

Symboliser et conceptualiser, un double processus au coeur des apprentissages mathématiques

L'exemple du signe “moins”

Joëlle Vlassis

Université du Luxembourg

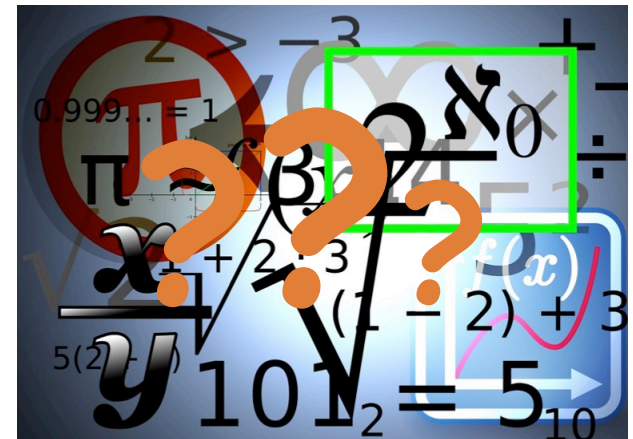
CREM – Nivelles, le 29 novembre 2019

Objectifs

- Mettre en évidence l'**indissociable relation**
 - qui unit **symboles** et **concepts** mathématiques,
 - **intrinsèque** aux mathématiques et à leur apprentissage.
- Présenter, sur cette base, des principes d'enseignement et des **exemples concrets** d'activités d'apprentissage (préscolaire, primaire et secondaire).

Plan

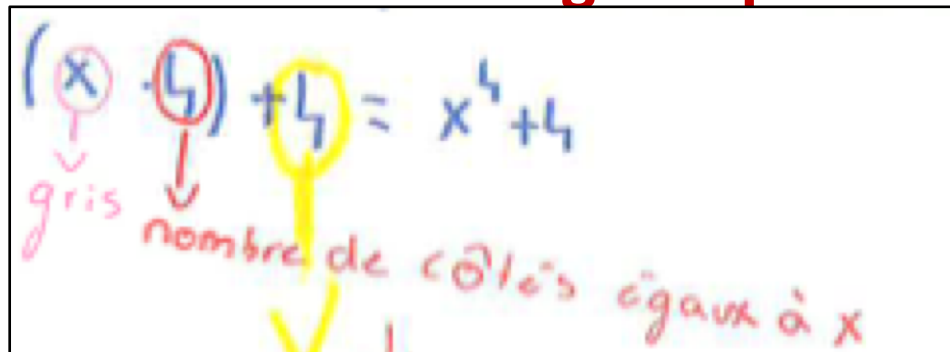
1. Les difficultés des élèves relatives aux symboles mathématiques
2. Petit détour historique : l'histoire des nombres naturels
3. Symboliser et conceptualiser dans les apprentissages (+ exemples)
4. L'exemple du signe "moins"
5. Conclusions générales



1. Les difficultés des élèves relatives aux symboles mathématiques

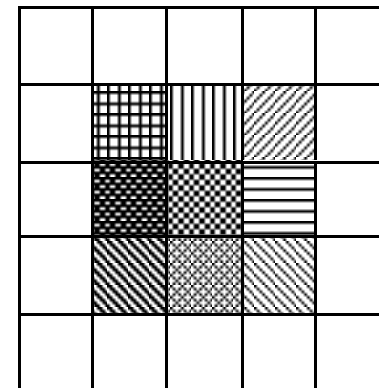
Difficultés en algèbre (secondaire)

Les conventions algébriques



Handwritten algebraic expression: $(x \cdot 4) + 4 = x^4 + 4$. Annotations include: a pink circle around x with a pink arrow pointing to the word "gris" (grey); a pink circle around 4 with a pink arrow pointing to the text "nombre de côtés égaux à x "; and a yellow circle around the second 4 with a yellow arrow pointing to the same text.

Elèves de
4^e secondaire
générale



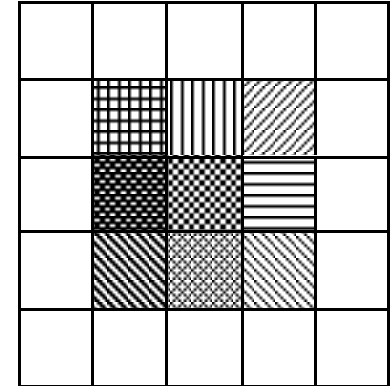
Difficultés en algèbre (secondaire)

Les conventions algébriques

$(x - 4) + 4 = x^4 + 4$

gris
nombre de côtés égaux à x
1

Elèves de
4^e secondaire
générale



Le signe d'égalité

- 1) Hugo voudrait réaliser un tapis à partir de 5 carrés gris sur un côté. A l'aide du matériel, construis ce tapis. Combien de petits carrés blancs sont-ils nécessaires pour réaliser ce tapis ?

carrés gris : $5 \cdot 5 = 25$

carrés blancs : $5 \cdot 4 = 20 + 4 = 24$

(→ dessin)

- 2) Hugo voudrait réaliser un tapis à partir de 7 carrés gris sur un côté. Cherche cette fois un calcul qui lui permettra de trouver combien de carrés blancs sont nécessaires dans ce cas.

carrés gris : $7 \cdot 7 = 49$

carrés blancs : $7 \cdot 4 = 28 + 4 = 32$

(→ dessin)

Le signe d'égalité

$$\underline{5a - a = 4a}$$

$$2a - 7 + a = -4a$$

$$\underline{7a \cdot 2a = 14a^2}$$

$$a^3 + a^3 = a^6$$

$$(n + 2) \cdot 2 + 2 = 6/A$$

$$a - (2 - a) = 2a$$

$$4a \cdot (3 + 5a) = 32a^2$$

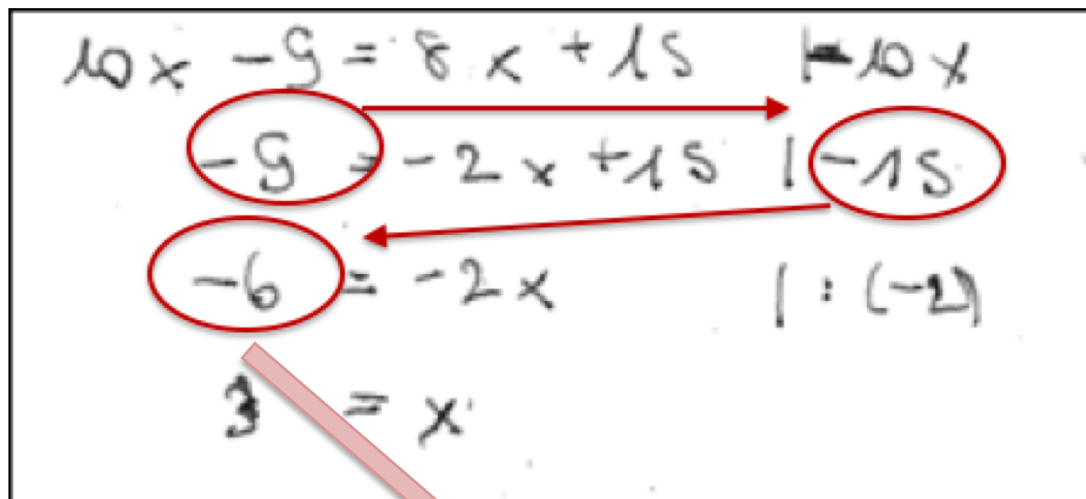
$$-2 \cdot (a + 3) = -6a$$

$$(b + 5) \cdot (b + 6) = 3ab^2$$

L'élève (fin de 2^e secondaire) cherche à produire une réponse ne comportant plus de signes opératoires apparents (CE1D).

Le signe « moins »

Dans les équations, on observe des erreurs dans les opérations avec les négatifs (Vlassis, 2002) :



Handwritten student work showing errors in solving an equation. The work is written on a piece of paper with a black border. The equations are:

$$10x - 9 = 8x + 15$$

The student has crossed out $10x$ on the right side. Below this, the equation is written as:

$$-9 = -2x + 15$$

Red circles are drawn around -9 and -15 . Red arrows point from -9 to -15 and from -15 to -6 . The next line shows:

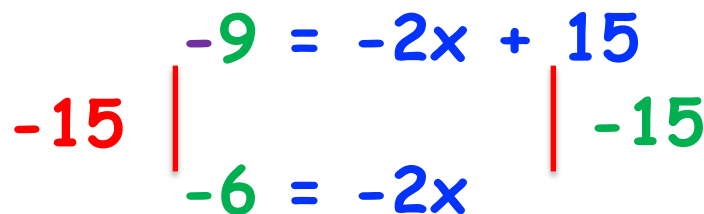
$$-6 = -2x$$

Red circles are drawn around -6 and -2 . Below this, the student has written:

$$3 = x$$

A red arrow points from the 3 in the last equation to the -15 in the second equation.

Elève de 2^e secondaire



Corrected equations with color coding:

$$\begin{array}{l} -9 = -2x + 15 \\ -15 \quad | \quad -6 = -2x \end{array}$$

The numbers are color-coded: -9 and -15 are red, -6 is green, and $-2x$ is blue.

Difficultés en arithmétique (primaire)

Les symboles opératoires +, - et = (1^{ère} année primaire)

Exemple dans l'étude de Fagnant (2005, 2008)

14 problèmes additifs et soustractifs proposés en fin de 1^{ère} année :

Pierre a 4 pommes, Anne a 9 pommes. Combien de pommes Pierre et Anne ont-ils ensemble ?

- Lecture à voix haute du problème
- L'enfant répète le problème et tente de le résoudre avec l'aide de matériel concret (des poupées et des blocs) ;
- Il est alors invité à écrire un calcul qui correspond à l'histoire et/ou à la stratégie développée pour résoudre le problème.

