Enseigner les mathématiques à l'aide de l'ordinateur :

un échange de pratiques et l'exemple d'ALEKS

JEAN-PAUL DOIGNON

Université Libre de Bruxelles

doignon@ulb.ac.be

Exposé au CREM le 21 avril 2017

Evaluation automatique des connaissances

L'objectif fixé (il y a 33 ans) par JEAN-CLAUDE FALMAGNE[1] :

> *un système automatisé d'enseignement des mathématiques de l'école (et d'autres sujets : chimie, business, . . .)*
>
> *basé sur un module d'évaluation des connaissances.*

A chaque instant, l'ordinateur devrait connaître

ce que l'élève maîtrise,

ce que l'élève est prêt à apprendre.

Des questions de mathématique (combinatoire et/ou probabiliste) ont été résolues, d'autres restent ouvertes.

[1]Docteur en psychologie (ULB), professeur à la New York University puis à University of California, Irvine

Un résultat concret : ALEKS

ALEKS (Assessment and Learning in Knowledge Spaces)

désigne un produit commercial

formé de cours en ligne accessibles sur le web,

qui a été utilisé par des millions d'utilisateurs

du jardin d'enfants au douzième niveau ("K-12"),

et dans des cours de remédiation à l'entrée à l'université[2].

Aleks Inc. (Irvine, CA) fondée en 1996 par cinq fondateurs dont le président Jean-Claude Falmagne,

a eu jusqu'à 160 employés

et a été vendue en 2013 à McGraw-Hill.

---

[2] plus de 2. 400. 000 en 2016, dont
primaire : ±10% secondaire : ±50%, supérieur : ±40%.

Le contexte

Les fondements combinatoires

(Les géométries convexes)

Les aspects probabilistes et la procédure d'évaluation

Conclusions

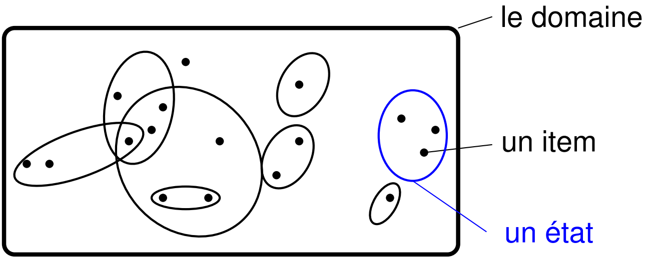
Le point de vue général

Un champ de connaissance,

par exemple l'arithmétique élémentaire,

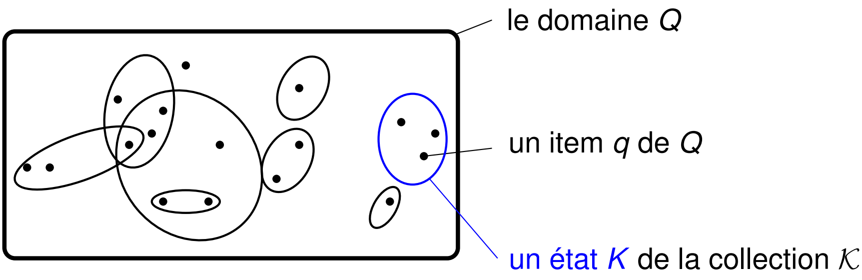
est un ensemble d'items (= questions, problèmes, notions, ...).

L'état de connaissance d'un étudiant est le sous-ensemble des items qu'il maîtrise.



La collection de tous les états possibles de connaissance structure le champ de connaissance.

Les structures de connaissance



Définition

Une structure de connaissance est formée par

- le domaine, un ensemble fini d'items, noté Q, et
- une collection de sous-ensembles du domaine, appelés états de connaissance, notée $\mathcal{K}$.
  Nous supposons $\varnothing \in \mathcal{K}$ et $Q \in \mathcal{K}$.

Notation : $(Q, \mathcal{K})$.

Qu’est-ce que “évaluer” dans une structure de connaissance ?

Une structure de connaissance $(Q, \mathcal{K})$ a été établie,
de domaine Q (ensemble d’items) et
de collection $\mathcal{K}$ d’états (possibles) de connaissance.

Evaluer les connaissances actuelles d’un étudiant signifie (a priori)
déterminer quel état de connaissance (élément de $\mathcal{K}$) est formé des items que l’étudiant maîtrise à ce moment.

