité des dimensions
  - réserve sur les modèles de grandeurs physiques qui relèvent de l'instantané.
- … des obstacles au regard fonctionnel sur les aires et volumes dont :
  - des grandeurs et leur mode de détermination a priori étrangers à l'idée de variation.
  - une idée de variation faisant écran à celle de covariation, eu égard à la prégnance des « variables temporelles » (Krysinska et Schneider)
  - une conception réductrice des fonctions et de leurs graphiques et une difficulté à articuler leurs aspects local et global au-delà de la prégnance des grandeurs.

Théorème fondamental

Grandeurs — *Deux univers aux contours indistincts en raison de…* — *Modèles des grandeurs*

✦ *… l'obstacle empiriste*

obstacle géométrique de la limite

obstacle de l'hétérogénéité des dimensions

réserve sur les modèles de grandeurs physiques qui relèvent de l'instantané.

✦ *… des obstacles au regard fonctionnel sur les aires et volumes dont :*

- *des grandeurs et leur mode de détermination a priori étrangers à l'idée de variation.*
- *une idée de variation faisant écran à celle de covariation, eu égard à la prégnance des « variables temporelles » (Krysinska et Schneider)*
- *une conception réductrice des fonctions et de leurs graphiques et une difficulté à articuler leurs aspects local et global au-delà de la prégnance des grandeurs.*

Théorème fondamental

Grandeurs ⟷ Deux univers aux contours indistincts en raison de… ⟷ Modèles des grandeurs

✦… l'obstacle empiriste

obstacle géométrique de la limite

obstacle de l'hétérogénéité des dimensions

réserve sur les modèles de grandeurs physiques qui relèvent de l'instantané.

✦… des obstacles au regard fonctionnel sur les aires et volumes dont :

- des grandeurs et leur mode de détermination a priori étrangers à l'idée de variation.
- une idée de variation faisant écran à celle de covariation, eu égard à la prégnance des « variables temporelles » (Krysinska et Schneider)
- une conception réductrice des fonctions et de leurs graphiques et une difficulté à articuler leurs aspects local et global au-delà de la prégnance des grandeurs.

Théorème fondamental

Grandeurs ⟷ *Deux univers aux contours indistincts en raison de…* ⟷ *Modèles des grandeurs*

✦ *… l'obstacle empiriste*

obstacle géométrique de la limite

obstacle de l'hétérogénéité des dimensions

réserve sur les modèles de grandeurs physiques qui relèvent de l'instantané.

✦ *… des obstacles au regard fonctionnel sur les aires et volumes dont :*

- *des grandeurs et leur mode de détermination a priori étrangers à l'idée de variation.*
- *une idée de variation faisant écran à celle de covariation, eu égard à la prégnance des « variables temporelles » (Krysinska et Schneider)*
- *une conception réductrice des fonctions et de leurs graphiques et une difficulté à articuler leurs aspects local et global au-delà de la prégnance des grandeurs.*

Des expérimentations qui étayent nos hypothèses de recherche…

une première expérience « pour voir » à partir de questions sur l'espace parcouru par un mobile en mouvement rectiligne à partir de sa vitesse, questions dont nous testions les retombées sur le calcul d'une aire curviligne:

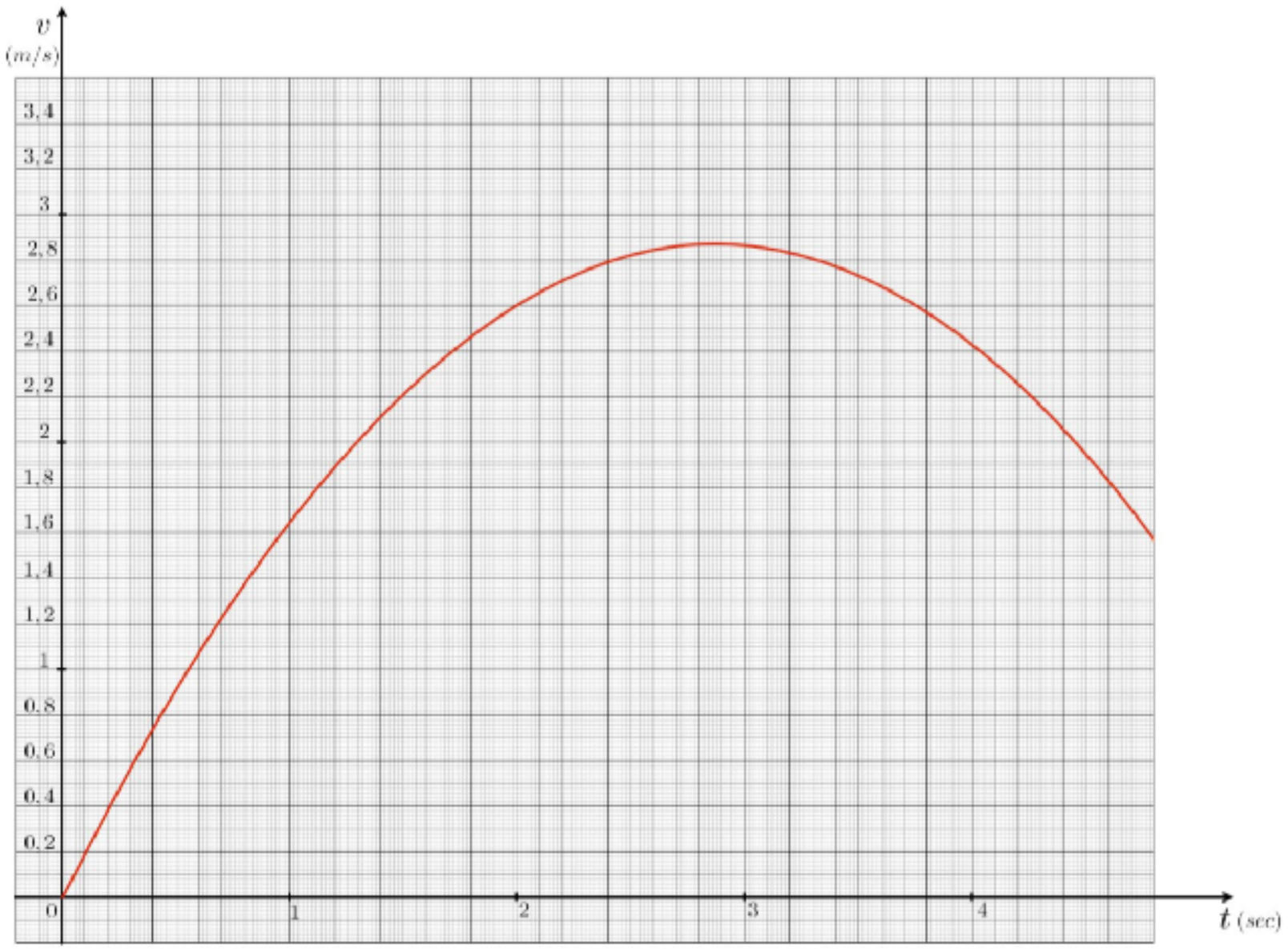
une deuxième expérience pour explorer les potentialités d'un dispositif « dynamique » d'illustration du théorème fondamental exploitant les NTICE

une ingénierie didactique inspirée de l'imagerie cinématique de Newton

Des expérimentations qui étayent nos hypothèses de recherche…

Une première expérience « pour voir » :

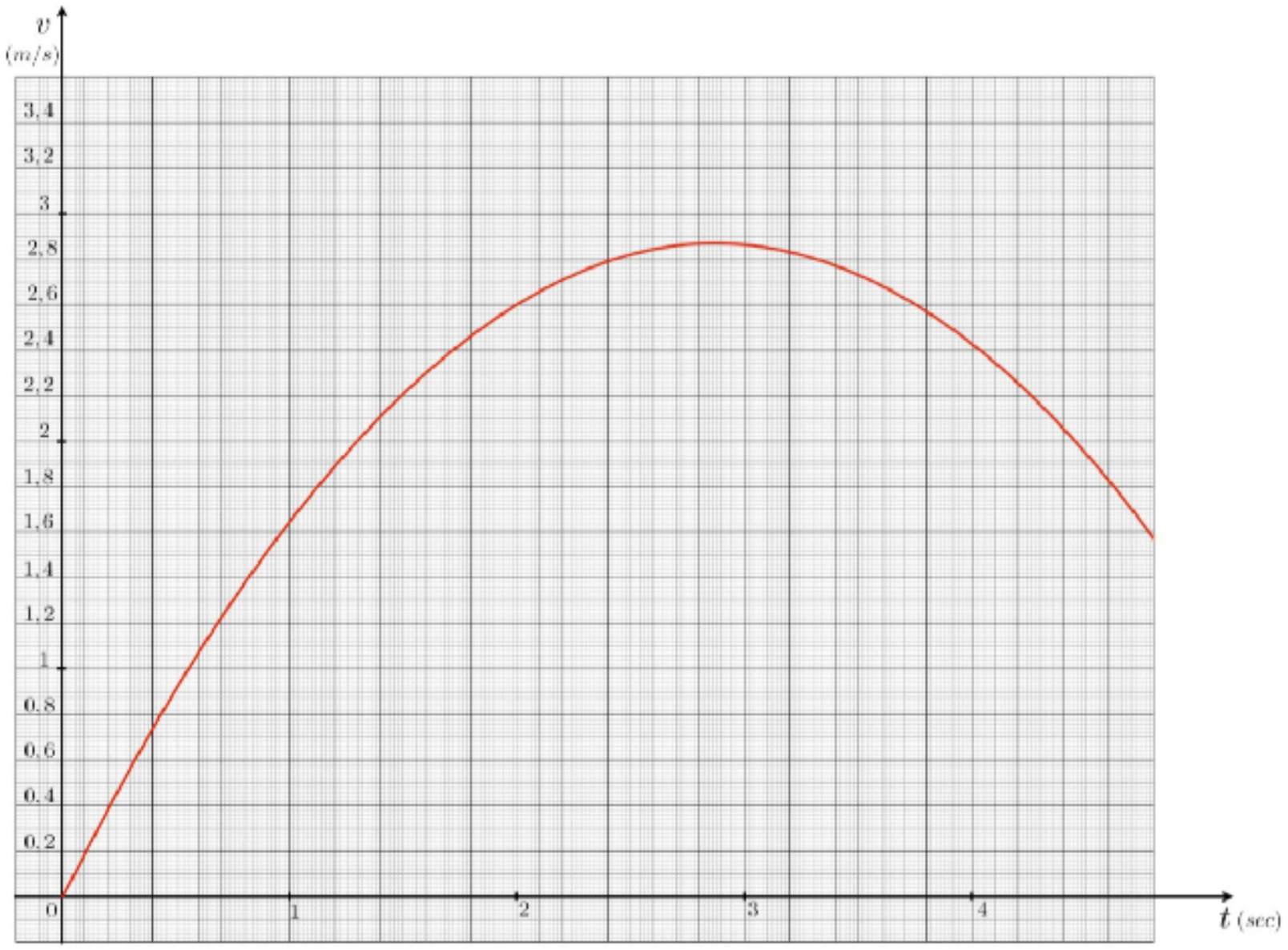
Le graphique ci-dessous exprime, à chaque instant, la vitesse d'un mobile qui se meut sur un axe horizontal. Quel est l'espace parcouru par ce mobile entre les instants $t = 0$ et $t = 4$?



