Commençons la séance par trois expériences.

Un tour ou deux tours ?

Un exercice de gymnastique montre

un tour complet $\neq$ deux tours complets !?

Comment "expliquer" cela ?

"La géométrie est une partie de la physique." (Paul Libois)

Images dans un miroir

L'image dans un miroir

échange gauche et droite,

mais

n'échange pas haut et bas.

Pourquoi ?

Ombres de figures

L’ombre au soleil

d’un cercle	n’est pas toujours	un cercle;
d’une ellipse	est toujours	une ellipse;
d’un carré	n’est pas toujours	un carré;
d’un parallélogramme	est toujours	un parallélogramme.

Les notions géométriques se différencient.

Une explication mathématique ?

Une seule géométrie ?

JEAN-PAUL DOIGNON
Université Libre de Bruxelles
doignon@ulb.ac.be

A la mémoire de PAUL LIBOIS (1901–1991)

Exposé au CREM le 10 novembre 2017

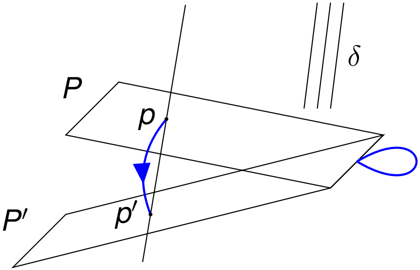
Projections

Les ombres au soleil amènent à trier les notions géométriques en

non résistantes	résistantes
cercle	ellipse
carré	parallélogramme
	droite
triangle équilatéral	triangle

Formalisons à présent "ombre au soleil".

Dans l'espace, soit P et P' deux plans et
δ direction de droites parallèle ni à P ni à P'.



Définition (projection parallèle)

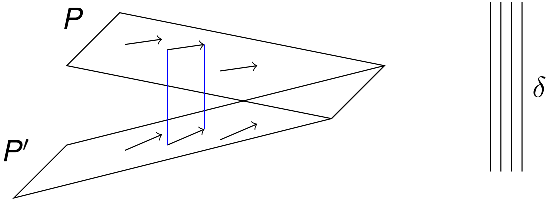
La projection parallèle du plan P sur le plan P', de direction δ, envoie le point p de P sur le point p' de P' tel que

$p' = p$ si $p \in P \cap P'$,

sinon la droite pp' est dans la direction δ.

Le point p' est univoquement déterminé par le point p.
L'application de P sur P' est bijective.

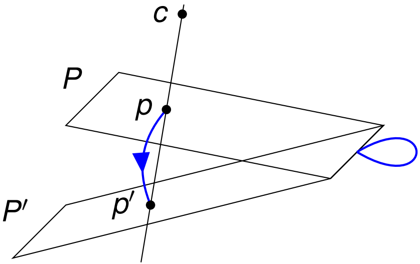
Nous pouvons aussi projeter des transformations,
par ex. une translation :



non résistantes	résistantes
rotation	translation
symétrie orthogonale	homothétie
	'affinité'

Observons à présent des ombres créées par un point lumineux.

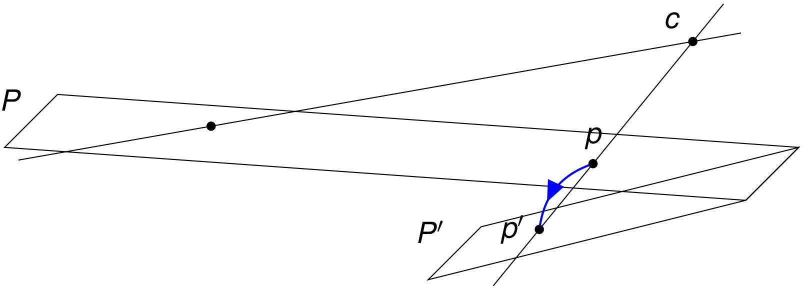
Dans l'espace usuel, soit c un point,
P et P' deux plans évitant c.



Définition (projection centrale)

La projection centrale du plan P sur le plan P' à partir du centre c envoie le point p de P sur le point p' intersection du plan P' et de la droite cp.