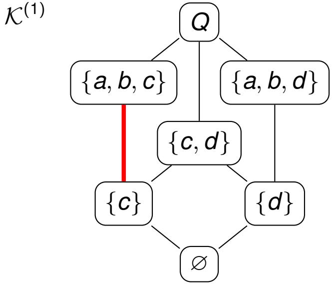
Pour cela, le système invite de manière répétée l’étudiant à résoudre
un item de Q et vérifie si la réponse fournie est correcte.

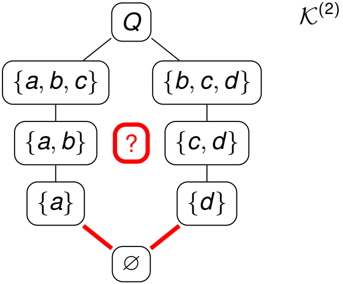
Un système efficace trouvera l’état après avoir testé peu d’items :
importance d’un bon choix des items posés et des inférences.

Irréalisable si tous les sous-ensembles de Q sont des états de
connaissance ! Il faut particulariser la collection d’états.

Deux exemples inadéquats de structures

Le domaine est chaque fois $Q = \{a, b, c, d\}$.





Ces deux exemples contredisent la progressivité de l'apprentissage.

Les espaces d'apprentissage (1/2)

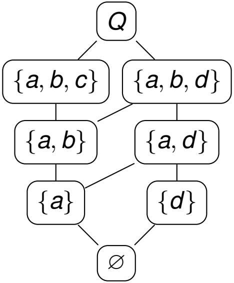
Définition

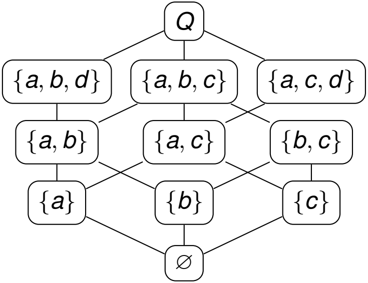
Un espace d'apprentissage $(Q, \mathcal{K})$ est une structure de connaissance satisfaisant

(i) $\mathcal{K}$ est accessible: $\forall K \in \mathcal{K} \setminus \{\varnothing\},\ \exists q \in K :\ K \setminus \{q\} \in \mathcal{K}$;

(ii) $\mathcal{K}$ est $\cup$-cohérent:
$\forall q, r \in Q,\ \forall K \in \mathcal{K} :\ \big(K \cup \{q\},\ K \cup \{r\} \in \mathcal{K}\big) \implies K \cup \{q, r\} \in \mathcal{K}$.

$\mathcal{K}^{(1)}$

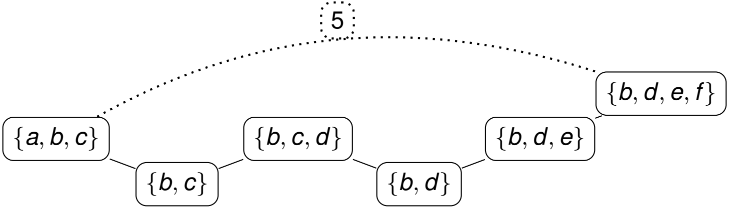




$\mathcal{K}^{(2)}$

Beaucoup d'autres conditions sont équivalentes à (i) et (ii).

Les espaces d'apprentissage (2/2)



Proposition (Cosyn and Uzun, 2009; Korte, Lovász and Schrader, 1991)

(i) *et* (ii) *ci-dessus sont équivalents à*

- (i') $\mathcal{K}$ *est stable pour l'union;*
- (ii') $\mathcal{K}$ *est bien gradué:* $\forall K, L \in \mathcal{K},\ \exists K = K_0, K_1, \dots, K_h = L$ *avec* $h = |K \triangle L|$ *et* $|K_{i-1} \triangle K_i| = 1$*, pour* $1 \leq i \leq h$.

(i') se rencontre beaucoup en math, sous sa forme duale;

(ii') facilite l'exploration de la collection des états admissibles.

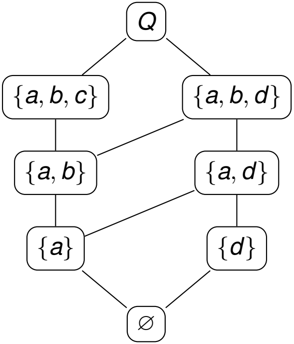
Les franges (1/2)

Soit $(Q, \mathcal{K})$ une structure de connaissance, et K un état ($K \in \mathcal{K}$).