Des expérimentations qui étayent nos hypothèses de recherche…

Une première expérience « pour voir » :

Le graphique ci-dessous exprime, à chaque instant, la vitesse d'un mobile qui se meut sur un axe horizontal. Quel est l'espace parcouru par ce mobile entre les instants $t = 0$ et $t = 4$?



$$v(t) = -\frac{t^2}{3} + 2t$$

$$e(0) = 9$$

$$e(t) = \ ?$$

Une première expérience « pour voir » :

$$1,1.0,3+\frac{2}{10}.(1,1+1,65)+(1,65+2,1)\frac{2}{10}+(2,1+2,5).\frac{2}{10}+(2,7+2,5).\frac{2}{10}+(2,7+2,85).\frac{2}{10}$$

$$+2,85.2.\frac{1}{10}+2,85.2.\frac{1}{10}+(2,85+2,8).\frac{2}{10}+(2,8+2,7).\frac{1}{10}+(2,7+2,4).\frac{2}{10}=9,41\ m$$

Une première expérience « pour voir » :

axe se symétrie: $x = 2,9$

sommet: (2,9; 2,85)

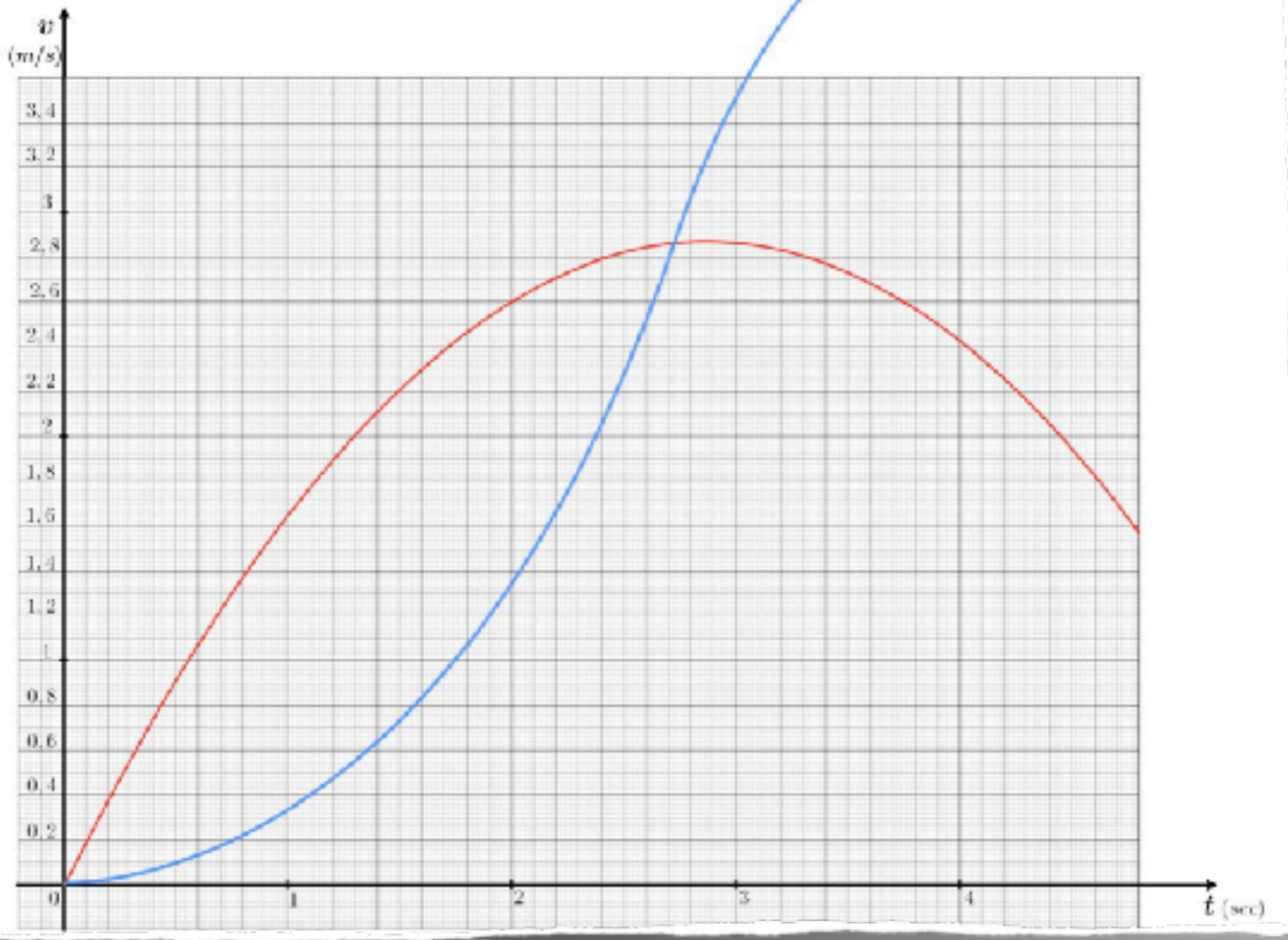
points: (0,0) ; (2; 2,6) ; (4; 2, 45)

"Vu que le graphique [*de* $v(t)$] est une dérivée première, on peut trouver le signe de $x(t)$"

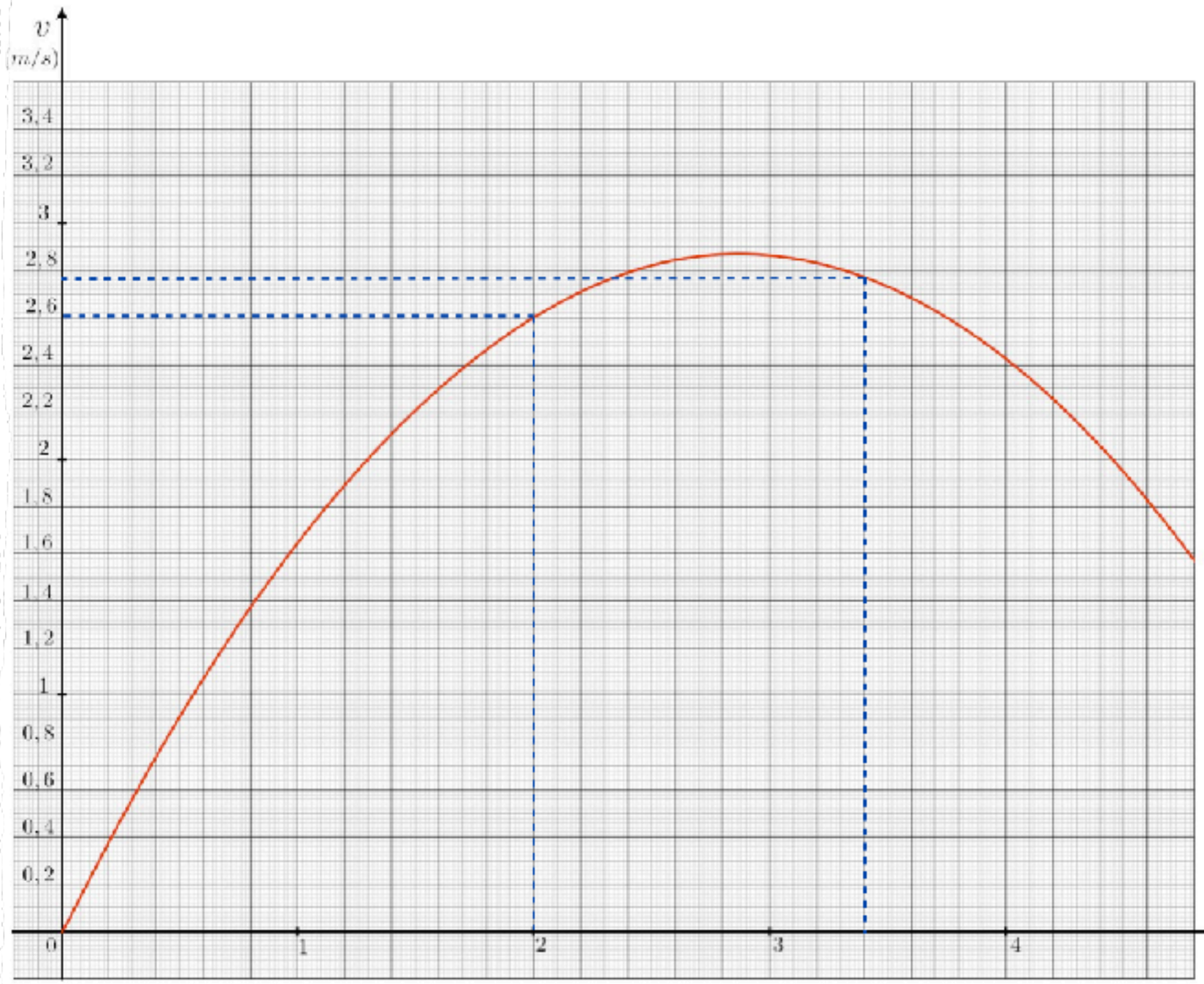
t			**2,9**		
$v(t)$		↗	MAX	↘	
$x(t)$		+	0	-	
	0				4
$v(t)$			+		
$x(t)$			↗		

On sait maintenant que $x(t)$ est décroissante.

Le graphique est une fonction du second degré donc $x(t)$ doit être une fonction du 3e degré vu que sa dérivée donne une fonction du 2e degré.



Une première expérience « pour voir » :



$$v(t) = at^2 + bt + c$$

$$v(t) = at^2 + bt$$

$$\begin{cases} 2,6 = a.4 + b.2 \\ 2,76 = a.11,56 + b.3,4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -0,3487 \\ b = 1,9974 \end{cases}$$

$$v(t) = -0,35t^2 + 1,99t$$

$$x(t) = -0,12t^3 + 0,99t^2$$

$$x(4) = 8,16\ m$$

Une première expérience « pour voir » :

MRU: $x_2 = x_1 + v_1.\Delta t$

MRUA: $x_2 = x_1 + v_1.\Delta t + \frac{1}{2}a.(\Delta t)^2$ $\qquad v_2 = v_1 + a\Delta t$

MRNUA: $x_2 ? = ? x_1 + v_1.\Delta t + \frac{1}{2}.a.(\Delta t)^2 + \frac{1}{3}\Delta a.(\Delta t)^3$ $\qquad v_2 = v_1 + a\Delta t + \frac{1}{2}\Delta a(\Delta t)^2$

$$x_2 = x_1 + v_1.\Delta t + \frac{1}{2}.a.(\Delta t)^2 + \frac{1}{6}\Delta a.(\Delta t)^3$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2}t^2 + \frac{J}{6}t^3$$

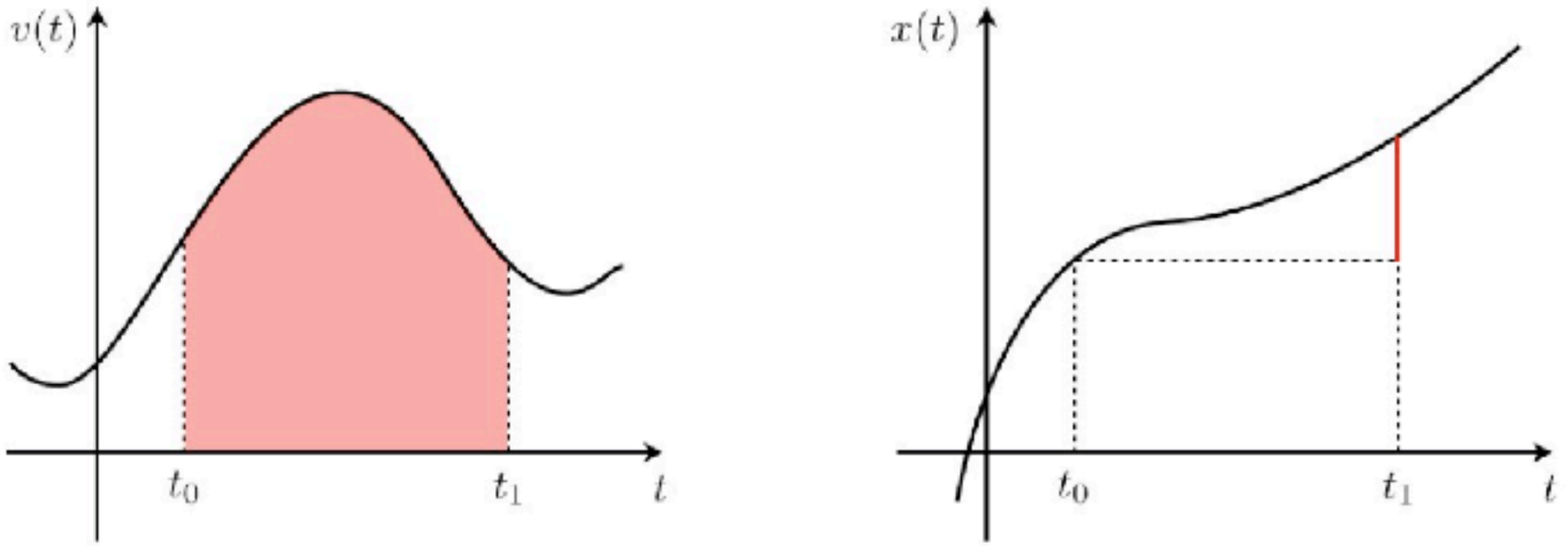
$$v(t) = v_0 + a_0 t + \frac{J}{2}t^2$$

$(2,9; 2,78)$

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2,9 \\ -\frac{b^2}{4a} = 2,78 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1,92}{2}t^2 - \frac{0,66}{6}t^3$$