… MAIS …



Le point image p'

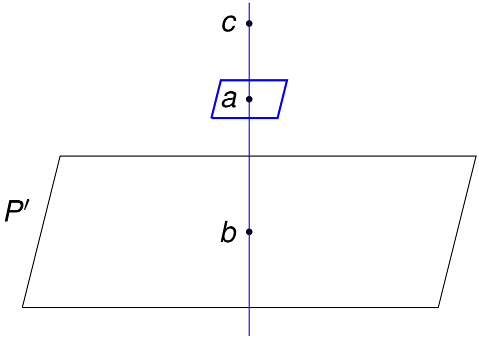
n'existe pas si la droite cp est parallèle au plan P' (ou alors...),

sinon est univoquement déterminé par le point p.

Nous reviendrons sur cette question.

Exercice

Quand la projection centrale d'un carré est-elle encore un carré ?



L’image par une projection centrale de

une ellipse	n’est pas toujours	une ellipse;
une parabole	n’est pas toujours	une parabole;
une conique ovale	est toujours	une conique ovale;
un carré	n’est pas toujours	un carré;
un parallélogramme	n’est pas toujours	un parallélogramme,
un “quadrilatère”	est toujours	un “quadrilatère”.

Une conique ovale est soit une ellipse, soit une parabole, soit une hyperbole.

Un “quadrilatère” est une figure formée de quatre points a, b, c et d et des quatre droites ab, bc, cd, da (pas nécessairement convexe).

Exercice

Réaliser une photo de montgolfière qui soit un morceau d’hyperbole.

Une notion qui résiste aux projections centrales résiste aussi aux projections parallèles.

Exercice

Montrer que toute projection parallèle est produit de deux projections centrales.

Les notions géométriques $_{\text{planes}}$ se trient en résistantes aux projections

ni parallèles ni centrales	parallèles mais pas aux centrales	centrales
cercle	ellipse	conique ovale
triangle équilatéral	triangle	“triangle”
carré	parallélogramme	“quadrilatère”
		“droite”

Pour les “droites”, nous y reviendrons.

Proposition

Pour une permutation des points d'un plan P, sont équivalents :

(a) être un produit de projections parallèles (utilisant des plans intermédiaires);

(b) conserver les droites (c.-à-d., appliquer toute droite sur une droite);

(c) dans un système de coordonnées, admettre une description analytique de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},$$

autrement dit

$$\begin{cases} x' = a\,x + b\,y + p \\ y' = c\,x + d\,y + q \end{cases}$$

où a, b, c, d, p et q sont des réels fixés tels que $a\,d - b\,c \neq 0$.

Définition

Une telle permutation est une permutation affine ou affinité du plan.

Proposition

Les affinités du plan forment un groupe pour la composition, c.à-d. :

1.- la permutation identique est une affinité;

2.- la composée de deux affinités est encore une affinité;

3.- la permutation réciproque d'une affinité est encore une affinité.

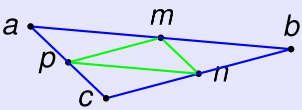
Proposition

Le groupe des affinités du plan agit transitivement sur

- les points;
- les droites;
- les triangles;
- les parallélogrammes.

Trois problèmes de l'Olympiade

Exercice (OMB, éliminatoire miNi, 1986)



Si m, n, p sont les milieux des segments $[a,b]$, $[b,c]$, $[c,a]$, le rapport des aires du triangle mnp et du triangle abc vaut

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, autre réponse.

Exercice (OMB, demi-finale miNi, 1993)

Notons g le centre de gravité du triangle abc. La droite ag coupe bc en a'. Le rapport des aires des triangles $ga'c$ et abc vaut

$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$.

Exercice

Tout parallélogramme est-il inscriptible à une ellipse ?

Et les projections centrales ?

Plus compliqué, avec

- les points à l'infini,
- les coordonnées homogènes.

Il en résulte aussi un groupe, le groupe des ‘projectivités’ du plan.

Trois expériences

Projections parallèles et centrales

Enseigner la géométrie

Enseigner la géométrie :
observation du monde physique,
apprentissage d'une théorie formelle.

La géométrie basée sur l'observation requiert un minimum de formalisation :

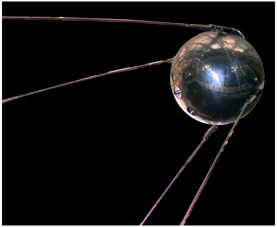
1. définitions de concepts de base
   point(?), droite, mesure d'angle, ...
2. axiomes, postulats
   par deux points passe une et une seule droite, ...
3. définitions, constructions, théorèmes, etc.
4. nouvelles définitions, nouveaux théorèmes, etc.
   carré, pentagone régulier, ...
5. etc.