Résultat :

22 sur 25 élèves produisent une réponse correcte

mais

seuls 17 proposent une symbolisation correcte : $4 + 9 = 13$

Les symboles opératoires +, - et =

Face à chaque problème, on observe que **le nombre de calculs corrects** est toujours **inférieur au nombre de réponses correctes** obtenues avec du matériel concret .

⇒ Cela témoigne de difficultés spécifiques au symbolisme mathématique puisque **les élèves ont été incapables de mobiliser le calcul adéquat (et appris) face à un problème qu'ils avaient pourtant résolu correctement.**

Au final, pour l'ensemble de problèmes, seuls 4 élèves sur les 25 ont pu symboliser correctement tous les problèmes

Parmi les 21 qui se trompent dans les symbolisations :

- 13 élèves, produisent un calcul correct, mais uniquement avec un signe « + » .
- 3 élèves ne produisent aucun calcul symbolisé correctement

Origine de ces difficultés relatives aux symboles

- ✓ Le point de vue implicite de pratiques d'enseignement qui consistent à **considérer les symboles de manière indépendante des concepts et opérations** qu'ils représentent.
- ✓ Un enseignement qui envisage l'apprentissage des procédures et de leur symbolisation **indépendamment des situations ou des problèmes** qui justifient leur utilisation et qui leur donnent du sens.

Exemples :

- En 1^{ère} année primaire, la résolution de problèmes est souvent postposée en fin d'année, après que les opérations sont introduites.
- Au secondaire, la résolution de problèmes par équations est présentée en 2^e année, une fois que les élèves ont été initiés au calcul littéral.

(Fagnant, 2005, 2008; Vlassis et al., 2015).

Origine de ces difficultés relatives aux symboles

- ✓ Les **mathématiques** sont souvent considérées comme une **réalité préexistante** que l'élève doit progressivement découvrir.
- ⇒ Les mathématiques et donc les symboles sont enseignées sous leur **forme définitive**
- ⇒ L'enseignement impose des représentations symboliques qui sont extérieures à l'élève et prédéterminées ... **sans toujours tenir compte du sens que ce dernier lui attribue et qui ne correspond pas nécessairement au sens que l'enseignant veut transmettre.**

Par exemple :

- Le **signe d'égalité** au primaire et au secondaire.
- La **lettre** ou le **signe « moins »** en algèbre au début du secondaire.

Origine de ces difficultés relatives aux symboles

En conséquence, du point de vue des élèves ...

- Utilisation d'un langage mathématique dépourvu de sens (symboles, formules, définitions, ...).
- Difficultés à comprendre les symbolisations et à les utiliser de manière adéquate pour résoudre un problème.

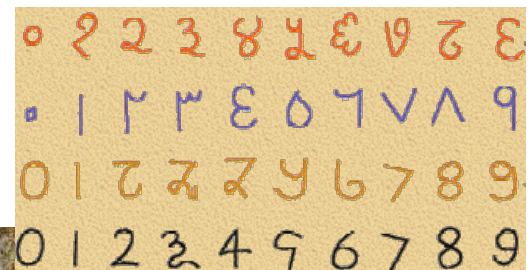
(Bednarz et al., 1993)

2. Petit détour historique

Dans l'histoire des mathématiques

Dès les premiers instants de leur histoire, les mathématiques se sont développées en étroite relation avec les symboles qu'elles utilisent.

Depuis les premières traces dénotant des quantités sur les tablettes de pierre jusqu'aux représentations formelles de nombres imaginaires, les symboles sont indissociables de l'existence même des mathématiques et de leur évolution.



$$i^2 = -1$$

(très) Brève histoire des nombres

(Ifrah, 1994)

1. Vers 35000/20000 avant JC

Premières traces d'utilisation de systèmes de "comptage"

Correspondance terme à terme (utilisation d'entailles sur les os ou des doigts/partie du corps)



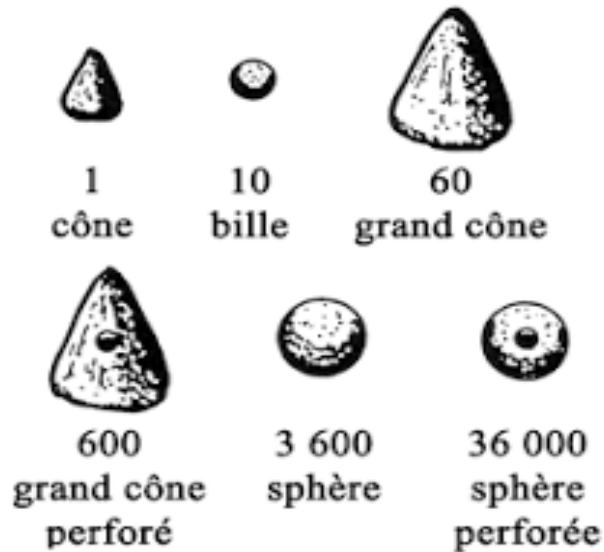
Ces systèmes sont **ingénieux** mais montrent vite leurs **limites** dès que les quantités deviennent trop importantes (au delà de 100 environ).

(très) Brève histoire des nombres

(Ifrah, 1994)

2. Vers 3500 avant JC en Mésopotamie

Utilisation de **calculi** c'est-à-dire de jetons :



Ce premier regroupement des éléments unitaires en un seul objet.

➤ **Avancée très importante**

Il représente le **cardinal de l'ensemble**

⇒ Il n'est plus nécessaire de tout pointer et de comparer tous les objets pour "compter".

⇒ Cela autorise de traiter des nombres plus importants et de réaliser des manipulations plus complexes et plus efficaces.

(très) Brève histoire des nombres

(Ifrah, 1994)

Evolution dans l'utilisation des calculi

Initialement, ces calculi étaient placés dans une **boule**.

⇒ Pour compter le contenu, il fallait chaque fois casser la boule et compter les calculi à l'intérieur.



Ensuite, pour éviter de devoir chaque fois casser la boule, on a tracé sur celle-ci des **marques** correspondant aux objets à l'intérieur

⇒ **A quoi sert alors de conserver les calculi?**



Enfin, la boule s'aplatit et devient une **tablette** sur laquelle figurent les signes représentant les calculi (une encoche pour un bâtonnet, une empreinte circulaire pour le disque, ...).



➡ **Importance de cette avancée graphique** ⇒ autorise des opérations mathématiques plus rapides et plus abstraites : il n'est plus nécessaire d'utiliser des objets concrets pour compter.

(très) Brève histoire des nombres

(Ifrah, 1994)

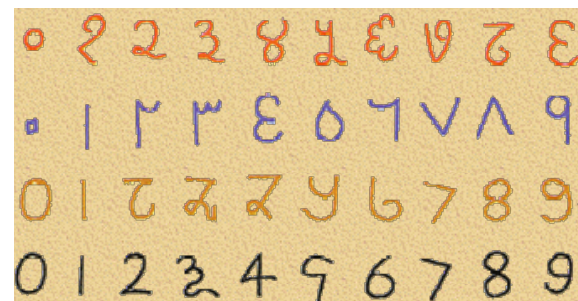
3. Dans l'antiquité romaine

Utilisation des chiffres romains partiellement basés sur un système de correspondance terme à terme (pour les 3 premiers nombres) mais utilisant des symboles basés sur un regroupement en base 5 (V) ou 10 (X, C, ...)



Ces systèmes, calculi et chiffres romains, sont ingénieux, mais ne permettent pas de faire des opérations complexes (utilisation d'abaques) ni de représenter certains nombres.

4. Au VIII^e siècle



Apparition en **Inde** du **système de numération de position en base 10**, puis du zéro. Ce système sera adapté et affiné par les arabes jusqu'à notre système actuel de numérotation de position.

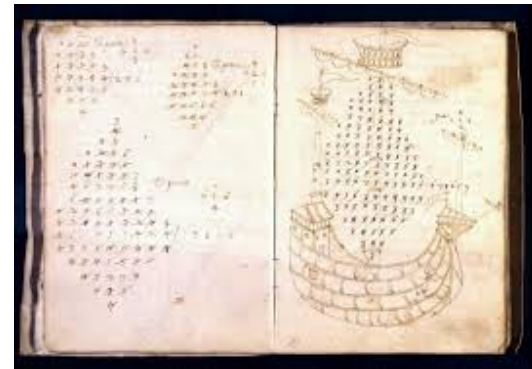
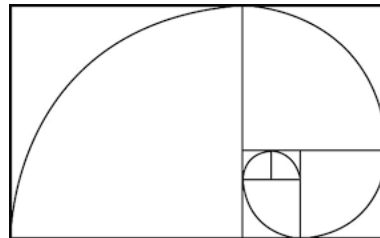
(très) Brève histoire des nombres

(Ifrah, 1994)

En Occident ce système ne sera connu qu'au XI^e siècle mais ne sera vraiment pleinement utilisé qu'à partir du **XIII^e siècle avec les travaux de Léonard de Pise**.

Certains savants préféraient garder le système qu'ils connaissaient bien des chiffres romains.

Il faut dire que l'Europe de l'époque n'a pas encore tout à fait besoin de la puissance de calcul offerte par les chiffres arabes.



Objectifs de ce détour historique?