Définition

La frange interne de K est $\quad K^{\mathcal{I}} = \{\, q \in K \,|\, K \setminus \{q\} \in \mathcal{K} \,\}$;

La frange externe de K est $\quad K^{\mathcal{O}} = \{\, q \in Q \setminus K \,|\, K \cup \{q\} \in \mathcal{K} \,\}$.



$\{c, d\} \;\Diamond\; \varnothing$

$\{c\} \;\Diamond\; \{d\}$ $\qquad$ $\{b, d\} \;\Diamond\; \{c\}$

$\{b\} \;\Diamond\; \{c, d\}$ $\qquad$ $\{a, d\} \;\Diamond\; \{b\}$

$\{a\} \;\Diamond\; \{b, d\}$ $\qquad$ $\{d\} \;\Diamond\; \{a\}$

$\varnothing \;\Diamond\; \{a, d\}$

Les franges (2/2)

Interprétations pour un état K :

la frange interne $K^{\mathcal{I}} = \{ q \in K \mid K \setminus \{q\} \in \mathcal{K} \}$
contient les items “les plus difficiles” qu'un étudiant dans l'état K “vient d'apprendre”;

la frange externe $K^{\mathcal{O}} = \{ q \in Q \setminus K \mid K \cup \{q\} \in \mathcal{K} \}$
contient les items qu'un étudiant dans l'état K est prêt à apprendre.

Proposition

Dans un espace d'apprentissage $(Q, \mathcal{K})$*, chaque état est déterminé par le couple de ses franges.*

Le rapport fourni par `ALEKS` après une session repose sur les franges.

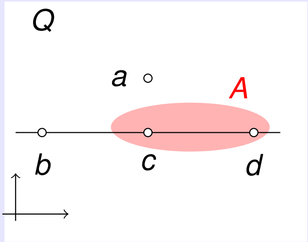
J'ouvre une parenthèse. (

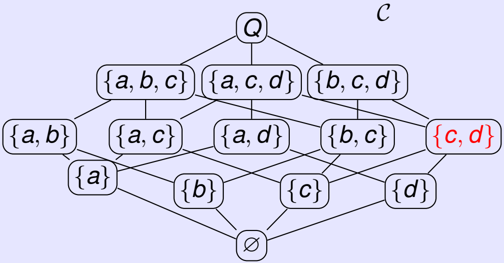
Espaces de connaissance et géométries convexes

Soit Q un ensemble fini de points du plan (ou de $\mathbb{R}^d$); posons

$$\mathcal{K} = \{Q \setminus A \mid A \subset \mathbb{R}^d \text{ et } A \text{ est convexe}\},$$
$$\mathcal{C} = \{Q \cap A \mid A \subset \mathbb{R}^d \text{ et } A \text{ est convexe}\}.$$

Exemple pour $d = 2$





Seuls $\{b, d\}$ et $\{a, b, d\}$ manquent dans $\mathcal{C}$.

Notons les égalités

$$\mathcal{C} = \{Q \setminus K \mid K \in \mathcal{K}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{K} = \{Q \setminus C \mid C \in \mathcal{C}\}.$$

Soit Q un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^d$); nous avons posé

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \{Q \setminus A \,|\, A \subset \mathbb{R}^d \text{ et } A \text{ est convexe}\}, \\ \mathcal{C} &= \{Q \cap A \,|\, A \subset \mathbb{R}^d \text{ et } A \text{ est convexe}\}. \end{aligned}$$

Proposition

Alors $(Q, \mathcal{K})$ est un espace d'apprentissage.

Caractériser les espaces d'apprentissage ainsi produits est difficile dans un sens technique (Keno Merckx et Udo Hoffman, 2017).

Rappelons $\mathcal{C} = \{Q \setminus K \,|\, K \in \mathcal{K}\}$.

Le couple $(Q, \mathcal{C})$ forme une géométrie convexe.

$)$ Je referme la parenthèse.

Le contexte

Les fondements combinatoires

(Les géométries convexes)

Les aspects probabilistes et la procédure d'évaluation

Conclusions

Nécessité d'un cadre probabiliste

Erreurs d'inattention ("careless errors") ou bévues, et
réponses correctes par chance ("lucky guesses") ou devinettes,

font dévier des réponses de l'état de connaissance de l'étudiant.