Premier exemple connu : EUCLIDE, *Les Eléments*
(sans doute écrit à Alexandrie vers -300).

L'enseignement de la géométrie a été et reste en grande partie basé sur les *Eléments* d'EUCLIDE.

1. Un point est ce dont il n'y a aucune partie.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.

Pourquoi et comment cet enseignement a-t-il évolué ?



En résumant—très outrageusement—en deux points :

- le spoutnik (lancé le 4 octobre 1957);
- JEAN DIEUDONNÉ : “A bas Euclide !”, “Mort aux triangles !”

  (Séminaire de Royaumont, du 23 novembre au 4 décembre 1959, organisé par l’OECE, futur OCDE)

  Réponse d’EMMA CASTELNUOVO :

  “Vous, les Français, sans le triangle,
  votre tour Eiffel n’existerait pas !”.

Sur l’histoire de l’enseignement de la géométrie,
il y aurait énormément à dire.

Un excellent résumé :

- E. BARBIN and G. MENGHINI, History of teaching geometry. In *Handbook on the History of Mathematics Education* (2014), éds A. KARP et G. SCHUBRING.

Grand rôle de Belges dans les réformes au XXème siècle :

- ▷ WILLY SERVAIS;
- ▷ PAUL LIBOIS;
- ▷ GEORGES et FRÉDÉRIQUE PAPY;
- ▷ …

- G. VANPAEMEL, Belgian contributions to the New Math movement in Europe. Paper presented at 8th STEP[1] Meeting - Corfu (2012).
- G. VANPAEMEL, D. DE BOCK et L. VERSCHAFFEL, Willy Servais … *Losanges* 23(2013), 20–27.
- D. DE BOCK et G. VANPAEMEL, A bas Euclide ! *Losanges* 3(2015), 25–35.

[1] Science and Technology in the European Periphery

Axiomatiques de la géométrie plane classique

Tri des notions fondamentales et axiomes, par exemple :

géométrie affine plane	**géométrie euclidienne plane** *ajouter* :
point, droite, rapport de section	distance, (mesure d'angle)
par deux points une seule droite etc.	inégalité triangulaire, égalité si ...

Dans l'enseignement supérieur :

espace vectoriel réel euclidien.

Remarque. Requiert $\mathbb{R}, +, \cdot$!?

Faut-il enseigner les axiomatiques ?

Jean Dieudonné à Royaumont : Non, sauf peut-être à partir de 17 ans.

“… on ne peut développer avec fruit une théorie mathématique sous la forme axiomatique que lorsque l’étudiant s’est déjà familiarisé avec la question à laquelle elle s’applique, en travaillant pendant un certain temps sur une base expérimentale, ou semi-expérimentale, c’est-à-dire *en faisant constamment appel à l’intuition*.”

“Pour ma part, je ne vois pas ce qu’il y a de mal ou de déshonorant à partir d’une prémisse qui n’est pas un axiome, mais qui peut être un énoncé très compliqué, pourvu que l’on puisse démontrer sans faute logique que l’énoncé en question en implique un autre; non seulement cela serait beaucoup plus instructif, mais cela montrerait sous son vrai jour la nature de la déduction logique et son caractère *relatif*, trop souvent voilé par la façon dont on l’embrouille avec la notion métaphysique de vérité.”

Trois expériences

Projections parallèles et centrales

Enseigner la géométrie

Faut-il enseigner les axiomatiques ?

Un mot sur la géométrie projective

Les points à l'infini

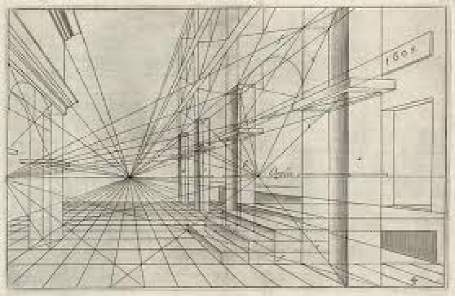
Débuts de la perspective avec

FILIPPO BRUNELLESCHI (1377–1446)

et PAOLO DAL POZZO TOSCANELLI (1397–1482),

puis LEON BATTISTA ALBERTI (1404–1472), ...