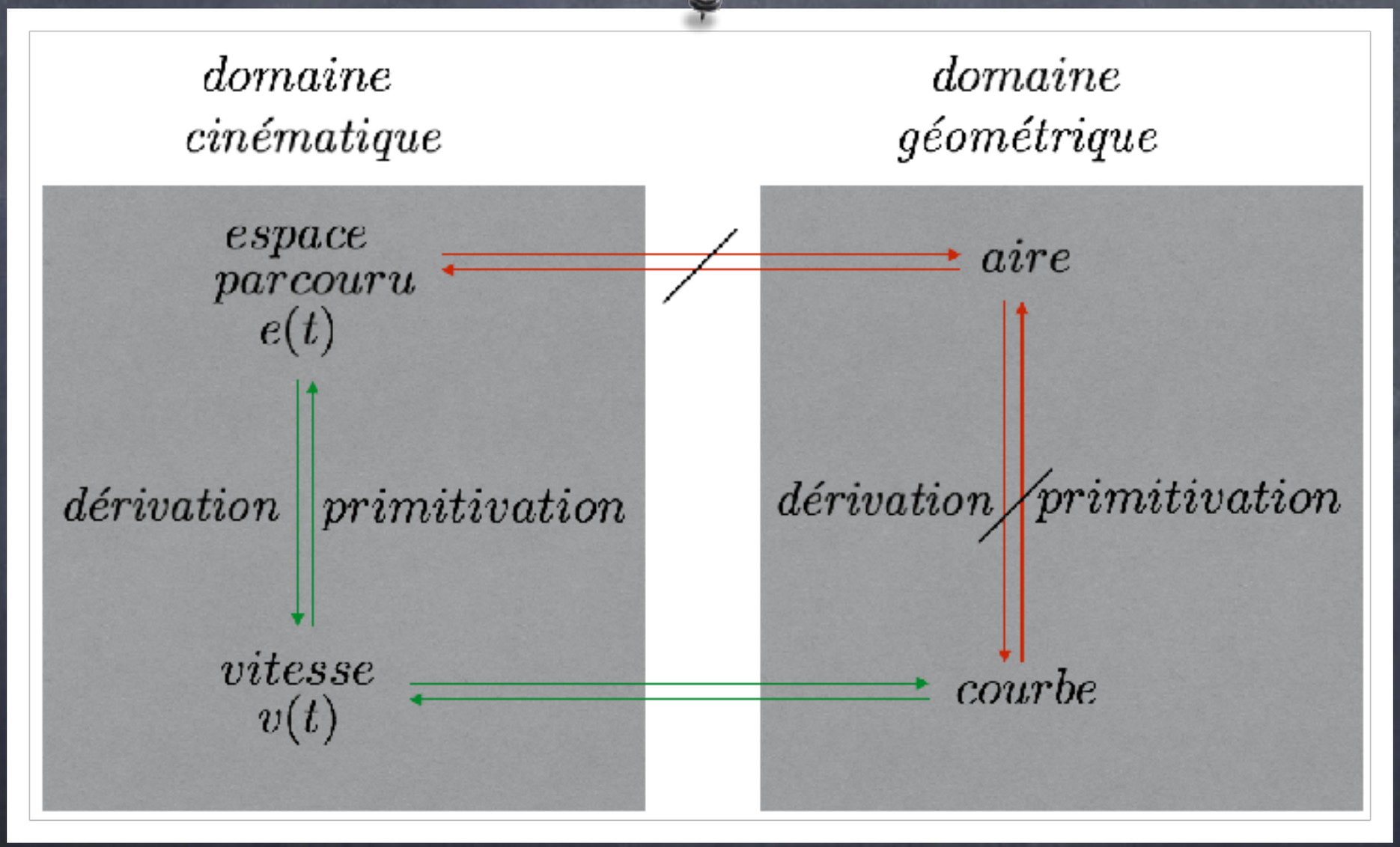
Une première expérience « pour voir » :



“ On sait que l’aire délimitée par le graphique de $v(t)$ est égale à la distance parcourue durant cette même durée. Or la vitesse est la dérivée de la position. On suppose donc que cela fonctionne également pour toute fonction et sa dérivée. Donc on cherche $g(x)$ tel que $g'(x) = f(x)$, aire délimitée par $g(x) = \mid f(b) - f(a) \mid$. ”

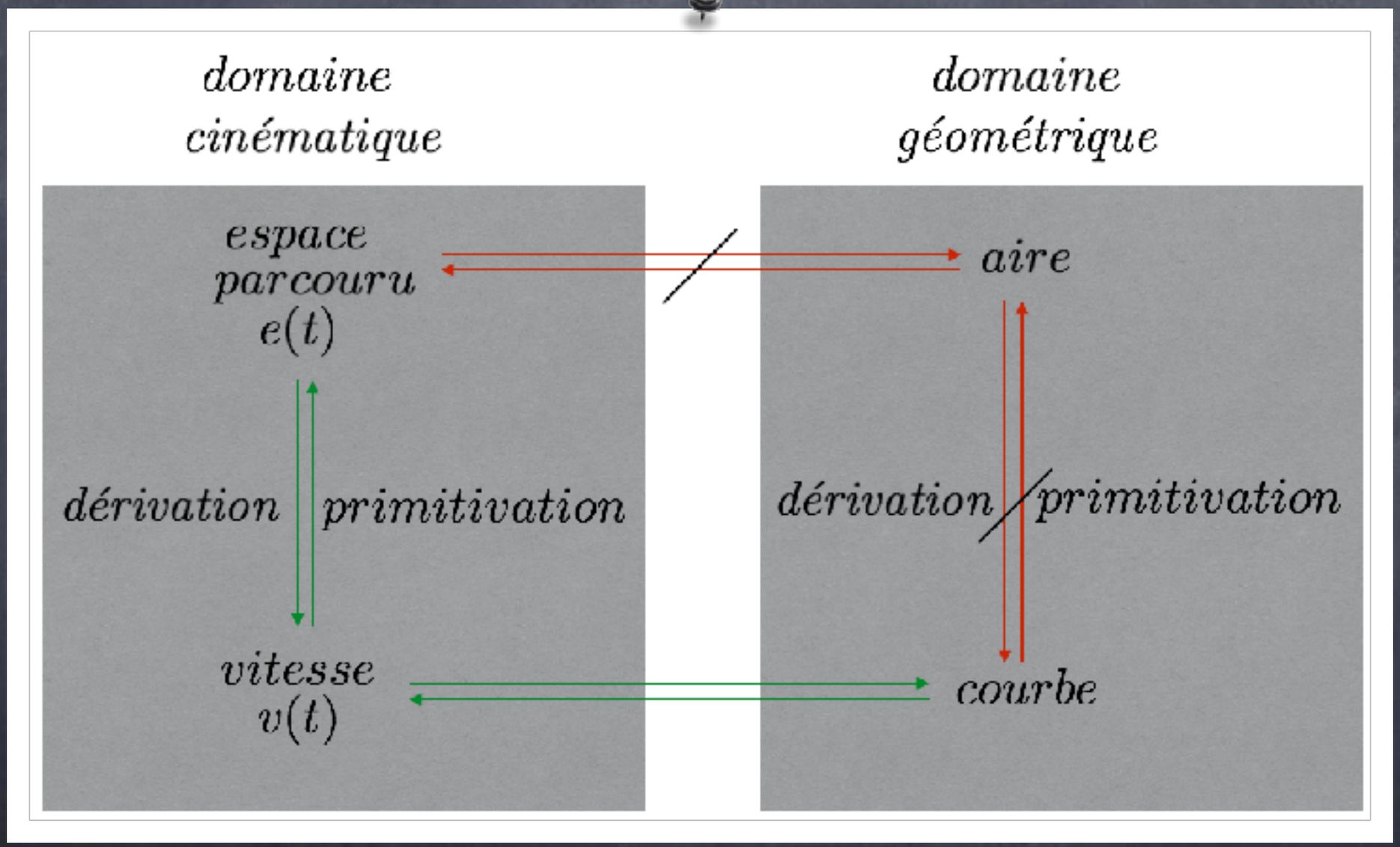
Des expérimentations qui étayent nos hypothèses de recherche…

Une première expérience « pour voir » :



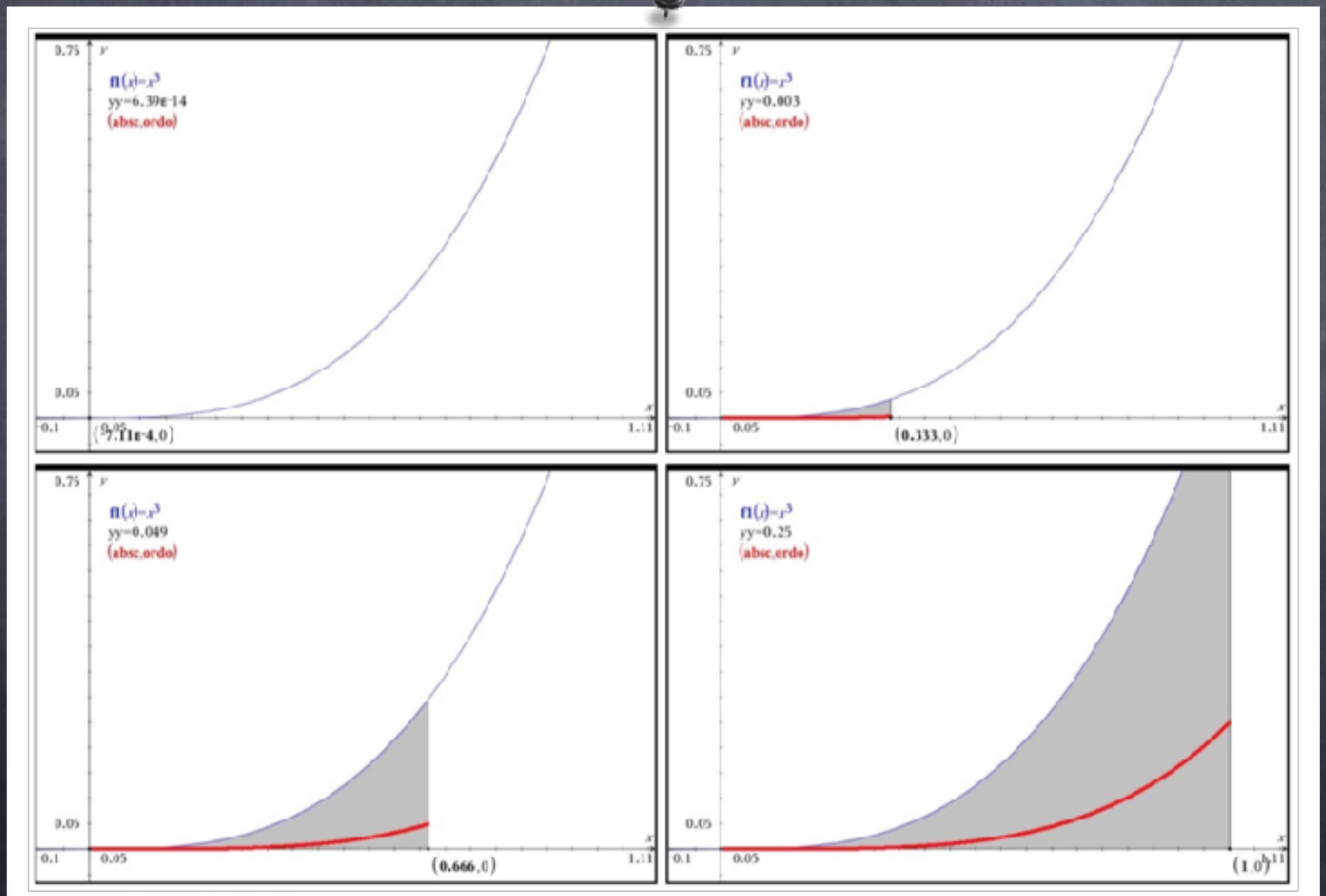
Des expérimentations qui étayent nos hypothèses de recherche…