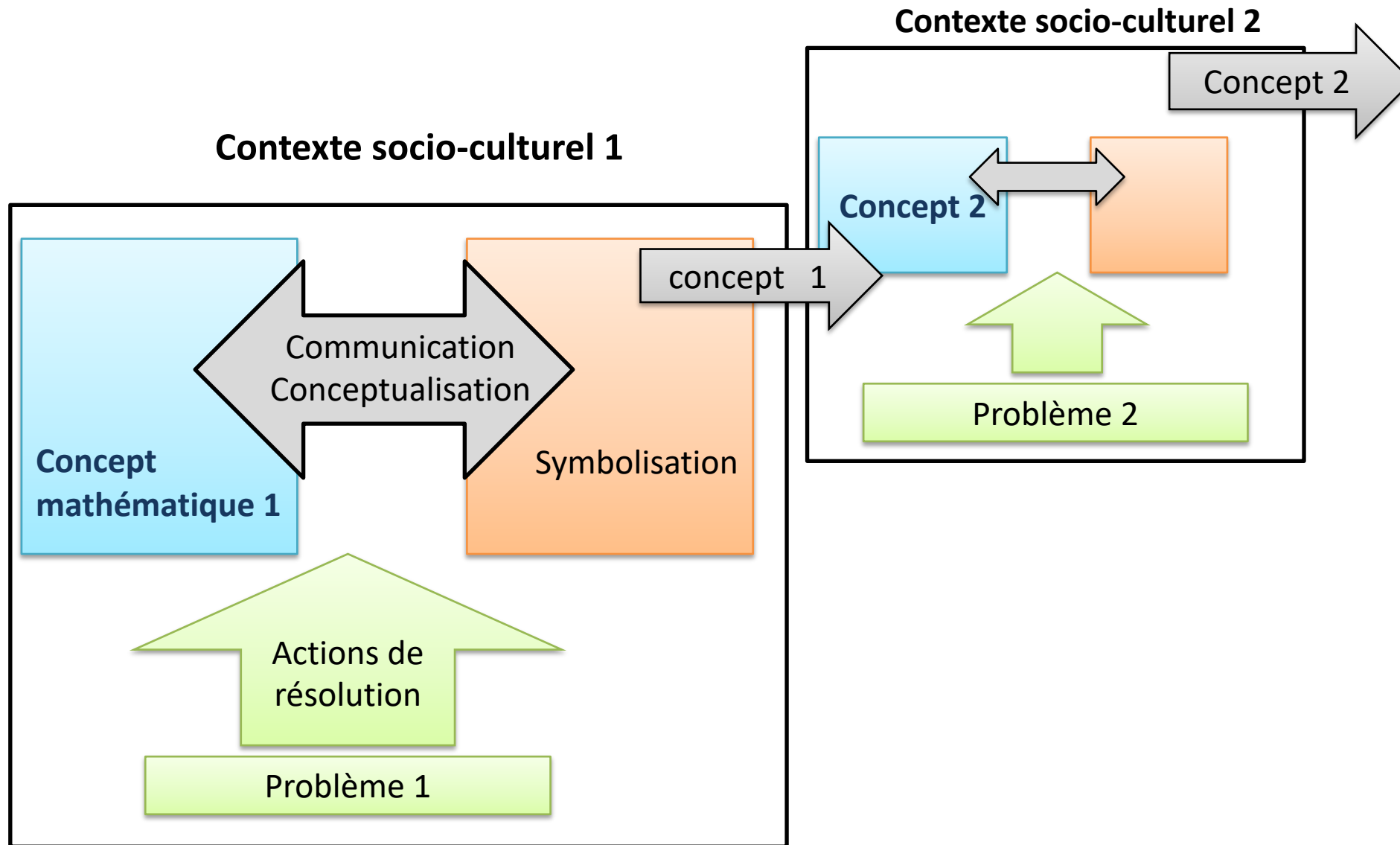
L'histoire des nombres naturels montre que :

- les mathématiques ont émergé de la **résolution de problèmes** qui se sont posés aux hommes dès la préhistoire
- ceux-ci ont dû développer des actions de résolution mais également **inventer divers systèmes symboliques** pour **garder la trace** de ces actions et pour les **communiquer**
- ces systèmes symboliques ont permis la communication, les **échanges** et **donc la réflexion**, le raisonnement $\Rightarrow$ **conceptualisation**

$\Rightarrow$ Cette histoire montre que les mathématiques ont progressé selon un processus où **les avancées symboliques se sont développées en étroite relation avec les avancées conceptuelles** pour résoudre des problèmes liés à un contexte socio-culturel donné

Ces avancées symboliques permirent également de poser de **nouveaux problèmes** et d'ouvrir à de nouveaux concepts requérant de nouvelles symbolisations plus adéquates dans un **processus cyclique et récursif** d'une société et d'une science en constante progression.

Symboliser et conceptualiser



Par exemple, dans l'histoire des nombres ...

- C'est sous l'impulsion des **premières transactions commerciales** que les êtres humains ont dû **inventer des procédures de comptage (actions)** dont il a fallu **garder la trace à l'aide de marques ou de jetons (symbolisations)** et qu'une première conceptualisation des nombres naturels a pu se développer.
- C'est parce que les transactions se sont multipliées et que les **quantités à dénombrer ont augmenté** que les êtres humains ont été amenés à trouver des **procédures de résolution plus rapides et efficaces (actions)** ou de **symboliser les nombres sur de l'argile, regroupés en base 5 ou 10 ou 60, ... (symbolisations)**, et que les naturels se sont affirmés en tant que cardinal d'une collection.
- **C'est enfin parce que la numération de position** (système symbolique dont l'efficacité l'a mené jusqu'à nos jours) s'est imposée que **les opérations se sont complexifiées** et que **des nombres nouveaux** tels que les négatifs ou les décimaux, mais aussi **de nouveaux domaines** d'investigation tels que l'algèbre, sont apparus dans des sociétés en constante évolution.

Objectifs de ce détour historique?

L'histoire des nombres révèle que les mathématiques consistent en une construction humaine et sociale

- en perpétuel mouvement,
- où la symbolisation joue un rôle essentiel en étroite interaction avec la conceptualisation.

3. Symboliser et conceptualiser dans les apprentissages

Que nous apprend l'histoire des mathématiques pour les apprentissages des élèves?

L'histoire des nombres a montré que les objets mathématiques

- sont le résultat d'une construction humaine,
- ont été créés pour résoudre des problèmes.

⇒ Les nombres n'ont pas d'existence tangible et ne sont donc pas accessibles par la perception.

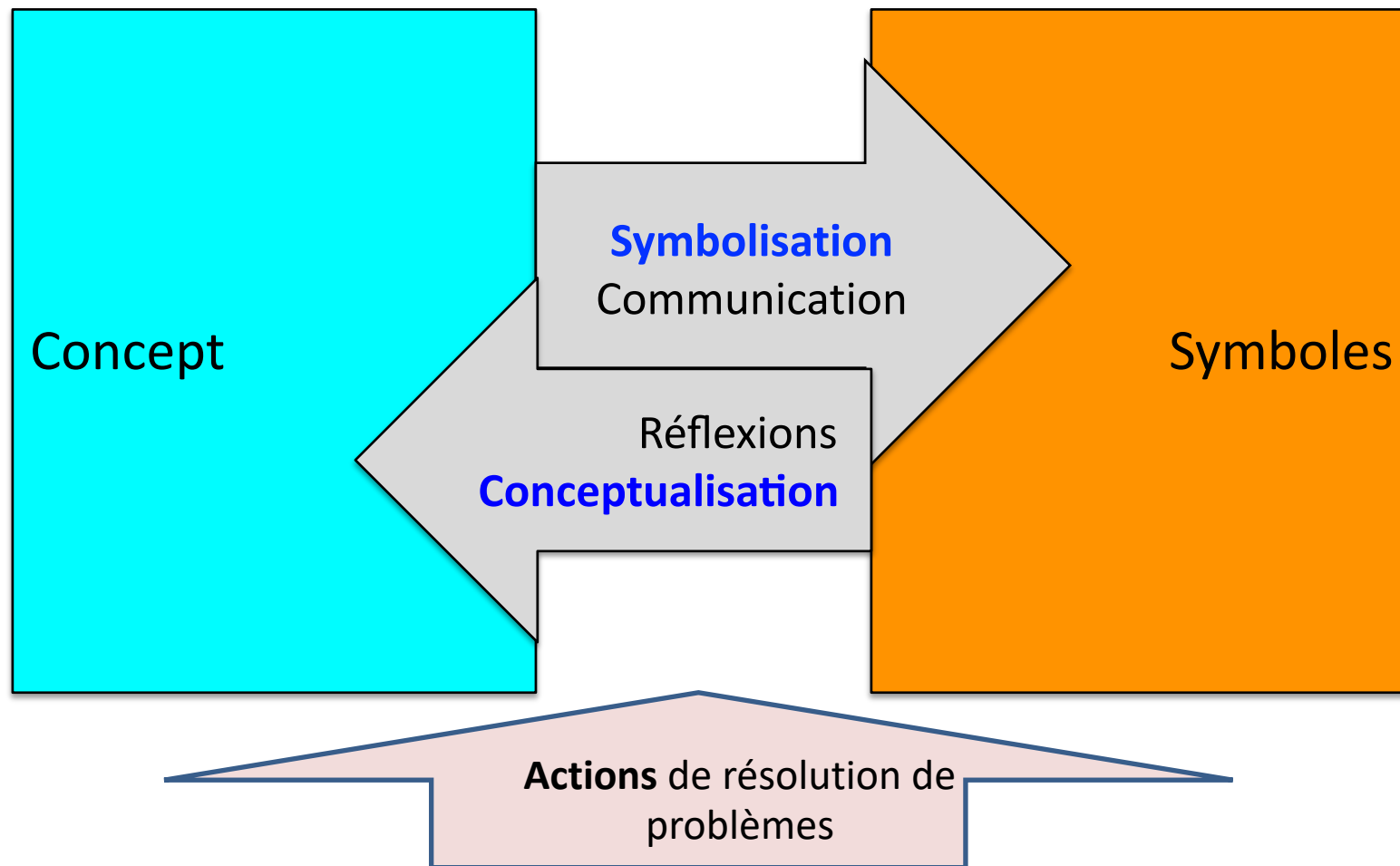
On ne les perçoit qu'à travers leurs représentations symboliques (symboles, modèle, dessins, gestes, ou tout autre représentations)

⇒ Ces représentations **symboliques** sont donc **cruciales**.