PAUL VREDEMAN DE VRIES (1567–1617?)



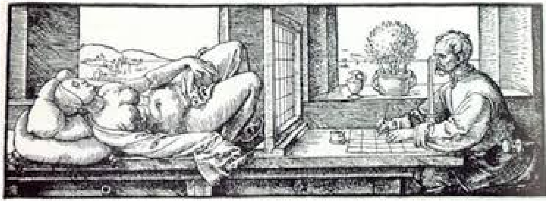
L'image des droites d'une direction donne

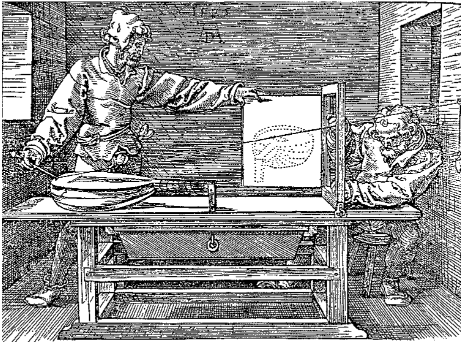
soit des droites d'une direction (par ex., les verticales),

soit des droites concourantes en un point de fuite.

Le dessin résulte bien d'une projection centrale :

ALBRECHT DÜRER (1471–1528)





JEAN-VICTOR PONCELET (1788–1867)
(pendant sa captivité à Saratov en Russie de mars 1813 à juin 1814)
étudie les notions projectives (résistantes aux projections centrales).

Définition (plan projectif)

Le plan projectif s'obtient à partir du plan affin en

- ajoutant un nouveau point par direction de droites
  (un tel point est commun à toutes les droites de la direction),
- décidant que les nouveaux points forment une nouvelle droite.

(oublier la distinction entre les anciens et nouveaux points !)

Ce n'est pas la définition la plus élégante mathématiquement.
Et je simplifie beaucoup.

J. GRAY, *Worlds Out of Nothing: a course in the history of geometry in the 19th century*. Springer, 2007.

Voici la définition (simplifiée ici) due à Felix Klein vers 1873.

Définition (plan projectif)

Le plan projectif a pour
- "point" une droite de l'espace usuel passant par l'origine o;
- "droite" l'ensemble des "points" contenus dans un plan fixé par o.

Equivalence des deux définitions du plan projectif (voir tableau).

Karl von Staudt (1798–1867) et Felix Klein (1849–1925) conçoivent une axiomatique du plan et de l'espace projectifs.

Proposition

Dans le plan projectif,
deux points appartiennent à exactement une droite commune;
deux droites contiennent exactement un point commun.

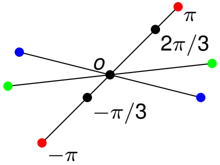
Cet exemple de la dualité point-droite dans le plan projectif
illustre l'intérêt de la géométrie projective.

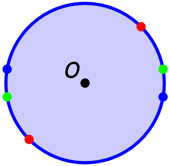
Un tour diffère de deux tours

Travaillons dans l'espace usuel,   avec un point origine *o* fixé :

- toute position de la main est image d'une position initiale par un déplacement[2] fixant *o*;
- une rotation autour d'une droite par *o* est un déplacement fixant *o*,   et réciproquement.

Représentons les deux rotations d'angle $\pm\alpha$ par les deux points à distance α de *o* sur l'axe de la rotation (ici $0 \leq \alpha \leq \pi$) :





(à voir en 3D)

mais attention :   il faut rendre identiques les deux points à distance π !

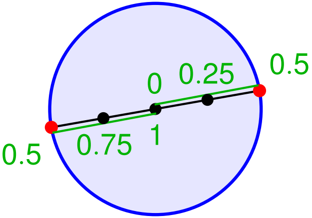
[2] permutation des points de l'espace conservant les distances et l'orientation

Faire un tour, c'est réaliser les rotations d'angles

$t\,(2\,\pi)$, pour t de 0 à 1,

ou mieux

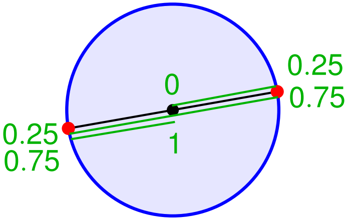
$$\begin{cases} t\,(2\,\pi), & \text{pour } t \text{ de } 0 \text{ à } 0.5, \\ (t-1)\,(2\,\pi), & \text{pour } t \text{ de } 0.5 \text{ à } 1 \end{cases}$$



c.-à-d. parcourir une fois la ɘtiorb;

faire deux tours, c'est réaliser les rotations d'angles

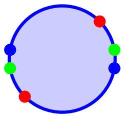
$t\,(4\,\pi)$, pour t de 0 à 1



c.-à-d. parcourir deux fois la ɘtiorb.