Une première expérience « pour voir » :



Des expérimentations qui étayent nos hypothèses de recherche…

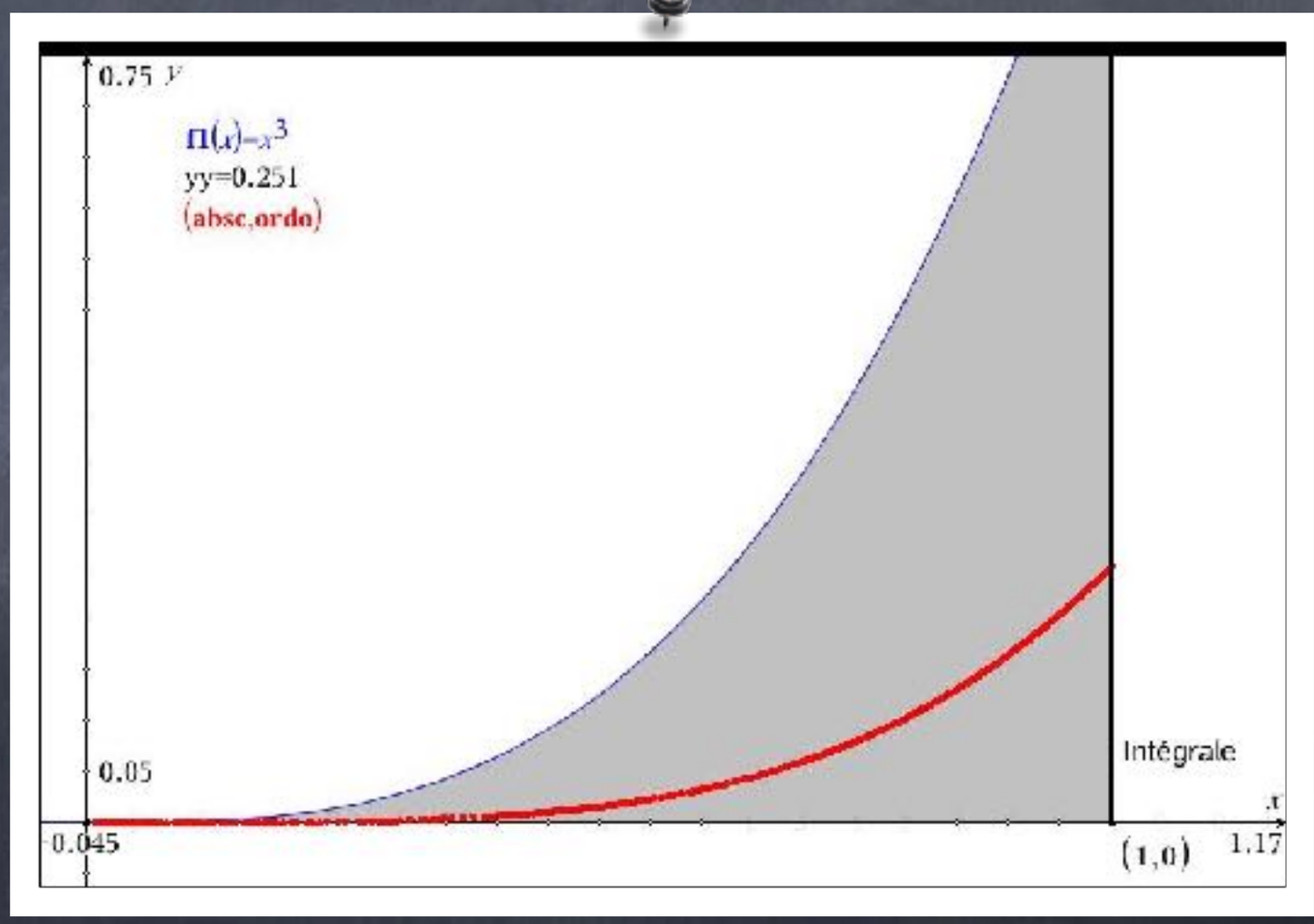
Une deuxième expérience pour explorer les potentialités d'un dispositif « dynamique » d'illustration du théorème fondamental exploitant les NTICE :



Des expérimentations qui étayent nos hypothèses de recherche…

Une deuxième expérience pour explorer les potentialités d'un dispositif « dynamique » d'illustration du théorème fondamental exploitant les NTICE :

« Pour une même valeur de l'abscisse, l'ordonnée de la courbe rouge est 4 fois plus petite que l'ordonnée de la courbe bleue. »

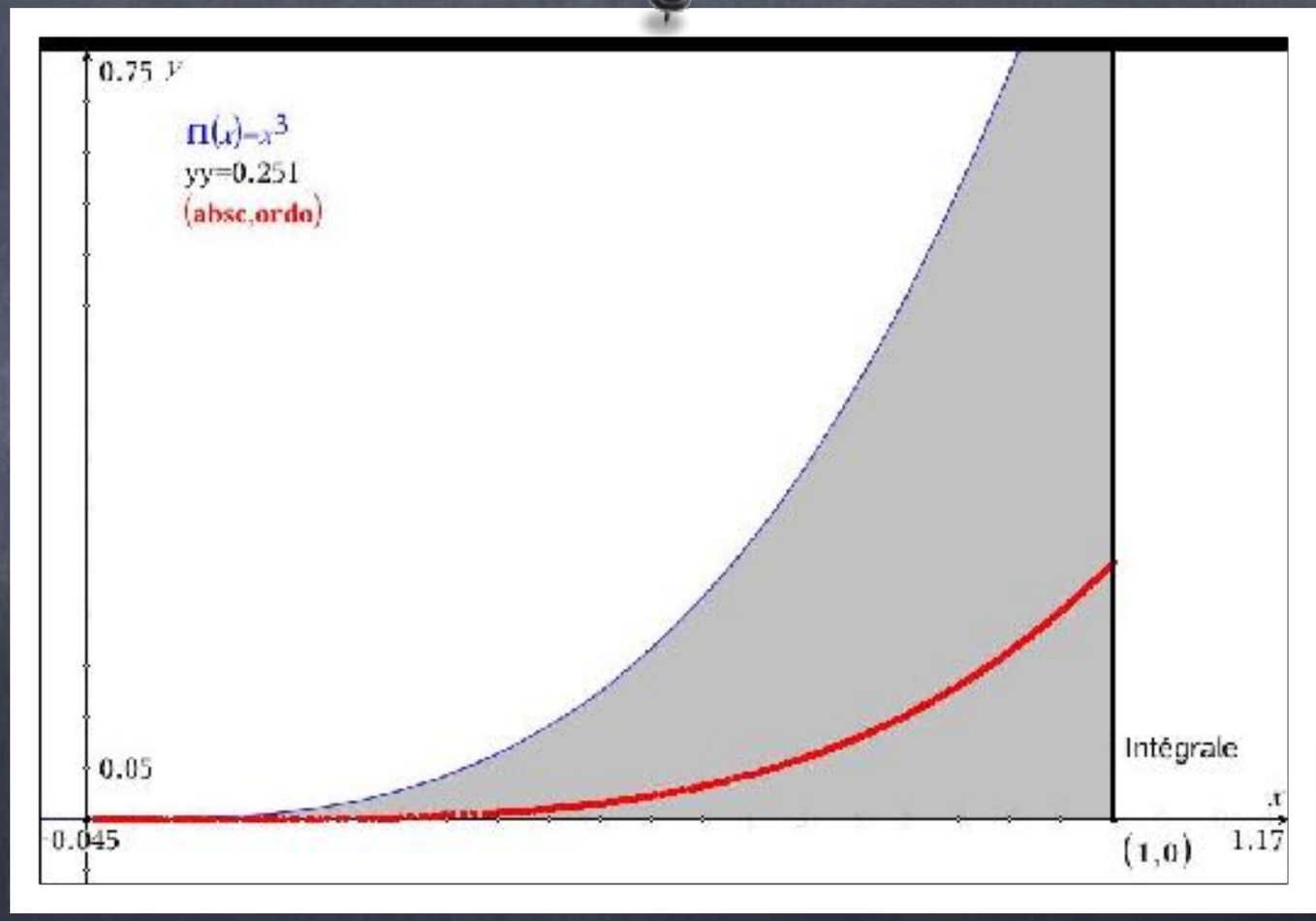


Des expérimentations qui étayent nos hypothèses de recherche…

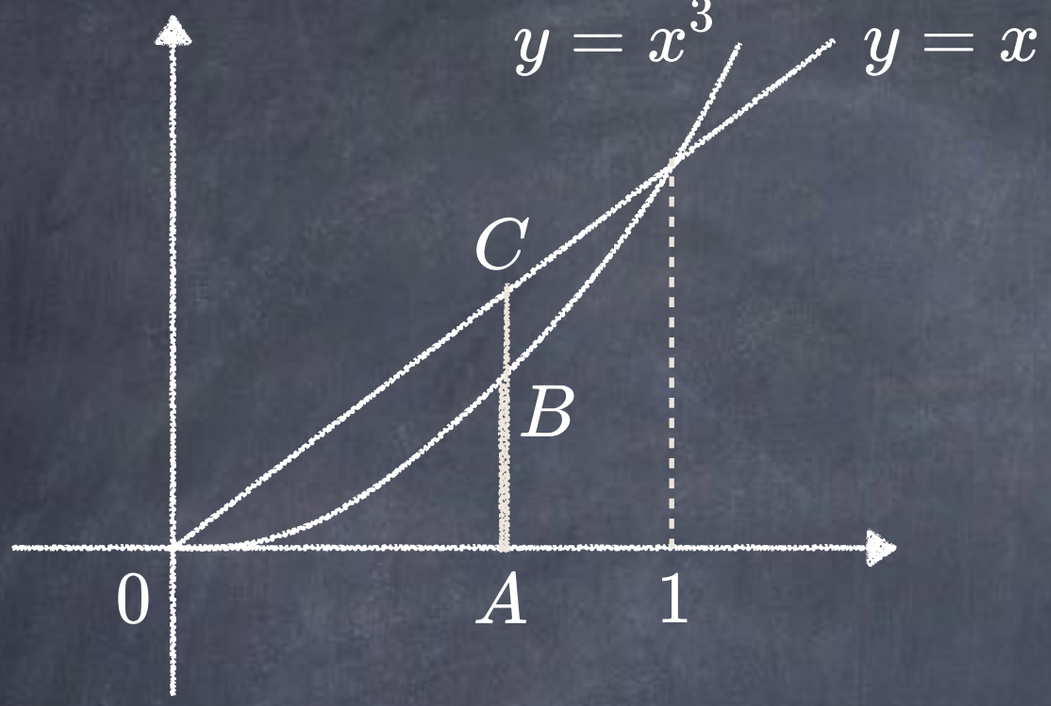
Une deuxième expérience pour explorer les potentialités d'un dispositif « dynamique » d'illustration du théorème fondamental exploitant les NTICE :

« Pour une même valeur de l'abscisse, l'ordonnée de la courbe rouge est 4 fois plus petite que l'ordonnée de la courbe bleue. »

« L'aire du triangle curviligne sous la courbe rouge vaut elle aussi 1/4 de l'aire du triangle curviligne sous la courbe bleue. »



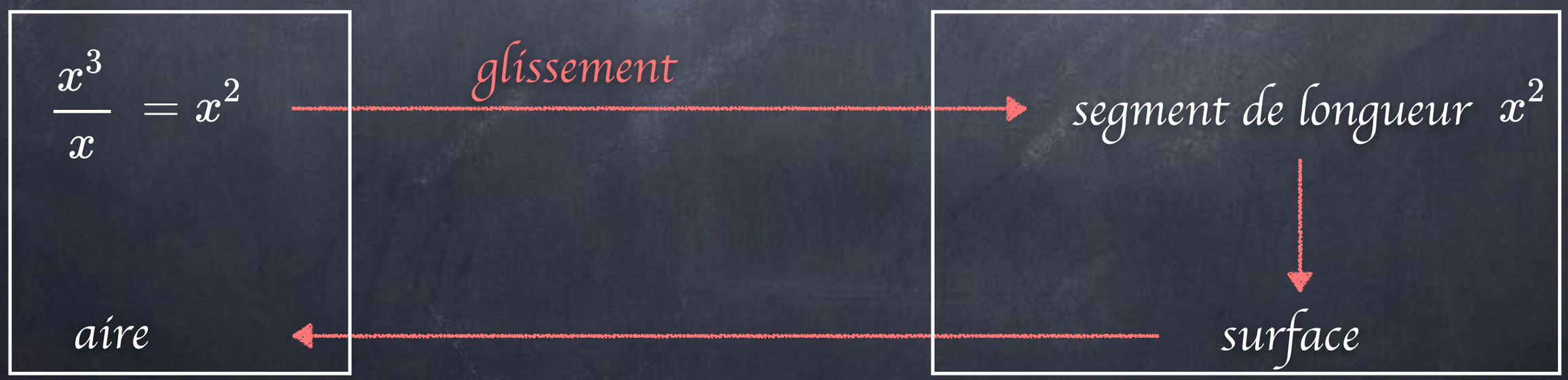
Une extension indue des principes de Cavalieri, déjà observée :



$$\frac{AB}{AC} = \frac{x^3}{x} = x^2$$

$$\frac{\textit{aire sous } \ y = x^3}{\textit{aire sous } \ y = x} = \textit{aire sous } \ y = x^2$$

$$\int_0^1 x^3 \, dx = \int_0^1 x \, dx . \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{2} . \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$



4. … En résonance avec des obstacles didactiques.