⇒ Leur utilisation autorise la **communication**, la **réflexion** et les échanges mathématiques impossibles sans elles.

Elles permettent ainsi le développement de la **conceptualisation**

Symboliser et conceptualiser, une dialectique au coeur des apprentissages mathématiques ...



... selon un processus similaire à celui qui s'est développé au cours de l'histoire.

Dans les apprentissages mathématiques

Redécouverte de l'importance de la symbolisation

A la fin des années 1990, avec l'importance grandissante accordée aux **facteurs sociaux**, les **approches socioculturelles** (Vygostky), s'imposent de plus en plus en didactique des mathématiques.

Dans ces approches,

- les **interactions sociales** et donc la **communication** sont constitutives des apprentissages
- les **outils de communications**, les « **signes** » occupent un rôle central et leur appropriation est considérée comme déterminante dans les apprentissages.

Exemples de « signes » :

Le langage oral, écrit, symboles (non) conventionnels, dessins, gestes, schémas, etc.

Dans les apprentissages mathématiques

Ainsi, sous l'impulsion des approches socioculturelles,

- Le rôle des symboles dans les apprentissages s'est profondément modifié.
- Ils sont considérés comme des **outils pour communiquer** un raisonnement, une justification, une argumentation en mathématique...
- ... et donc, comme des **outils de conceptualisation**.
- Les **symboles (signes)** incluent non seulement les symboles conventionnels, mais aussi non conventionnels. Il s'agit de **toute trace concrète destinée à représenter** une notion, un concept, une opération, ... mathématique

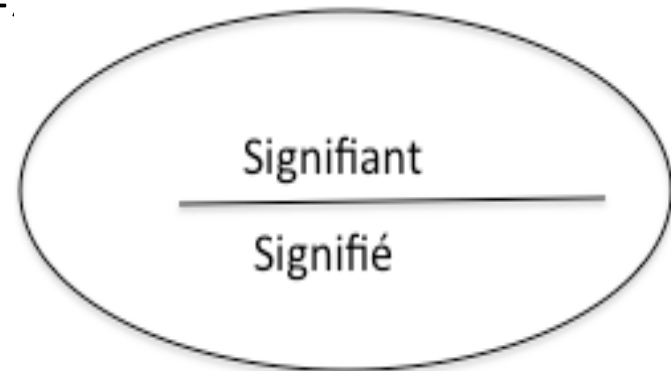
Et dans les apprentissages mathématiques?

Cela nous amène ainsi à considérer le « **signe** », et donc les symboles ...

- comme exprimant une relation étroite entre **signifiant** (relatif à la forme, à l'**apparence**) et **signifié** (relatif au fond, au sens, au **concept**)

Un signe est ainsi représenté comme un ensemble composé de deux facettes inséparables.

(Lacan/Saussure, cité par Gravemeijer, 2002)

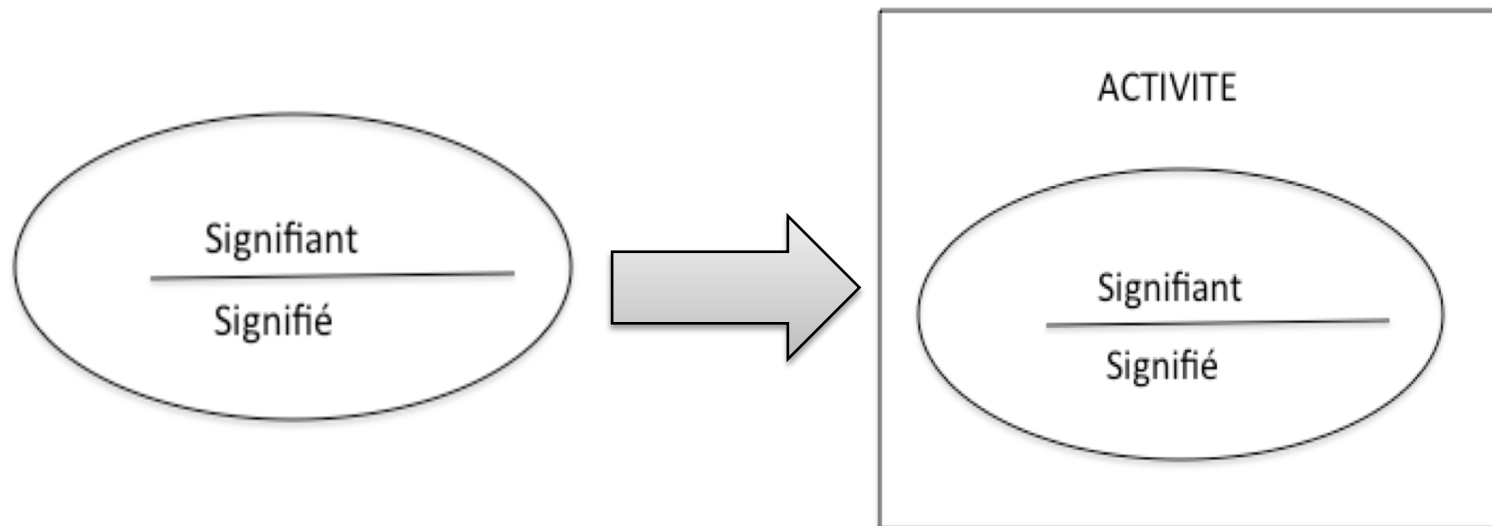


Signes et communication

Pour un approfondissement de la définition du signe ...

Un « **signe** » ...

- n'est jamais une entité pour elle-même,
- il est utilisé pour communiquer dans un contexte d'activité précis
- et est produit pour atteindre un objectif donné (Radford, 1998).



L'activité ...

- C'est l'environnement dans lequel s'insèrent les actions mathématiques des individus et qui les rendent nécessaires (problèmes)..
- Elle est orientée vers un but (Radford 1998)

Rendre du sens aux mathématiques

Processus de mathématisation progressive

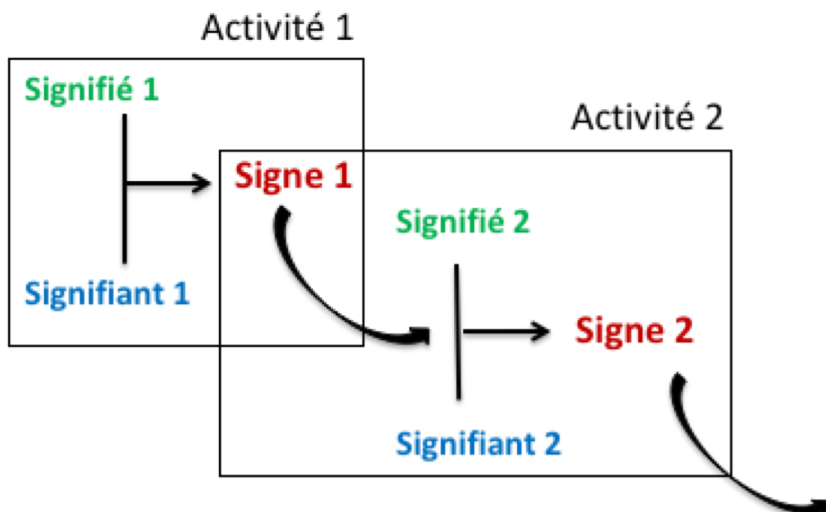
- Sur cette base, une mathématisation progressive peut être développée **au départ des connaissances et expériences des élèves** dans des activités de symbolisation ...
 - ✓ qui se développeront en relation avec l'évolution de pratiques mathématiques de la classe (activités) .
 - ✓ afin de faire émerger une **réalité mathématique de plus en plus abstraite (abstraction)**
- Cette progression se structure ainsi en différentes étapes de symbolisation : **chaîne de significations**

Des **activités de complexité croissante** vont amener les élèves à utiliser **des symboles/signes de plus en plus abstraits**.

Rendre du sens aux mathématiques

Processus de mathématisation progressive

- Sur cette base, une mathématisation progressive peut être développée **au départ des connaissances et expériences des élèves** dans des activités de symbolisation ...
 - ✓ qui se développeront en relation avec l'évolution de pratiques mathématiques de la classe (activités) .
 - ✓ afin de faire émerger une **réalité mathématique de plus en plus abstraite (abstraction)**
- Cette progression se structure ainsi en différentes étapes de symbolisation : **chaîne de significations**



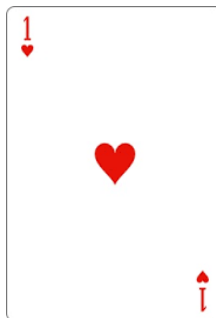
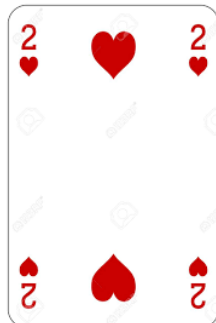
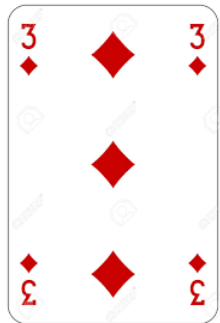
Des **activités de complexité croissante** et **orientées vers un but**, vont amener les élèves à utiliser **des symboles/signes de plus en plus abstraits**.