Expliquons la ɘtiorb et la différence entre un et deux tours,

mais en dimension 2 plutôt que 3.



Le disque, après identification des points opposés de son bord,
est topologiquement (du point de vue caoutchouc)
un plan projectif.

Dans le plan projectif,

- ▷ parcourir une fois une droite donne un chemin qui ne peut être ramené continûment en un point;
- ▷ parcourir deux fois une droite donne un chemin qui peut être ramené continûment en un point.

📖 E.D. BOLKER, The spinor spanner.
The American Mathematical Monthly 80(1973), 997–984,

📖 A. JURISIC, The Mercedes knot problem.
The American Mathematical Monthly 103(1996), 756–770

et aussi chercher sur youtube   “(Dirac) belt trick”.

Trois expériences

Projections parallèles et centrales

Enseigner la géométrie

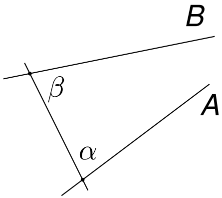
Faut-il enseigner les axiomatiques ?

Un mot sur la géométrie projective

Deux mots sur les géométries non-euclidiennes

La longue histoire du cinquième postulat d'EUCLIDE

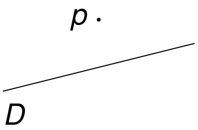
Enoncé original :



si $\alpha + \beta < 180°$,

alors les droites *A* et *B* se coupent.

Formulation équivalente due à JOHN PLAYFAIR (1748–1819) :



par un point *p* extérieur à une droite *D* passe exactement une droite parallèle à la droite donnée.

Le cinquième postulat se déduit-il des autres hypothèses ?

Beaucoup d'essais de preuve de la réponse négative, par l'absurde : en niant le cinquième postulat, on cherche à déduire une absurdité.

Par exemple, GIOVANNI SACCHERI (1667–1733) conclut par

> "... car cela répugne à la nature de la ligne droite."

Implicitement, étude d'une géométrie non-euclidienne
(la condition de PLAYFAIR n'est pas vraie car plusieurs parallèles).

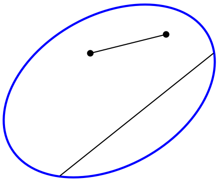
CARL FRIEDRICH GAUSS (vers 1817, sans oser publier),
JÁNOS BOLYAI (en 1823, publié en 1825),
NIKOLAI LOBACHEVSKI (en 1823, publié en 1829)
développent une telle géométrie.

EUGENIO BELTRAMI (en 1868) et FELIX KLEIN (en 1871) :
l'existence du plan euclidien implique celle du plan non-euclidien, et réciproquement.

Modèle de KLEIN

Définissons les

“points” comme étant les points à l’intérieur d’une ellipse fixée,



“segments” comme les segments usuels,

“droites” comme les restrictions non vides des droites usuelles.

La condition de PLAYFAIR n’est pas satisfaite.

Remarque. Il faut encore définir une distance, la mesure d’angles, etc.

Une autre géométrie non-euclidienne

En 1854, Bernhard Riemann conçoit une géométrie sans droites parallèles

(elle ne satisfait donc pas la condition de Playfair).

Sur la sphère, nous avons des segments et des grands cercles.

Deux points p et q déterminent un unique segment et un unique grand cercle…

… sauf si p et q sont diamétralement opposés.

Appelons “point” une paire de points opposés sur la sphère et “droite” l’ensemble de ces paires sur un grand cercle fixé.

“Points” et “droites” forment un plan projectif.

Nous avons en plus une distance.

Il en résulte une autre géométrie non-euclidienne.

Implications philosophiques et pédagogiques

Baser l'enseignement sur l'observation du monde physique est ...
... risqué.

POINCARÉ (1854–1912) : “Une géométrie ne peut être plus vraie qu'une autre, elle peut simplement être plus commode.”