Des obstacles épistémologiques en résonance avec des obstacles didactiques…

Des obstacles épistémologiques en résonance avec des obstacles didactiques…

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \int f(x)\,dx$$

Propos de futurs enseignants :

$\int_a^b f(x)\,dx$ *signifie que l'on fait une somme infinie de rectangles de hauteur et de largeur infiniment petite*

[…] le dx *est une quantité infinitésimale représentant la base des rectangles.*

dx *est la notation infinitésimale de* Δx

$dx \approx \Delta x \to 0$

$dx = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x$

Des obstacles épistémologiques en résonance avec des obstacles didactiques…

Dans les manuels :

dx désigne Δx infiniment petit : $dx = \lim\limits_{x_i \to x_{i+1}} \Delta x$ où x_i et x_{i+1} sont les sont les bornes d'un sous-intervalle de la subdivision de l'intervalle $[a, b]$.

(Actimath6 2009, p. 134)

Des obstacles épistémologiques en résonance avec des obstacles didactiques…

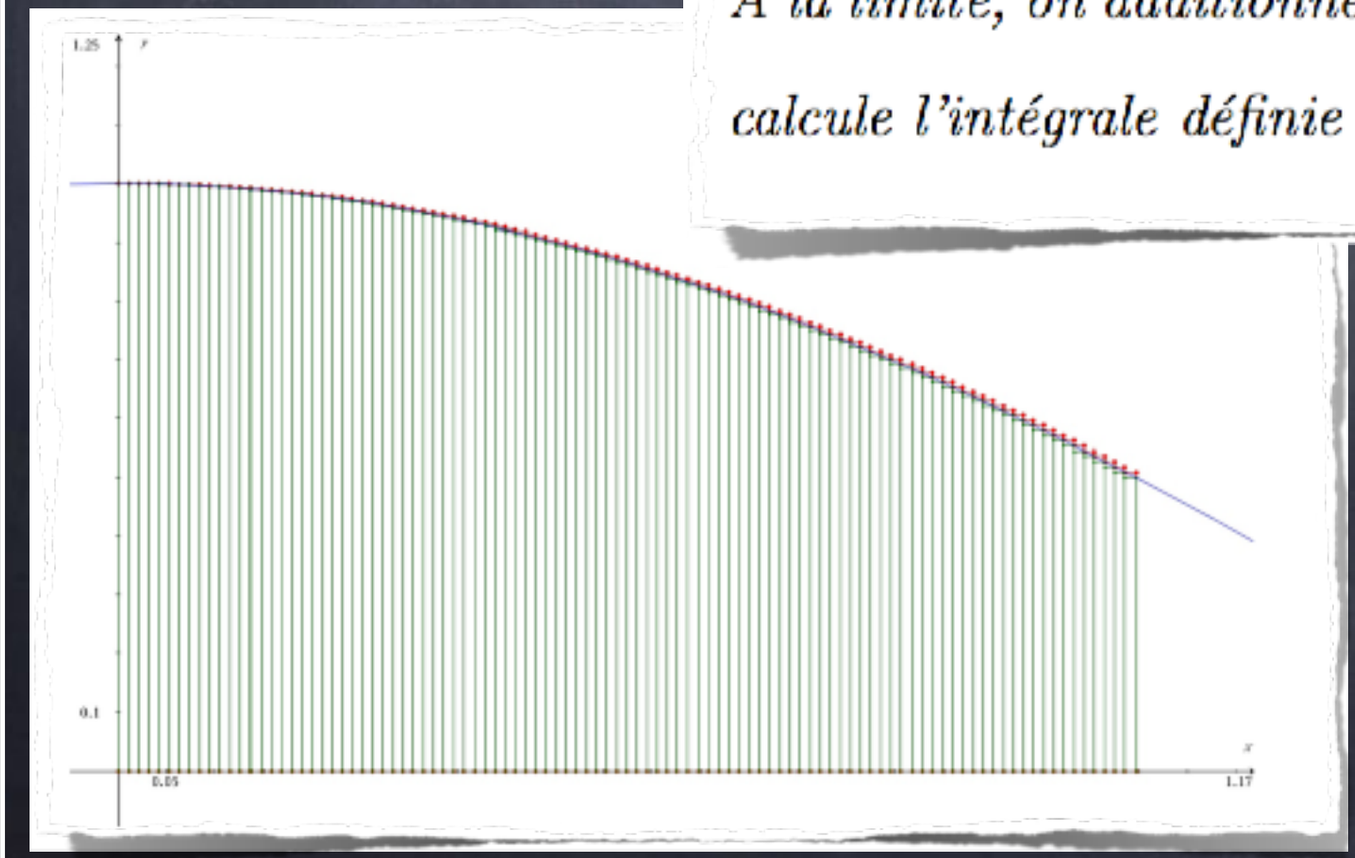
Dans les manuels :

dx *désigne* Δx *infiniment petit :* $dx = \lim\limits_{x_i \to x_{i+1}} \Delta x$ *où* x_i *et* x_{i+1} *sont les sont les bornes d'un sous-intervalle de la subdivision de l'intervalle* $[a, b]$.

(Actimath6 2009, p. 134)

Propos de l'inspection :

A la limite, on additionne une infinité de bâtonnets d'aire nulle, on calcule l'intégrale définie de 0 à $\pi/3$ *de* $\cos x\ dx$ $\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\ dx\right)$



Dans les programmes :

Intégrale

COMPÉTENCES À DÉVELOPPER

CONCEVOIR L'INTÉGRALE COMME UNE SOMME INFINIE D'ÉLÉMENTS DE MESURE NULLE.

RÉSOUDRE DES PROBLÈMES À L'AIDE DU CALCUL INTÉGRAL.

6SUAA3 - Intégrale

Compétences à développer

CONCEVOIR L'INTÉGRALE COMME UNE SOMME INFINIE D'ÉLÉMENTS DE MESURE NULLE

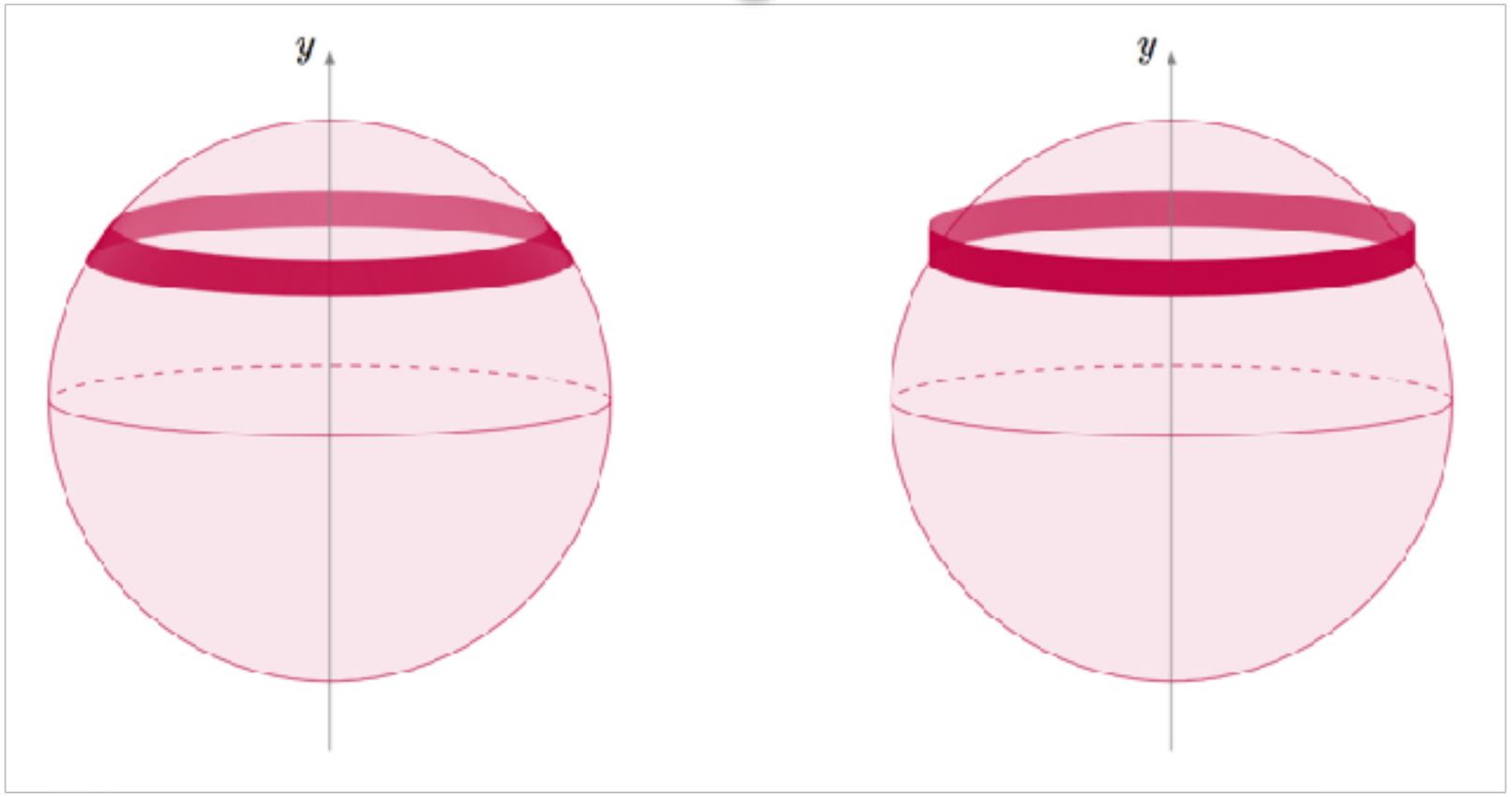
RÉSOUDRE UN PROBLÈME À L'AIDE DU CALCUL INTÉGRAL