Au fil des activités/questions, le sens (**signifié**) évolue progressivement en parallèle avec une progression dans la symbolisation (**signifiant**)

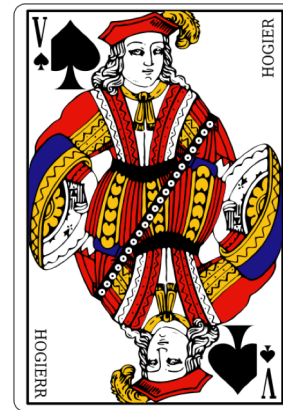
Un exemple de mathématisation progressive à la transition maternelle-primaire

Le jeu de la "carte en trop" : Jeu basé sur les règles du jeu du valet noir

Exemple : carte en trop jusque 5



Carte en trop : valet noir



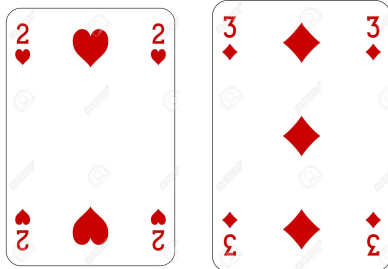
(Agir avec les nombres, Delhaxhe et Godenir, 1995)

Différentes étapes dans la chaîne de significations

L'exemple de la carte en trop

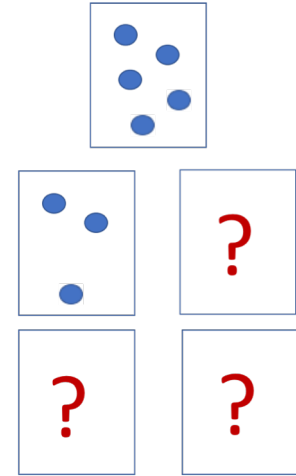
Etape 1 - maternelle – primaire

Jouer avec à la carte en trop
jusque 5



Etape 2 - maternelle – primaire

Dessiner des cartes
ou compléter
pour faire
un nombre donné
(ici : 5)



Le sens de l'addition se
construit progressivement :

Il devient de **plus en plus**
abstrait **parallèlement** à
une **symbolisation de plus**
en plus formelle

Etape 3 - primaire

10	
9	1
7	3
5	5
?	?
2	?
?	4

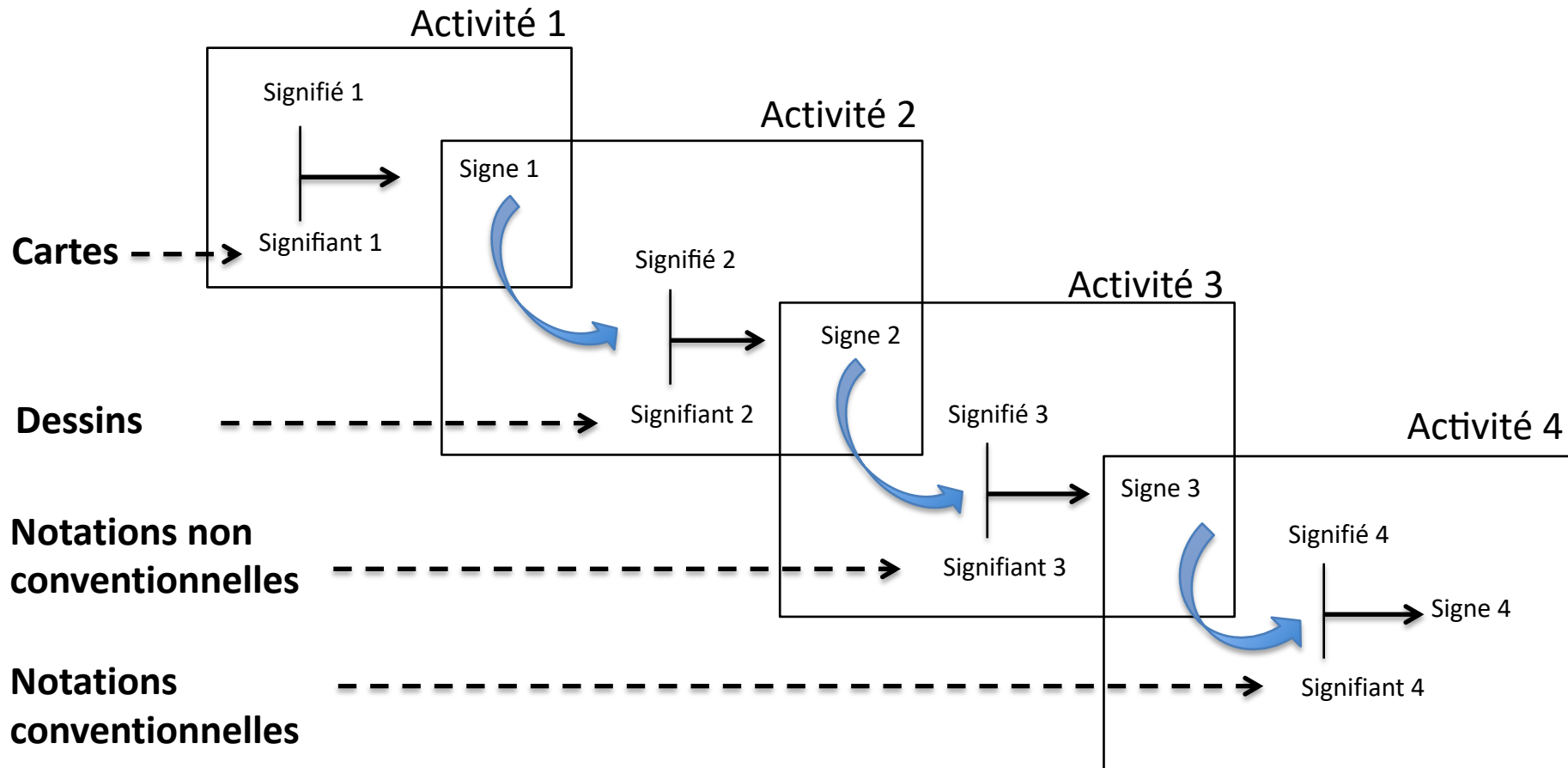
Etape 4 - primaire

a) $3 + 4 = ?$
 $3 + 7 = ?$

b) $7 + ? = 10$ $10 = ? + ?$
 $? + 6 = 10$ $10 = 9 + ?$

c) $5 + 5 = ? + 6$

Carte en trop : chaîne de significations



- Au départ des actions des enfants dans le contexte d'un jeu, les nombres, les opérations sur ces nombres (signifiés) se formalisent progressivement en même temps que leurs symbolisations (signifiants).
- Le **contexte du jeu disparaît progressivement** tout en restant en arrière plan.
- **Important :** L'enfant peut toujours **revenir en arrière** quand le sens se perd.

Un exemple de mathématisation progressive à la transition primaire-secondaire

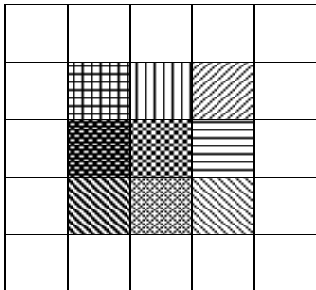
Antoine fait des mosaïques

(Demonty & Vlassis, 2018)

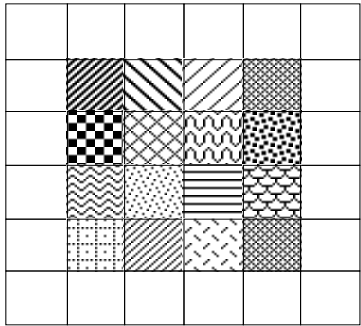
- ✓ Apprendre à **généraliser**
- ✓ Développer une **pensée algébrique**

Antoine fait des mosaïques

Antoine veut réaliser des mosaïques carrées réalisées à partir de carrés, dont certains sont colorés et d'autres pas. Ces mosaïques sont de différentes tailles mais elles sont toutes produites sur le même modèle comme dans les exemples ci-dessous :



Mosaïque réalisée à partir de 3 carrés de couleur sur un côté



Mosaïque réalisée à partir de 4 carrés de couleur sur un côté

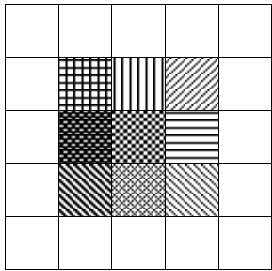
Antoine veut réaliser des mosaïques de différentes tailles. Pour prévoir le matériel, il cherche un moyen de calculer le nombre de carrés blancs dont il aura besoin à partir du nombre de carrés de couleurs qu'il veut mettre sur un côté de la mosaïque.

- 1) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 5 carrés de couleur sur un côté. A l'aide du matériel, construisez cette mosaïque.
Combien de petits carrés blancs sont-ils nécessaires pour réaliser cette mosaïque?
.....
- 2) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 7 carrés de couleur sur un côté. Cherchez cette fois un calcul qui lui permettra de trouver combien de carrés blancs sont nécessaires dans ce cas.
.....
- 3) Faites de même pour une mosaïque construite à partir de 32 carrés de couleur sur un côté.
.....
- 4) Trouvez un moyen qui permette de calculer, à chaque fois, le nombre de carrés blancs nécessaires pour réaliser une mosaïque, quel que soit le nombre de carrés colorés de côté.
.....
.....
.....
- 5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.
.....

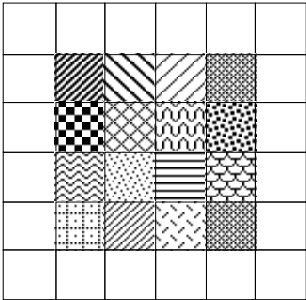
Différentes étapes de conceptualisation symbolisation

Antoine fait des mosaïques

Antoine veut réaliser des mosaïques carrées réalisées à partir de carrés, dont certains sont colorés et d'autres pas. Ces mosaïques sont de différentes tailles mais elles sont toutes produites sur le même modèle comme dans les exemples ci-dessous :



Mosaïque réalisée à partir de
3 carrés de couleur sur un côté



Mosaïque réalisée à partir de
4 carrés de couleur sur un côté

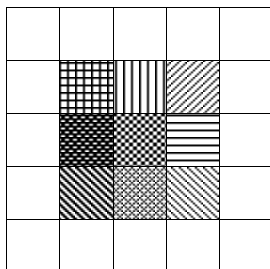
Antoine veut réaliser des mosaïques de différentes tailles. Pour prévoir le matériel, il cherche un moyen de calculer le nombre de carrés blancs dont il aura besoin à partir du nombre de carrés de couleurs qu'il veut mettre sur un côté de la mosaïque.