Des physiciens introduisent ensuite d'autres notions d'espace :

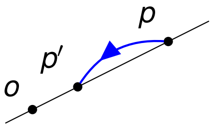
- relativité restreinte, avec 4 dimensions (ALBERT EINSTEIN, 1905);
- relativité générale, avec 4 dimensions(ALBERT EINSTEIN, 1915);

- espace des cordes vibrantes (10 ou 11 dimensions, YOICHIRO NAMBU, HOLGER NIELSEN et LEONARD SUSSKIND, 1970, puis MICHAEL B. GREEN, JOHN H. SCHWARZ, etc.);
- espace des membranes vibrantes (EDWARD WITTEN, 1995);
- etc.

L. MLODINOW,
Euclid's Window: the story of geometry from parallel lines to hyperspace.
Free Press, 2001; Penguin, 2002.

Les inversions et la géométrie conforme

Soit o un point du plan euclidien et k un réel strictement positif.



$$|op| \cdot |op'| = k$$

Définition (inversion)

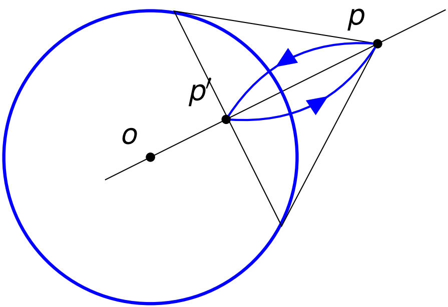
L'inversion de pôle o et de puissance k (avec $k > 0$) envoie tout point p distinct de o sur le point p' tel que

- o, p et p' sont alignés,
- $|op| \cdot |op'| = k$,
- p et p' sont du même côté de o.

Cette inversion envoie donc p' sur p (elle est involutive), et fixe les points à distance $\sqrt{k}$ du point o.

Il est naturel d'ajouter un point au plan euclidien, ∞,
et de décider que l'inversion échange o et ce point.

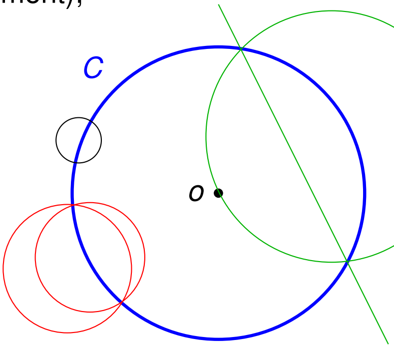
Toute inversion du plan euclidien complété (par le point ∞) est déterminée par son cercle de points fixes.



Le point ∞ appartient à chaque droite, mais à aucun cercle.

L'inversion de cercle C de points fixes et pôle o envoie

- toute droite complétée contenant o sur une droite complétée contenant o;
- toute droite complétée évitant o sur un cercle par o (et réciproquement);



- tout cercle évitant o sur un cercle évitant o;
- renverse l'orientation du plan;
- respecte les |mesures| d'angles entre droites/cercles.

Appelons cycle un cercle ou une droite complétée par ∞.

Par rapport aux inversions, les notions de géométrie sont

non résistantes	résistantes
droite cercle	'cycle'
segment de droite	'arc de cycle'
	$\lvert$mesures$\rvert$ d'angle

Les notions résistantes sont dites conformes.

Définition (plan conforme)

Le plan conforme est le plan euclidien complété par le point ∞, structuré par l'ensemble des cycles.

On oublie la distinction entre les anciens points et le nouveau point.

Il faudrait encore ajouter la mesure d'angle.

Et le miroir ?

L'image dans un miroir échange gauche et droite,

mais pas haut et bas. Pourquoi ?

Dans l'explication, distinguer objets 2D et objets 3D

et tenir compte des effets psychologiques.

Voir

BURKARD POLSTER (The Mathologer),

"Why do mirrors flip left and right but not up and down?"

https://www.youtube.com/watch?v=o_D-HsMOYQ8

Conclusions

Nombreuses géométries :

- projective;
- affine;
- euclidienne;
- non-euclidiennes;
- conforme;
- relativité restreinte (4 dimensions);
- relativité générale (4 dimensions);
- espace des cordes, espace des membranes;
- etc.

L'élève ne doit pas nécessairement les rencontrer,
mais l'enseignant devrait connaître au moins leur existence.

Merci de votre intérêt !