Des obstacles épistémologiques en résonance avec des obstacles didactiques…

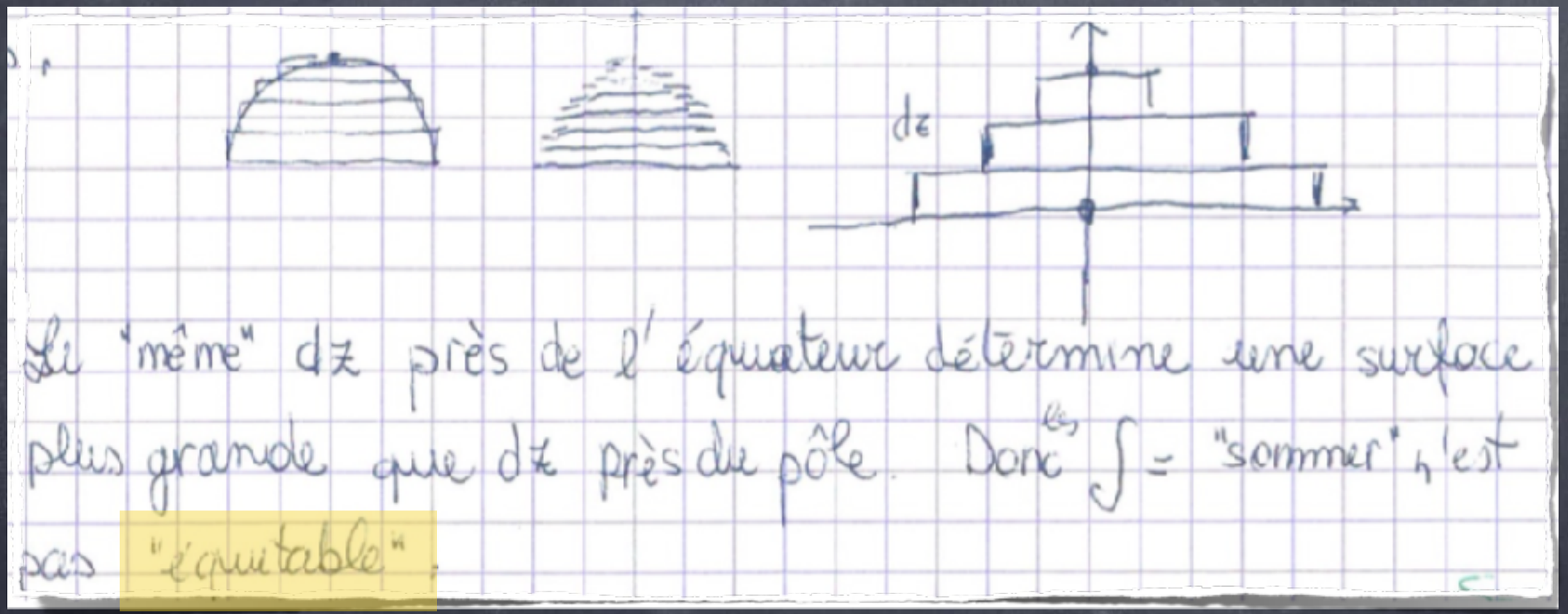
Des linéarisations trop hâtives…

$$\int_{-R}^{R} \pi[r(y)]^2 \, dy = \frac{4\pi R^3}{3} \qquad dV = \pi[r(y)]^2 dy$$

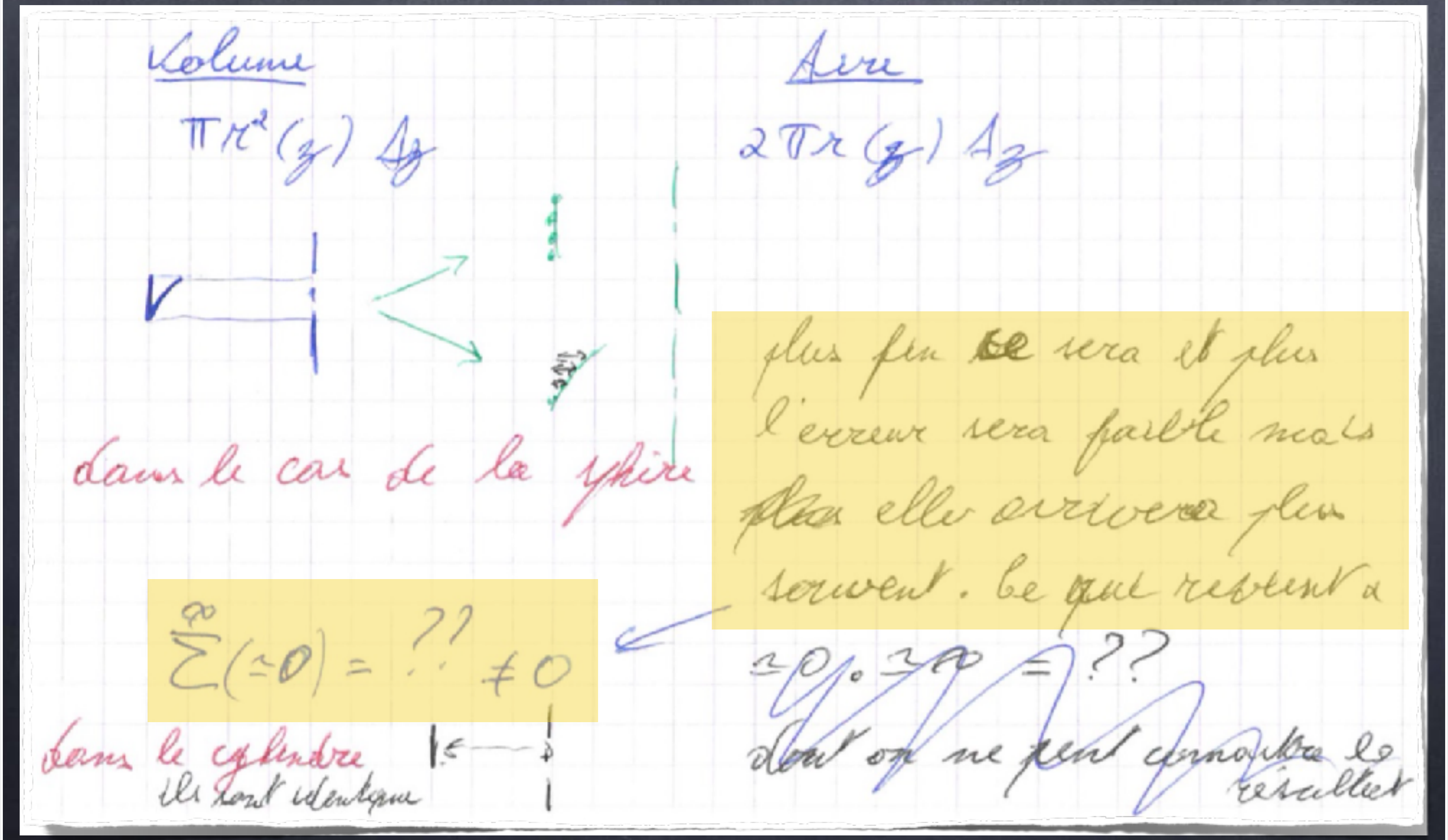
$$\int_{-R}^{R} 2\pi r(y) \, dy = \pi^2 \cdot R^2 \qquad dS = 2\pi r(y) \, dy$$



Des obstacles épistémologiques en résonance avec des obstacles didactiques…



Des obstacles épistémologiques en résonance avec des obstacles didactiques…



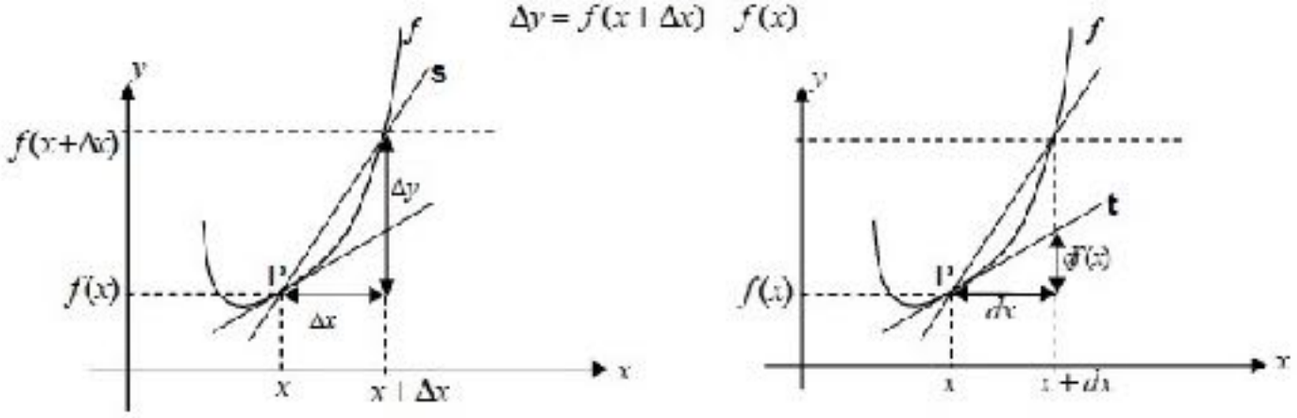
Chapitre 3. Les primitives

A. Notion de différentielle

1. Définition

Considérons une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ et son graphique.
A un accroissement arbitrairement choisi Δx, correspond un accroissement Δy

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$



$\Delta y \simeq df(x)$ pour Δx suffisamment petit $(\Delta x \to 0)$

La droite t tangente au graphique de la fonction f au point P a pour coefficient de direction

$$m_t = \frac{df(x)}{dx}$$

La droite s sécante au graphique de la fonction f a pour coefficient de direction :

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Par définition, on a

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Prenons un même accroissement de x : $\Delta x = dx$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{dx \to 0} \frac{\Delta y}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$

Donc

$$\boxed{f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad \text{d'où} \quad df(x) = f'(x).dx}$$

où $df(x)$ est appelée la **différentielle** de la fonction f

Une absence de regard fonctionnel...

$$dx = \Delta x$$

$$df : U \subset \mathbb{R} \to \mathscr{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$x \quad \mapsto \quad df_x \quad : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$h \mapsto df_x(h) = f'(x)h$$

$$\boxed{dx = \Delta x}$$

- *La notation Δx désigne un réel fixé, il n'y a pas la notion de limite derrière. Alors que derrière dx se cache une limite : dx n'étant pas un nombre à proprement parler.*

- *Pour passer d'un accroissement fini Δx à une différentielle dx, il faut faire tendre le Δx vers 0. Il y a une notion de limite pour permettre le passage de Δx à dx.*

- *dx comprend une définition de limite : $\Delta x \to 0$. Donc l'écriture,*

$$\lim_{dx \to 0} \frac{\Delta y}{dx} \quad \textit{est redondante !}$$

$$dx = \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Je n'oserais pas... Je n'oserais pas... Je n'oserais pas écrire deux fois limite. Mais c'est l'idée qui est derrière.

Ben pour moi, le dx n'est utilisé que dans un contexte qui sont les primitives ou bien les dérivées où il est infiniment petit, j'ai jamais croisé un dx qui n'était pas infiniment petit.

Je n'ai jamais croisé une notation où on utilisait dx, et où, ce qu'on écrivait était vrai pour un dx qui vaudrait 3 par exemple.

Dans les manuels scolaires…

- *Le théorème fondamental est démontré -quand il l'est- sur base de théorèmes qui, eux ne le sont pas et les commentaires liés à ce théorème n'en donne pas de réelle intelligibilité, tout au plus ils constituent des constats sur des cas particuliers.*

Dans les manuels scolaires…

- *Le théorème fondamental est démontré -quand il l'est- sur base de théorèmes qui, eux ne le sont pas et les commentaires liés à ce théorème n'en donne pas de réelle intelligibilité, tout au plus ils constituent des constats sur des cas particuliers.*
- *Le focus global mis sur l'étude des variations de fonctions particulières ne permet pas de mettre en évidence les problèmes majeurs à l'origine du calcul infinitésimal.*
- *Le peu de place laissé à la modélisation fonctionnelle (hormis dans les exercices) ne fait pas des fonctions des modèles standardisés de covariations de grandeurs.*

Dans les manuels scolaires…

- *Le théorème fondamental est démontré -quand il l'est- sur base de théorèmes qui, eux ne le sont pas et les commentaires liés à ce théorème n'en donne pas de réelle intelligibilité, tout au plus ils constituent des constats sur des cas particuliers.*
- *Le focus global mis sur l'étude des variations de fonctions particulières ne permet pas de mettre en évidence les problèmes majeurs à l'origine du calcul infinitésimal.*
- *Le peu de place laissé à la modélisation fonctionnelle (hormis dans les exercices) ne fait pas des fonctions des modèles standardisés de covariations de grandeurs.*
- *Les approches des dérivées sont polarisées sur la tangente et assez peu sur d'autres applications, comme les vitesses liées par exemple, ce qui ne fait pas apparaître les dérivées comme modèles standardisant des contextes variés.*

Dans les manuels scolaires…

- Le théorème fondamental est démontré -quand il l'est- sur base de théorèmes qui, eux ne le sont pas et les commentaires liés à ce théorème n'en donne pas de réelle intelligibilité, tout au plus ils constituent des constats sur des cas particuliers.
- Le focus global mis sur l'étude des variations de fonctions particulières ne permet pas de mettre en évidence les problèmes majeurs à l'origine du calcul infinitésimal.
- Le peu de place laissé à la modélisation fonctionnelle (hormis dans les exercices) ne fait pas des fonctions des modèles standardisés de covariations de grandeurs.
- Les approches des dérivées sont polarisées sur la tangente et assez peu sur d'autres applications, comme les vitesses liées par exemple, ce qui ne fait pas apparaître les dérivées comme modèles standardisant des contextes variés.
- Il en va de même pour les approches des intégrales où les « aires sous une courbe » ne sont pas présentées comme standardisant toutes les applications des intégrales définies.