- 1) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 5 carrés de couleur sur un côté.
A l'aide du matériel, construisez cette mosaïque.
Combien de petits carrés blancs sont-ils nécessaires pour réaliser cette mosaïque?
.....
- 2) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 7 carrés de couleur sur un côté.
Cherchez cette fois un calcul qui lui permettra de trouver combien de carrés blancs sont nécessaires dans ce cas.
.....
- 3) Faites de même pour une mosaïque construite à partir de 32 carrés de couleur sur un côté.
.....
- 4) Trouvez un moyen qui permette de calculer, à chaque fois, le nombre de carrés blancs nécessaires pour réaliser une mosaïque, quel que soit le nombre de carrés colorés de côté.
.....
.....
.....
- 5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.
.....

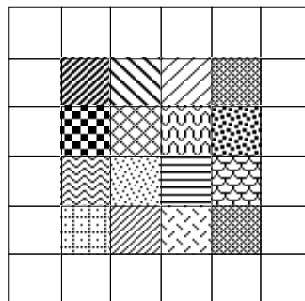
Partir des actions concrètes
des élèves sur le matériel

Antoine fait des mosaïques

Antoine veut réaliser des mosaïques carrées réalisées à partir de carrés, dont certains sont colorés et d'autres pas. Ces mosaïques sont de différentes tailles mais elles sont toutes produites sur le même modèle comme dans les exemples ci-dessous :



Mosaïque réalisée à partir de
3 carrés de couleur sur un côté



Mosaïque réalisée à partir de
4 carrés de couleur sur un côté

Antoine veut réaliser des mosaïques de différentes tailles. Pour prévoir le matériel, il cherche un moyen de calculer le nombre de carrés blancs dont il aura besoin à partir du nombre de carrés de couleurs qu'il veut mettre sur un côté de la mosaïque.

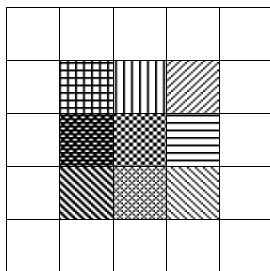
- 1) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 5 carrés de couleur sur un côté.
A l'aide du matériel, construisez cette mosaïque.
Combien de petits carrés blancs sont-ils nécessaires pour réaliser cette mosaïque?
.....
- 2) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 7 carrés de couleur sur un côté.
Cherchez cette fois un calcul qui lui permettra de trouver combien de carrés blancs sont nécessaires dans ce cas.
.....
- 3) Faites de même pour une mosaïque construite à partir de 32 carrés de couleur sur un côté.
.....
- 4) Trouvez un moyen qui permette de calculer, à chaque fois, le nombre de carrés blancs nécessaires pour réaliser une mosaïque, quel que soit le nombre de carrés colorés de côté.
.....
.....
.....
- 5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.
.....

Partir des actions concrètes
des élèves sur le matériel

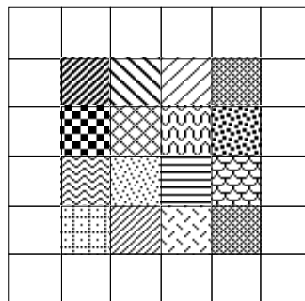
Focaliser l'attention des
élèves sur les opérations

Antoine fait des mosaïques

Antoine veut réaliser des mosaïques carrées réalisées à partir de carrés, dont certains sont colorés et d'autres pas. Ces mosaïques sont de différentes tailles mais elles sont toutes produites sur le même modèle comme dans les exemples ci-dessous :



Mosaïque réalisée à partir de
3 carrés de couleur sur un côté



Mosaïque réalisée à partir de
4 carrés de couleur sur un côté

Antoine veut réaliser des mosaïques de différentes tailles. Pour prévoir le matériel, il cherche un moyen de calculer le nombre de carrés blancs dont il aura besoin à partir du nombre de carrés de couleurs qu'il veut mettre sur un côté de la mosaïque.

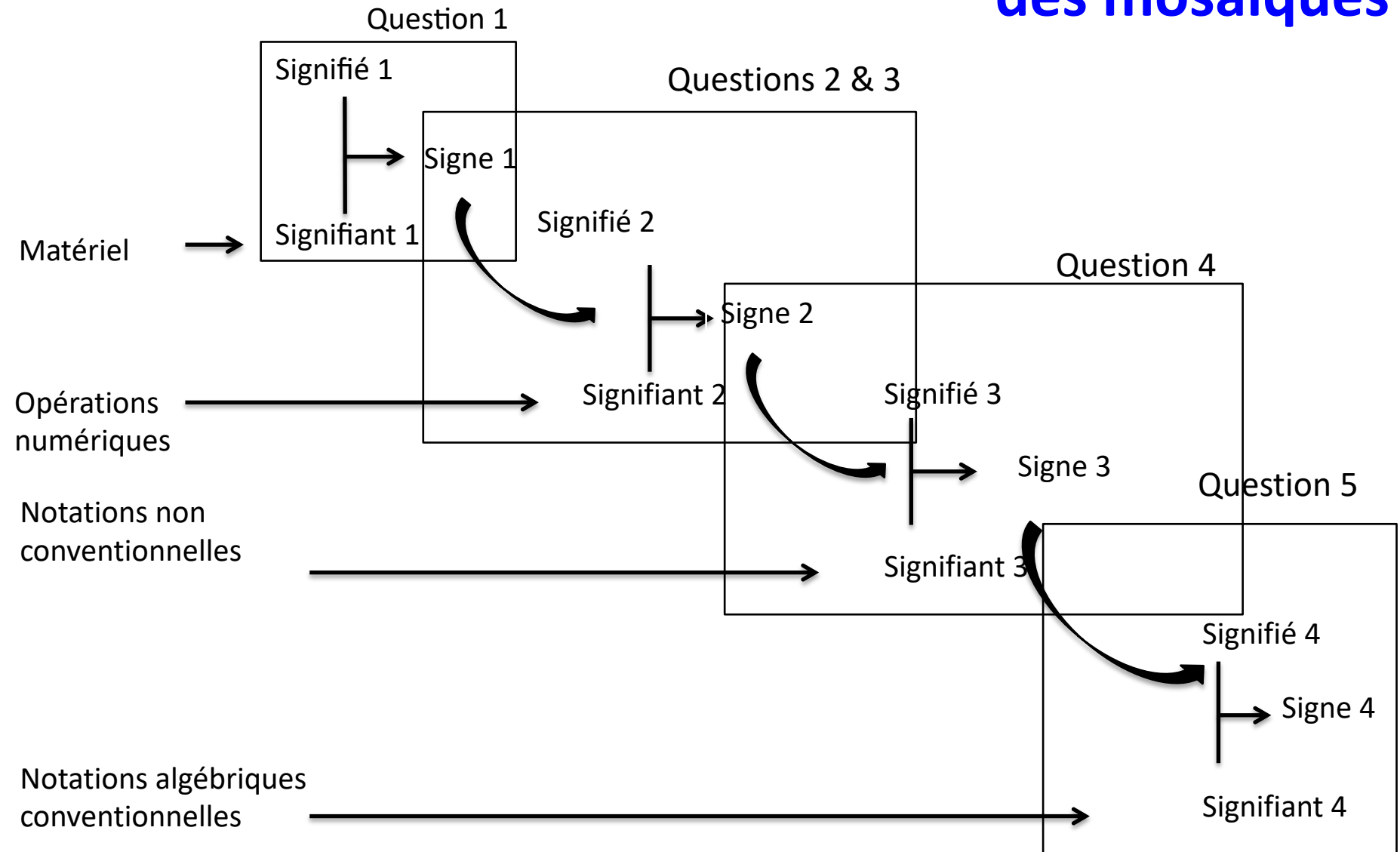
- 1) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 5 carrés de couleur sur un côté.
A l'aide du matériel, construisez cette mosaïque.
Combien de petits carrés blancs sont-ils nécessaires pour réaliser cette mosaïque?
.....
- 2) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 7 carrés de couleur sur un côté.
Cherchez cette fois un calcul qui lui permettra de trouver combien de carrés blancs
sont nécessaires dans ce cas.
.....
- 3) Faites de même pour une mosaïque construite à partir de 32 carrés de couleur sur
un côté.
.....
- 4) Trouvez un moyen qui permette de calculer, à chaque fois, le nombre de carrés
blancs nécessaires pour réaliser une mosaïque, quel que soit le nombre de carrés
colorés de côté.
.....
.....
.....
- 5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.
.....

Partir des actions concrètes
des élèves sur le matériel

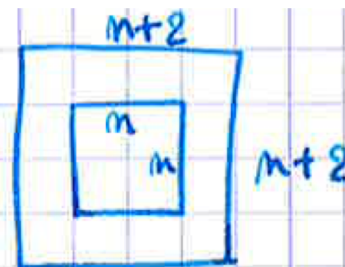
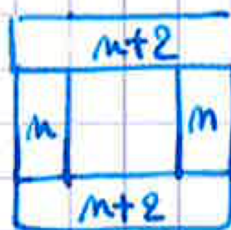
Focaliser l'attention des
élèves sur les opérations

Produire un message/une
expression avec un nombre
dont la valeur est non
déterminée.