Dans les manuels scolaires…

- Le théorème fondamental est démontré -quand il l'est- sur base de théorèmes qui, eux ne le sont pas et les commentaires liés à ce théorème n'en donne pas de réelle intelligibilité, tout au plus ils constituent des constats sur des cas particuliers.
- Le focus global mis sur l'étude des variations de fonctions particulières ne permet pas de mettre en évidence les problèmes majeurs à l'origine du calcul infinitésimal.
- Le peu de place laissé à la modélisation fonctionnelle (hormis dans les exercices) ne fait pas des fonctions des modèles standardisés de covariations de grandeurs.
- Les approches des dérivées sont polarisées sur la tangente et assez peu sur d'autres applications, comme les vitesses liées par exemple, ce qui ne fait pas apparaître les dérivées comme modèles standardisant des contextes variés.
- Il en va de même pour les approches des intégrales où les « aires sous une courbe » ne sont pas présentées comme standardisant toutes les applications des intégrales définies.
- Les exercices privilégient l'aspect global au détriment du local et a fortiori ne supposent leur articulation.

5. Notre ingénierie didactique comme méthodologie de recherche

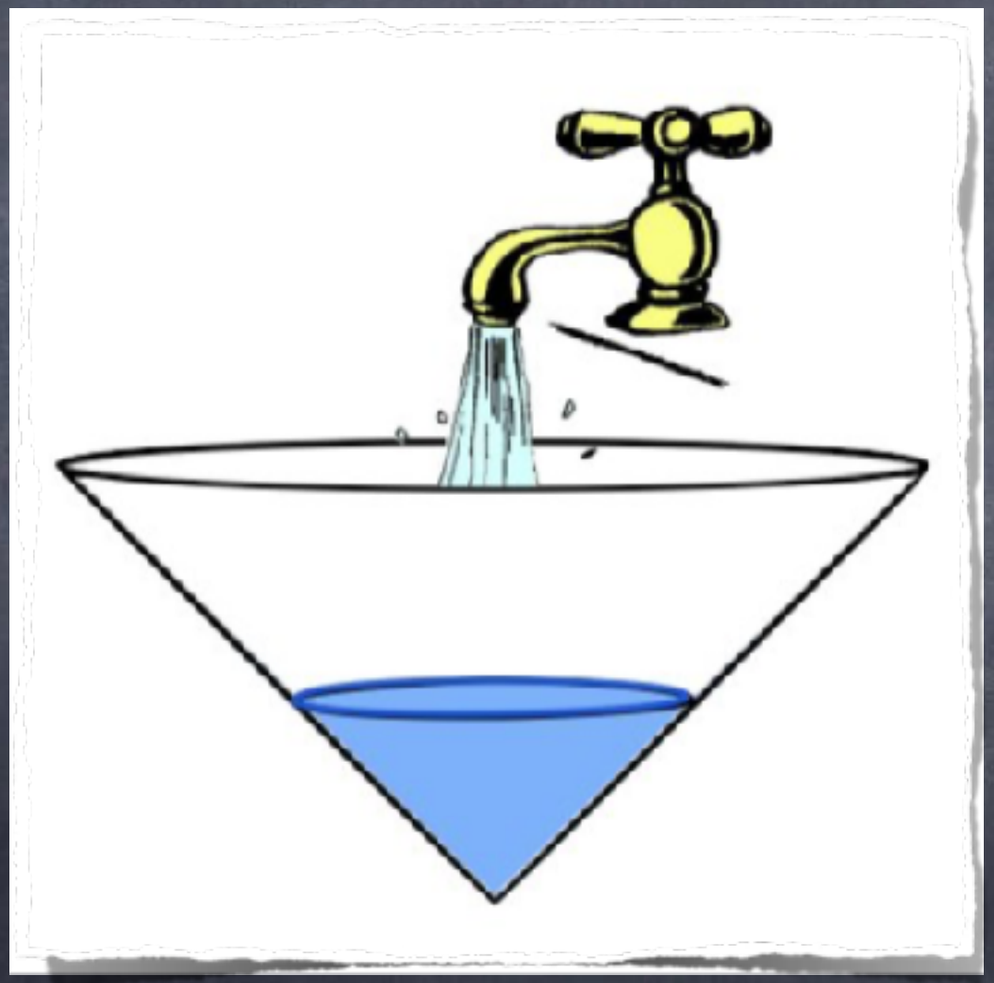
Ce qui distingue les ingénieries didactiques des autres méthodologies de recherches…

Méthode de validation interne

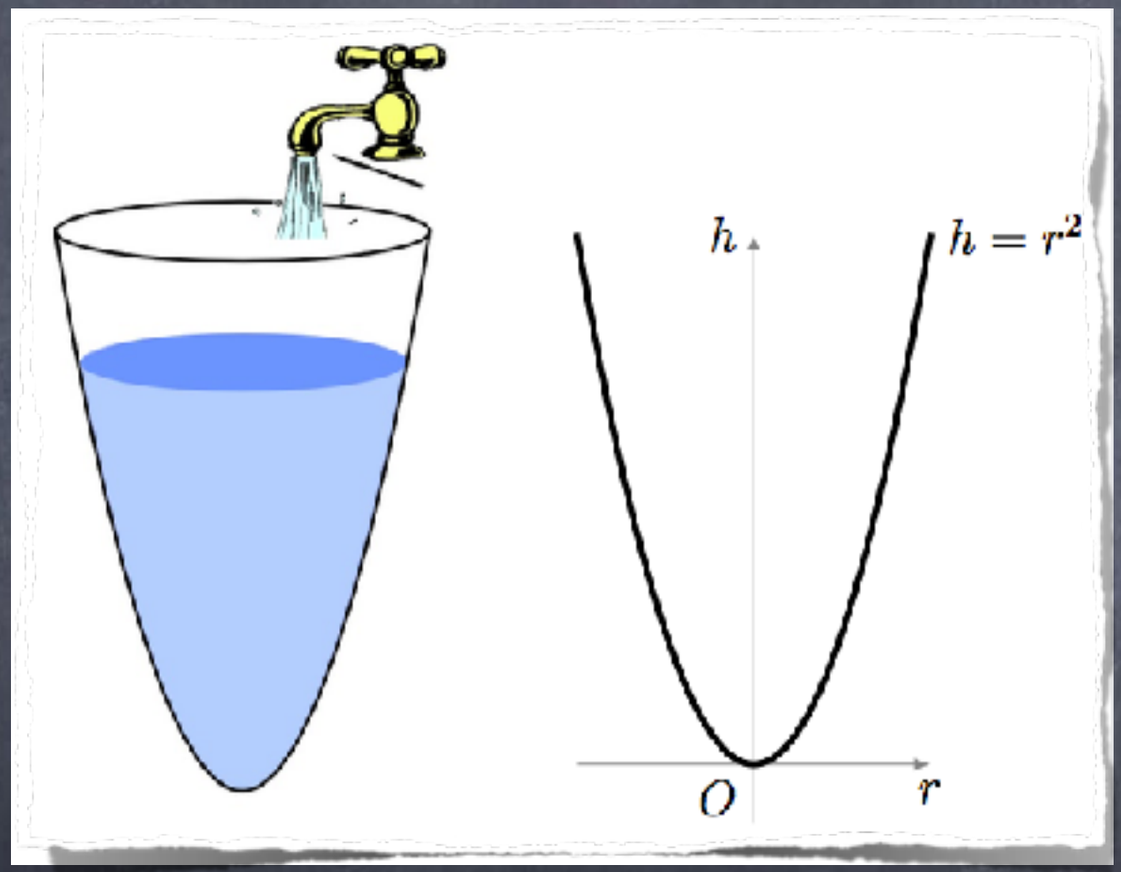
Analyse a priori VS *Analyse a posteriori*

- *Mise en évidence de variables didactiques*
- *Hypothèses sur leurs impacts* →
- *Validation ou invalidation de ces hypothèses*

Une pompe alimente un vase conique. Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de $1\ cm/min$ *. L'angle au sommet du cône vaut* $90°$*. Jusqu'à quand le débit de la pompe sera-t-il inférieur à* $100\ cm^3/min$ *?*



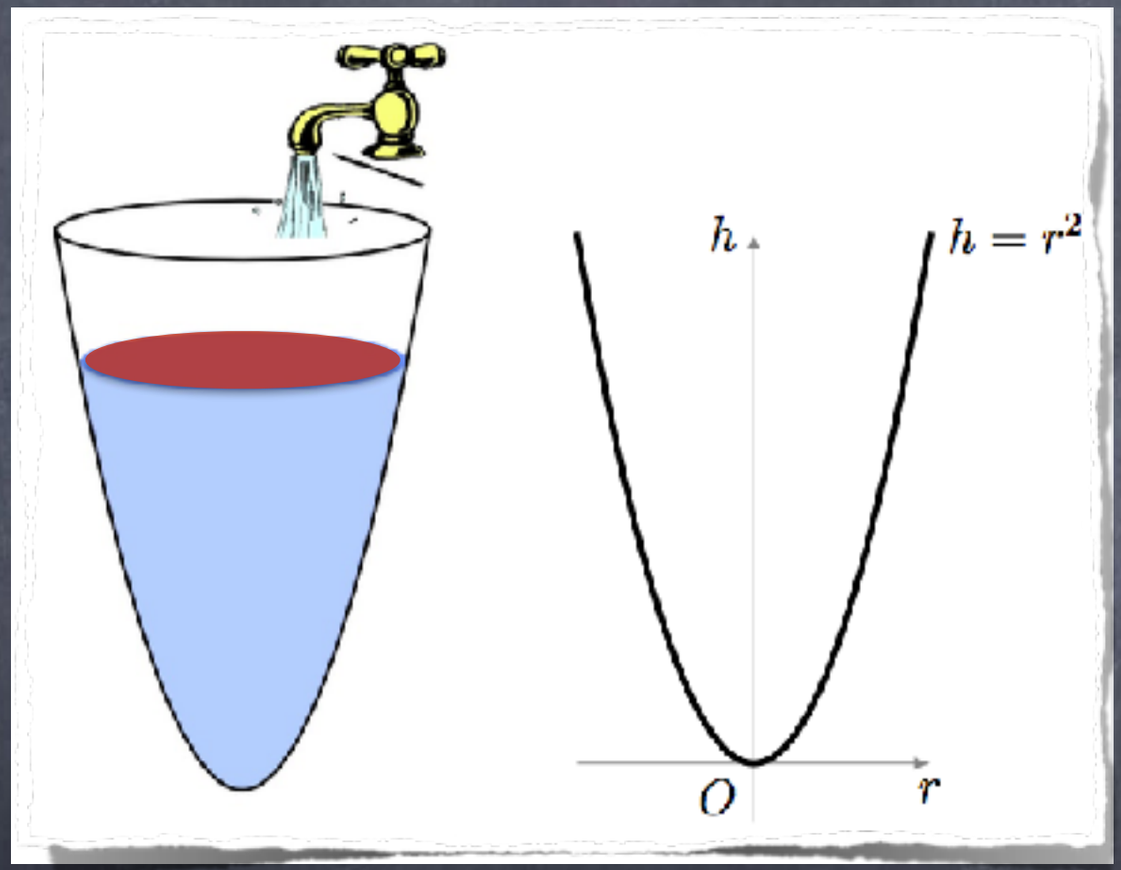
Considérons une cuve initialement vide dont la surface est celle d'un paraboloïde de révolution, alimentée par une pompe réglée de telle sorte que le niveau de l'eau dans la cuve monte régulièrement à la vitesse de $1\ cm/min$ *. Lorsque le débit de la pompe vaut* $100\ cm^3/min$ *, quel est le volume d'eau à l'intérieur du paraboloïde?*



Précision : Une telle surface peut être vue comme engendrée par une parabole qui tourne autour d'un axe vertical comme illustré par la figure suivante. Nous prendrons le cas particulier où $h = r^2$.