Chaînes de signification dans l'activité "Antoine fait des mosaïques"



Démarches d'élèves



$$= (n+2)^2 - n^2$$

Cette diversité témoigne du potentiel de ces activités dans le développement de la pensée algébrique

car qui dit **diversité**, dit **comparaison des formules ou des opérations**,

=> possibilité de travailler le sens de l'égalité, des opérations, des techniques algébriques

Pensée algébrique

La pensée algébrique relève non pas de l'utilisation du symbolisme algébrique formel mais d'une manière particulière de penser :

1. Vision relationnelle de l'arithmétique (Carpenter, et al., 2005)

Considérer les opérations sous l'angle des relations et non plus en terme d'actions à accomplir pour obtenir un résultat

→ sens des opérations

→ sens de l'égalité

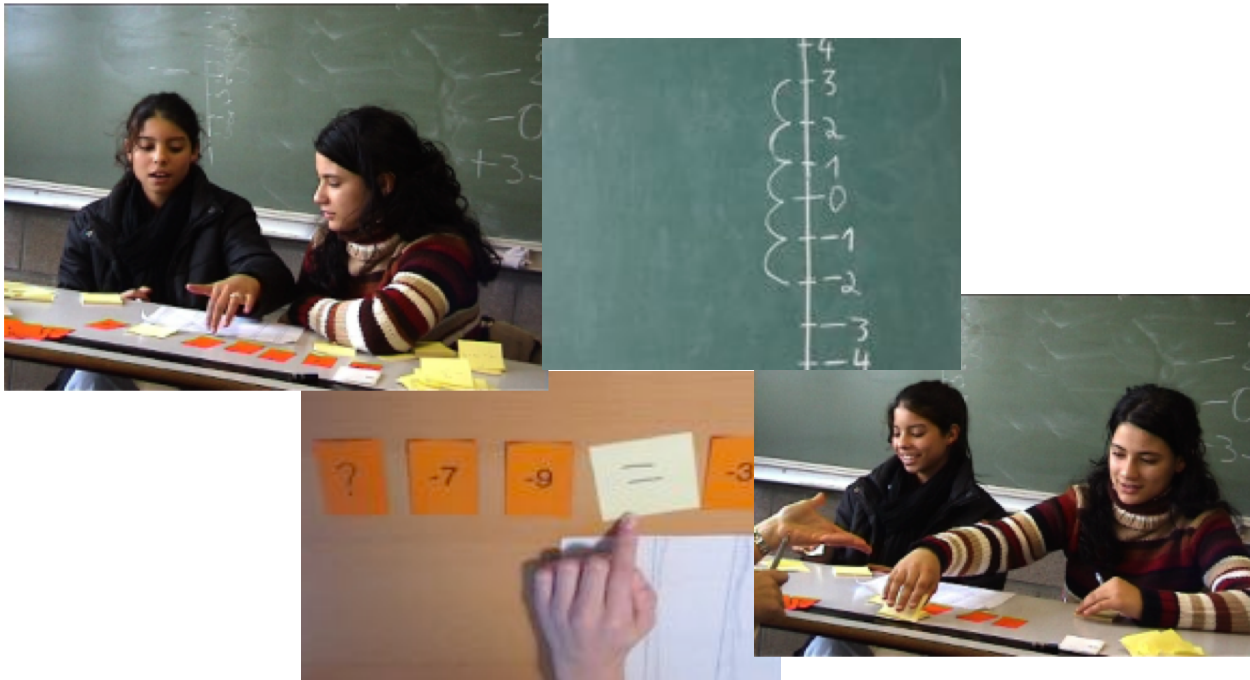
$$\text{ex : } 7 + 5 = ? + 9$$

2. Présence d'une indéterminée (Radford, 2014 et 2018)

Effectuer des opérations impliquant une indéterminée (un nombre inconnu)

$$\text{ex : nombre de carrés colorés} \times 4 + 4$$

4. L'exemple du signe "moins"



4. L'exemple du signe "moins"

4.1 Difficultés des élèves dans l'utilisation du signe "moins"



Le signe « moins »

Dans les équations, on observe des erreurs dans les opérations avec les négatifs (Vlassis, 2002) :

Handwritten student work showing errors in solving an equation. The work is written on a grid background. The equations are:

$$10x - 9 = 8x + 15$$

The student subtracts $10x$ from both sides, resulting in:

$$-9 = -2x + 15$$

The student then subtracts 15 from both sides, resulting in:

$$-6 = -2x$$

The student divides both sides by -2 , resulting in:

$$3 = x$$

Red circles highlight the constants -9 , -15 , and -6 . Red arrows indicate the operations: from -9 to -15 and from -15 to -6 . A large red arrow points from the final result $3 = x$ to the corrected work below.

Corrected student work showing the proper handling of negative signs. The equations are:

$$\begin{array}{l} -9 = -2 + 15 \\ -15 \end{array} \quad \begin{array}{l} -6 = -2x \\ -15 \end{array}$$

The constants -9 , -15 , and -6 are highlighted in green. The coefficients -2 and $-2x$ are highlighted in blue. Red vertical lines separate the two equations.

Difficultés des élèves dans les réductions polynomiales

Etude sur la base d'un test soumis en fin d'année, à 131 élèves de 2^e année secondaire générale (élèves de 13-14 ans) et d'interviews de 12 élèves

- ✓ Test composé, notamment, de réductions polynomiales (28)
- ✓ Polynômes de structure simple (= membre d'une équation)

ex : $20 + 8 - 7n - 5n$

Principales erreurs observées

- Raisonnement « parenthèses »

$$20 + 8 - (7n - 5n)$$

$$28 - 2n$$

$$28 - 12n$$

% réussite: 70%

- La règle des signes

$$6 - 5a - 3 - 4a$$

$$9 + 9a$$

$$3 - 9a$$

% réussite : 66%

- Prendre le signe qui suit

$$6y - 20 + 3y - 12$$

$$3y - 32 \text{ ou } 3y - 8$$

$$9y - 32$$

% réussite : 72%

Du concept de nombre négatif à l'utilisation du signe "moins"

- Origine des difficultés dans les opérations avec les négatifs souvent attribuée au concept de "négatif" :

Est-ce que c'est seulement une question de nombre négatif?

$$3 + 6x - 2$$

- Difficultés dans les opérations avec les entiers négatifs :
Concept de nombre négatif → Utilisation du signe « moins »

Autre difficulté

- Sens d'une expression littérale comme $3x$ ou $-4x$

La négativité

La négativité : modèle des différentes utilisations du signe "moins" en algèbre élémentaire

TRIPLE NATURE DU SIGNE "MOINS"		
UNAIRE	BINAIRE	SYMETRIQUE
Nombre-relatif Nombre-solution Nombre-résultat Nombre négatif formel	Soustraction arithmétique $7 - 4$ Soustraction algébrique $5a - 3a + 2$	Prendre l'opposé : - d'un nombre - d'une somme

(Vlassis, 2010)

Dans les réductions polynomiales

Dans notre étude, les erreurs viennent :

- de difficultés liées à **l'utilisation unaire** du signe « moins » (tendance à détacher le signe "-")

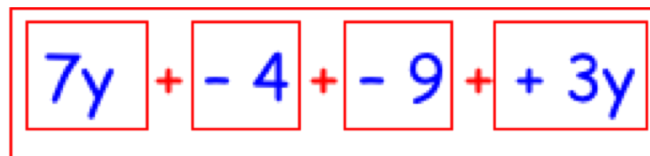
$$20 + 8 - 7n - 5n$$

- de difficultés à entrer dans un discours algébrique caractérisé par une utilisation flexible du signe « moins » (binaire et unaire)

$$6y - 20 + 3y - 12$$

- d'une incapacité à considérer le polynôme comme **une somme d'entités signées**

ex : $7y - 4 - 9 + 3y$


$$\boxed{7y} + \boxed{-4} + \boxed{-9} + \boxed{+3y}$$

Pour beaucoup d'élèves, on a: $\boxed{7y} - \boxed{4} - \boxed{9} + \boxed{3y}$

Technique pour aider les élèves à ne pas additionner des termes non semblables (Espace Math 2, p. 184)

$$= \underline{3a^2} - \underline{6ab} - \underline{8ab} - \underline{2b^2} - \underline{3a^2} + \underline{3b^2} + \underline{a^2} - \underline{6ab} + \underline{9b^2}$$

réduire l'expression

$$= \underline{a^2} - \underline{20ab} + \underline{10b^2}$$

4. L'exemple du signe "moins"

4.1 Difficultés des élèves dans l'utilisation du signe "moins"

4.2 Comment soutenir les élèves dans leur apprentissage du signe "moins": un exemple de séquence didactique



Activités et modèles possibles

- Les activités de généralisation,
- les problèmes (résolution par équations),
- Les modèle comme celui des gains/dettes ou des billes rouges/noirs
- ... la droite des nombres
- ... le thermomètre
- etc...

... peuvent constituer des contextes significatifs pour opérer dans les entiers et réduire des polynômes

Activités possibles

CEPENDANT,

- Dans les activités de généralisation, les opportunités de réaliser ces opérations ne sont pas si nombreuses.
- Dans des problèmes se résolvant par équations, les opérations avec les entiers se mêlent à d'autres difficultés.
- La droite des nombres ne fait pas nécessairement toujours sens auprès des élèves (les manipulations sont abstraites et hors contexte) et semblent sujette à controverses.
- Dans les problèmes classiques de dettes/gains ou de températures, les élèves contournent les opérations avec les entiers (Peled & Carraher, 2008)

Ex : Problème classique de T° : quelle différence de t° entre le mois d'août (20°) et le mois de janvier ($- 6^{\circ}$)?

Les élèves additionnent les valeurs absolues pour trouver la différence et ne font pas : $20 - (- 6) = 26$

Méthodologie

1. Prétest / post-test immédiat / post test différé

- Test : réductions polynomiales (12) / résolution d'équations (5)
- Post-test immédiat : quelques jours après l'expérimentation
- Post-test différé : 4 mois après

2. Etude exploratoire

3. Collecte des données

- Deux étudiantes de 2^e année du secondaire sélectionnées sur la base du pré-test (Réussite < 20%)
- 7 sessions de 30 minutes durant le temps de midi (video)



Objectifs de la séquence didactique

- Promouvoir une utilisation flexible du signe « moins » dans les réductions polynomiales.
- Reconnaître le polynôme comme une somme d'entités signées
- Donner du sens aux termes d'un polynôme en particulier aux termes littéraux ($-3a$)

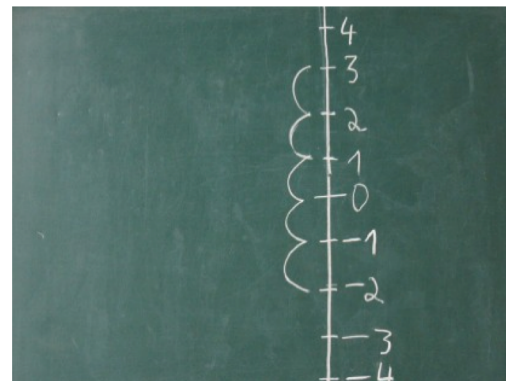
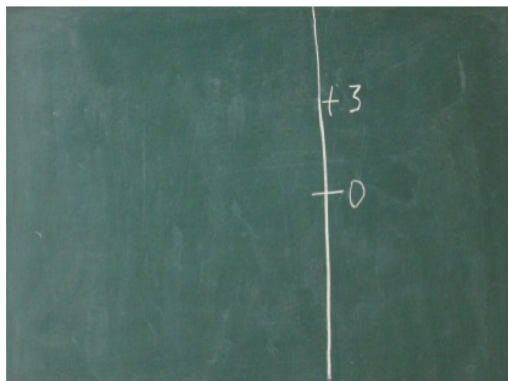
But final : Réduire des polynômes de manière significative

Principales étapes de la séquence

1. Additions d'entiers



Réappropriation de la droite des nombres



Principales étapes de la séquence

1. Additions d'entiers (suite)

$$+ 2$$

$$- 4$$

Et si on inversait les l'ordre des cartes, que deviendrait la réponse?

$$- 4$$

$$+ 2$$

E1 : Cela ne changera rien du tout

E2 : J'ai trouvé -6 (en réponse à $-4 + 2$) au début, mais parce que j'ai encore fait $4 + 2$ et j'ai mis le "moins" devant. C'est des trucs comme ça qu'on nous explique en classe.

Oui, dans certains cas, il faut le faire. Mais ici c'est tout simple, c'est dans ma tête : Je descends de 4 et je remonte de 2, OK, puis j'arrive à -2.

Que je fasse comme ça $(+2 - 4)$ ou que je fasse comme ça $(-4 + 2)$. C'est le même calcul.

Principales étapes de la séquence

2. Résoudre des équations (1^{re} partie)

Méthodes utilisées par les élèves pour trouver un nombre inconnu

- Essais et erreurs

$+3$	$?$			-5
------	-----	--	--	------

- Essais et erreurs

$+3$	$?$	$?$	$=$	-5
------	-----	-----	-----	------

3. Résoudre des équations (2^e partie)

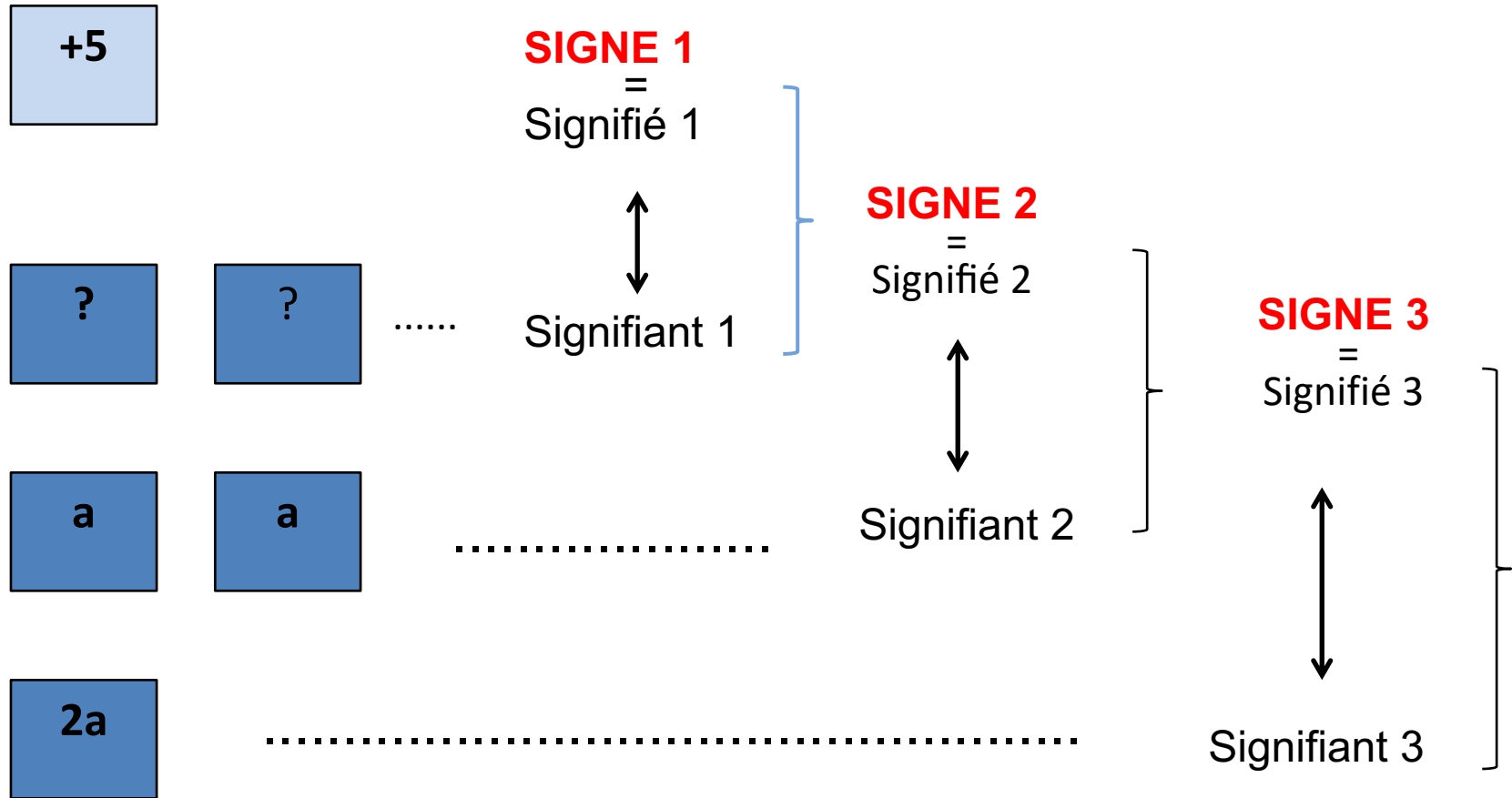
- Essais et erreurs

$+3$	a	a	$=$	-5
------	-----	-----	-----	------

- Diviser par 2

$+3$	$2a$		$=$	-5
------	------	--	-----	------

Chaîne de signification d'un terme littéral à l'aide de cartes



Principales étapes de la séquence

4. Produire et résoudre une équation sans le support des cartes

– Produire une équation : $-1 \boxed{2}x = -15$

→ Quel signe devant $2x$?

– Résoudre une équation : $2 - y = 20$ ($y = -18$)

Difficulté à distinguer le « moins » devant la solution du
« moins » devant y

Objectif en phase 4 : donner du sens au terme littéral

**Nombreux aller et retour entre le numérique et le
littéral**

Principales étapes de la séquence

5. Réduire des polynômes

- Comparer 2 expressions

$$-10 + 4 + a + a + a = \text{ou} \neq a + a + a - 10 + 4$$

- Produire une expression égale à une autre et justifier

$$-10 + 4 + a + a + a = -6 + 3a \text{ (solution de E1)}$$

$$= 4 + a + a + a - 10 \text{ (solution de E2)}$$

- Réduire des polynômes

Réduire des polynômes :

Trouver une expression égale et non plus trouver la « réponse »

Résultats des tests

	POLYNOMES /12			EQUATIONS /5		
	Pré	Post 1	Post 2	Pré	Post 1	Post 2
E1	2	11	11	1	3	4
E2	2	11	11	1	3	1
Moyenne classe	7	6	7,7	2,6	3	3,4

$$8 - 9b - 5 - 6b = -15b + 3$$

Evolution du discours

Un discours argumenté :

1. Sens des opérations avec les entiers sur la base de la droite des nombres (DN)
2. Sens des signes « plus » et « moins » (DN) : le signe « moins » indique qu'on se trouve en-dessous et qu'on doit descendre
=> flexibilité non seulement dans les réductions polynomiales mais également dans le discours
3. Commutativité
4. Sens d'une expression littérale
5. Sens des réductions des polynômes

Conclusions

- Le modèles de la DN co-construit avec les élèves semble avoir montré une certaine efficacité avec deux élèves faibles.
- Ayant participé à leur émergence, elles en ont perçu le sens et le fonctionnement.
- Les discussions leur ont permis de faire le lien entre les actions sur les modèles et les opérations algébriques visées.

4. Conclusions générales

Amener les élèves vers l'abstraction en mathématique requiert une mathématisation progressive.

Celle-ci consiste à :

- partir d'activités de résolution de problèmes ou de situations qui posent question aux élèves
- et envisager une progression dans ces activités
- ... pour créer la nécessité d'évoluer vers davantage d'abstraction parallèlement à des symbolisations de plus en plus formelles
- ancrer les apprentissages dans les actions de résolution posées par les élèves

Veiller à développer à la fois une progression dans les concepts en relation avec le sens des symboles

MERCI DE VOTRE ATTENTION

Symboliser et conceptualiser, un double processus au coeur des apprentissages mathématiques

L'exemple du symbole “moins”

Joëlle Vlassis

Université du Luxembourg

CREM – Nivelles, le 22 mars 2019