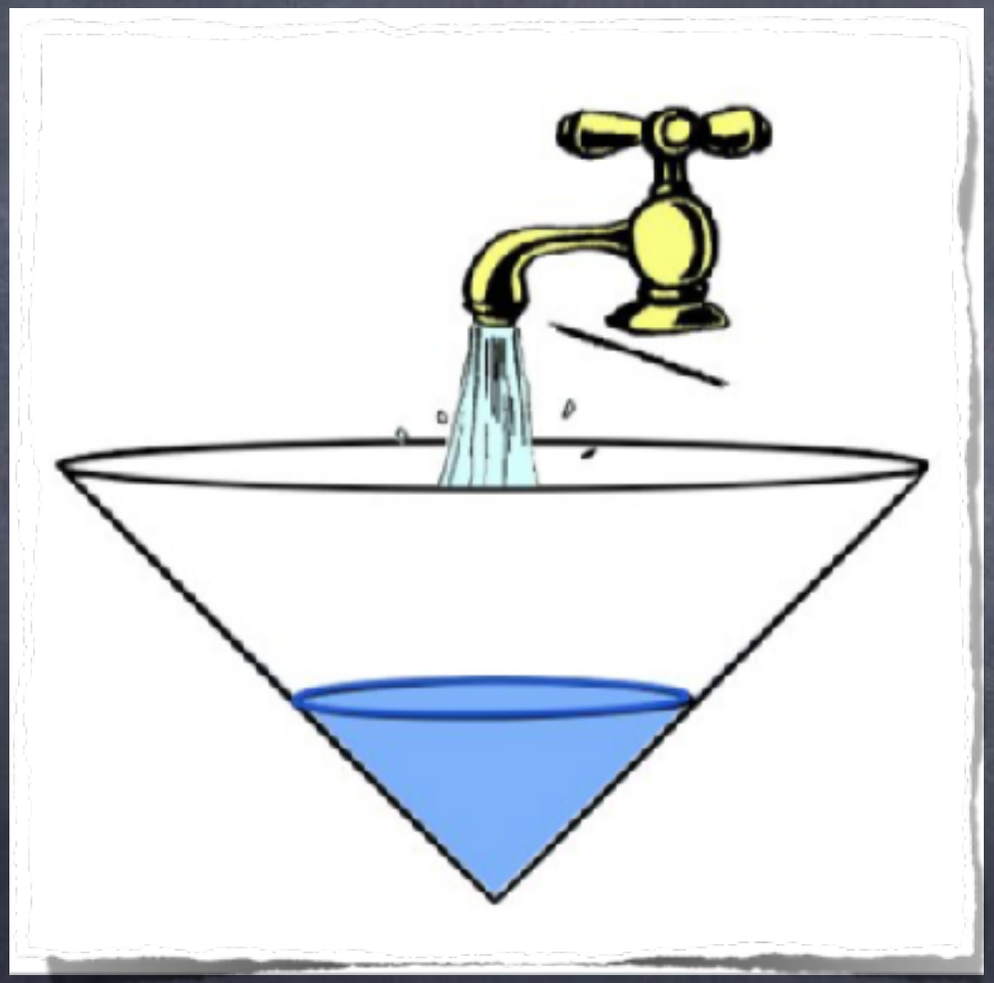
Considérons une cuve initialement vide dont la surface est celle d'un paraboloïde de révolution, alimentée par une pompe réglée de telle sorte que le niveau de l'eau dans la cuve monte régulièrement à la vitesse de $1\ cm/min$ *. Lorsque le débit de la pompe vaut* $100\ cm^3/min$ *, quel est le volume d'eau à l'intérieur du paraboloïde?*

$1\ \mathrm{cm/min}$



Précision : Une telle surface peut être vue comme engendrée par une parabole qui tourne autour d'un axe vertical comme illustré par la figure suivante. Nous prendrons le cas particulier où $h = r^2$.

Une pompe alimente un vase conique. Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de $1\ cm/min$ *. L'angle au sommet du cône vaut* $90°$*. Jusqu'à quand le débit de la pompe sera-t-il inférieur à* $100\ cm^3/min$ *?*



[...] le débit sera supérieur à $100\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{min}$ *lorsque l'aire de la base [du cône d'eau] dépassera* $100\,\mathrm{cm}^2$

il faut trouver la hauteur de sorte que la base ait une aire de $100\,\mathrm{cm}^2$.

$$\pi r^2 = 100\ cm^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{100}{\pi}}$$

760]. N : Donc en fait, à partir de là, on sait que ça, c'est la surface. Alors maintenant, il faut savoir la hauteur. À partir du débit, il faut connaître la hauteur. Et une fois qu'on aura la hauteur, on connaîtra la surface, et avec la surface, on saura calculer le débit. On saura calculer le volume. On peut pas faire la primitive de... Comment on fait une dérivée en arrière ?

Obstacles:

- *celui de se détacher de la prégnance des grandeurs et de leur dimensions, lié à l'obstacle empiriste;*

Obstacles:

- *celui de se détacher de la prégnance des grandeurs et de leur dimensions, lié à l'obstacle empiriste;*
- *la difficulté à articuler le local/global.*

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta V}{\Delta t} &= \frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t} \\
&= \frac{\frac{1}{3}\,.\,\pi\,.\,(t+\Delta t)^3-\frac{1}{3}\,.\,\pi\,.\,t^3}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{3}\,.\,\pi\,.\,\frac{(t+\Delta t)^3-t^3}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{3}\,.\,\pi\,.\,\frac{t^3+3t^2\Delta t+3t(\Delta t)^2+(\Delta t)^3-t^3}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{3}\,.\,\pi\,.\,\frac{\Delta t.\,(3t^2+3t\Delta t+(\Delta t)^2)}{\Delta t} \\
&= \pi t^2+\pi t\Delta t+\frac{1}{3}.\pi.(\Delta t)^2;
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\pi t^2+\pi t\Delta t+\frac{1}{3}.\pi.(\Delta t)^2\right)=\pi t^2
$$

172]. Elève : Avec les calculs que j'avais faits je suis tombé directement là-dessus sans devoir repasser par l'étape compliquée en dérivant directement la formule de la variation. Enfin de la variation de volume. On obtenait directement ça $[\pi t^2]$, je ne comprends pas pourquoi...

Obstacles:

- *celui de se détacher de la prégnance des grandeurs et de leur dimensions, lié à l'obstacle empiriste;*
- *la difficulté à articuler le local/global.*

Conditions optimales :

- *l'assimilation du débit à l'aire de la section à la surface libre de l'eau sert de tremplin à la perception de la fonction-volume comme fonction primitive de la fonction-débit.*
- *… mais il faut pour cela que les élèves soient familiers avec la définition initiale du taux de variation instantanée, comme limite de taux moyen, et non pas uniquement du « calcul rapide » de dérivées.*

6. Conclusion

En conclusion…

- *Mise en évidence des dysfonctionnements de l'enseignement actuel.*
  - ✦ *Modélisation des grandeurs insuffisante*
  - ✦ *Faible articulation local/global*
  - ✦ *Pas de retour aux questions à l'origine du calcul infinitésimal*
- *Le théorème fondamental ne passe pas*
- *Et, … il sert de pierre de touche de l'enseignement et de l'apprentissage de l'analyse au niveau secondaire*

MANUEL

Du calcul infinitésimal à l'analyse mathématique

M. Schneider, K. Balhan, I. Gerard et P. Henrotay

Collection " Si les mathématiques m'étaient contées "

Presses Universitaires de Liège

Un projet composé de deux niveaux praxéologiques:

- *praxéologie de type « modélisation »*

- *praxéologie de type « déduction »*

Un projet composé de deux niveaux praxéologiques:

- *praxéologie de type « modélisation »*

  Une construction des « préconstruits »: débit variable, vitesse variable, aire curviligne… ;

  Un milieu graphico-cinématique.

- *praxéologie de type « déduction »*

Un projet composé de deux niveaux praxéologiques:

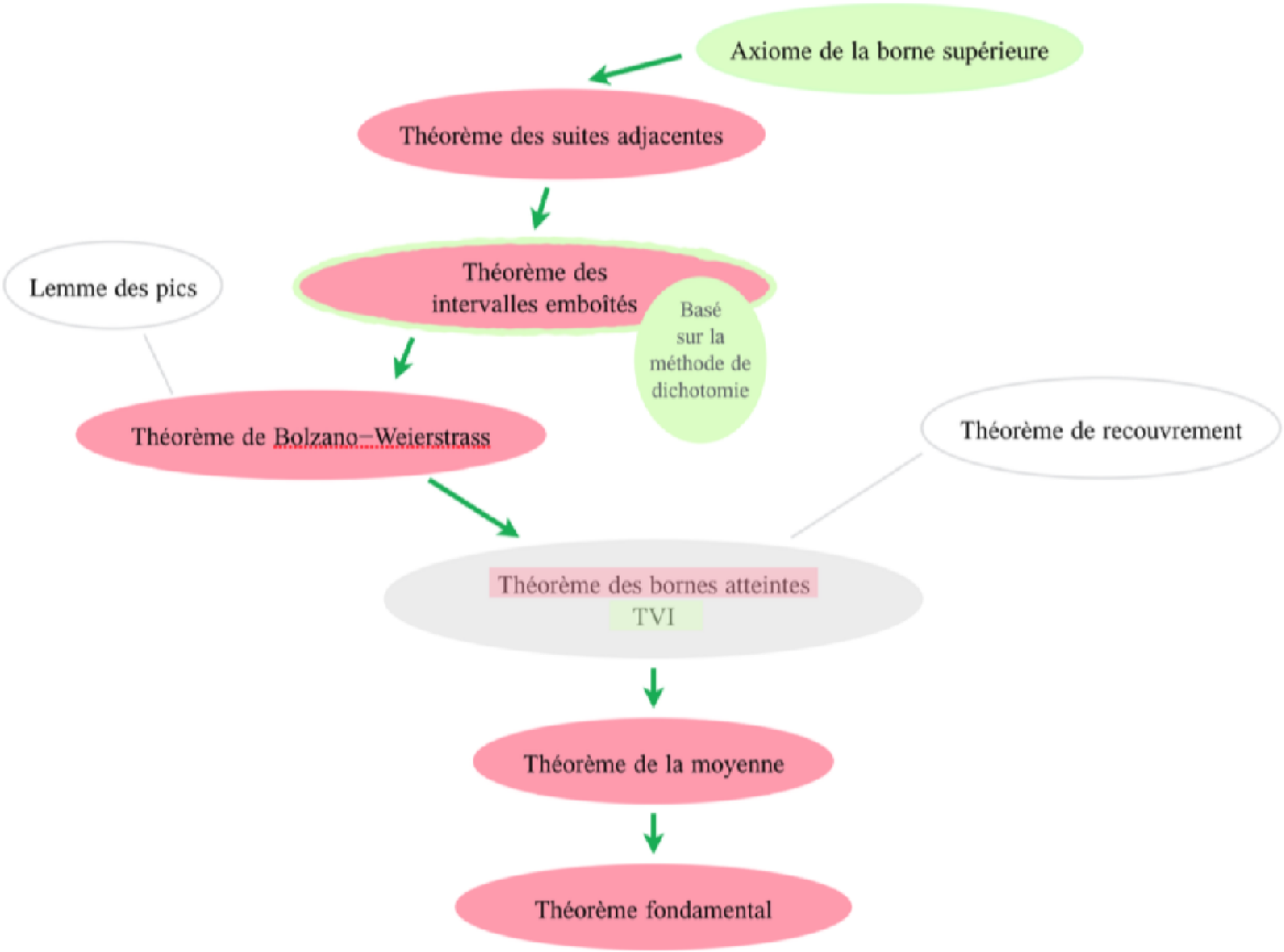
- *praxéologie de type « modélisation »*

  Une construction des « préconstruits »: débit variable, vitesse variable, aire curviligne… ;

  Un milieu graphico-cinématique.

- *praxéologie de type « déduction »*

  Construction de l'Analyse comme théorie d'où sont absentes toutes considérations cinématiques ou géométriques.


Axiome de la borne supérieure
Théorème des suites adjacentes
Théorème des intervalles emboîtés
Basé sur la méthode de dichotomie
Lemme des pics
Théorème de Bolzano–Weierstrass
Théorème de recouvrement
Théorème des bornes atteintes
TVI
Théorème de la moyenne
Théorème fondamental