Il nous faut un cadre probabiliste.

De plus, l'état de connaissance fluctue au cours d'une évaluation.

Le but de l'évaluation sera de produire une distribution de probabilité sur l'ensemble des états

(si possible fortement concentrée sur un seul état
ou sinon sur des états proches et en petit nombre).

Les structures probabilisées de connaissance

Définition

Une structure probabilisée de connaissance $(Q, \mathcal{K}, \pi, \beta, \eta)$ consiste en

(i) une structure de connaissance $(Q, \mathcal{K})$,

(ii) une distribution de probabilité π sur $\mathcal{K}$ et

(iii) pour chaque item q

- une probabilité β_q de bévue et
- une probabilité η_q de devinette.

Ici $\pi(K) = \pi_K$ est la probablité qu'un étudiant soit dans l'état K.

Nous supposons donc

$$0 \leq \beta_q \leq 1, \qquad 0 \leq \eta_q \leq 1, \qquad 0 \leq \pi_K \quad \text{et} \quad \sum_{K \in \mathcal{K}} \pi_K = 1.$$

Principes du processus d'évaluation

But : à partir des réponses d'un étudiant, estimer les valeurs π_K qui expliquent l'exactitude de ses réponses

et cela en posant "peu" de questions.

La procédure d'évaluation construit une suite de valeurs approchées de la distribution π. Il faudra en espérer/étudier la convergence.

Et les β_q, η_q?

Une bonne question écarte les devinettes (pas de 'vrai/faux', pas de choix multiples). On supposera donc souvent $\eta_q = 0$.

Et β_q, probabilité de bévue ? Faire avec.

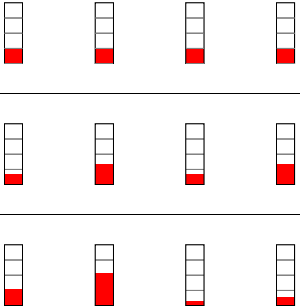
Une image du processus d'évaluation

Prenons

$$\mathcal{K} \quad = \quad \{\, \varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a,b\}\, \}.$$

La distribution initiale de probabilité est (par exemple) uniforme.

		$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
Etape 0:	initialement				
Etape 1:	après réponse correcte à a				
Etape 2:	après réponse fausse à b				



La procédure d'évaluation

Au début d'une étape,

une distribution de probabilité est disponible sur les états.

A chaque étape, il s'agit de

(1) sélectionner une nouvelle question;

(2) collecter et vérifier la réponse;

(3) mettre à jour la distribution.

A formaliser : (1) et (3) par

(1) une règle de questionnement;

(3) une règle de mise à jour (de la distribution).

Une règle de questionnement

Soit L la distribution (estimée) de probabilité sur $\mathcal{K}$ disponible au début de la présente étape.

Idée : sélectionner une question qui pour le moment “sépare” mal les états la contenant des autres états—au sens des estimations actuelles de probabilité d’état.

Définition

La règle de questionnement est demi-scindée (half-split) lorsqu’elle choisit (uniformément au hasard) une question parmi celles qui minimisent

$$\left| \sum_{K \in \mathcal{K}, q \in K} L(K) - \sum_{K \in \mathcal{K}, q \notin K} L(K) \right| .$$

Terme de gauche : probabilité d’être dans un état contenant q,
terme de droite : probabilité d’être dans un état ne contenant pas q.

Une règle de mise à jour

L'idée : multiplier par un facteur > 1 les probabilités des états renforcés par la réponse collectée—puis normer les valeurs obtenues.

Soit

- ▷ q la question posée et
- ▷ r l'exactitude de la réponse de l'étudiant
  ($r = 0$ pour une réponse fausse, $r = 1$ sinon).

Définition

La règle de mise à jour est multiplicative de paramètre constant λ, avec $\lambda > 1$, lorsqu'elle remplace la distribution L par la distribution L' avec

$$L'(K) = \begin{cases} \dfrac{\lambda L(K)}{N}, & \text{si } (q \notin K \text{ et } r = 0) \text{ ou } (q \in K \text{ et } r = 1), \\[2ex] \dfrac{L(K)}{N}, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où λ est une valeur fixée et N est choisi de sorte que $\sum_{K \in \mathcal{K}} L'(K) = 1$.

Quelques résultats

Remarque. J'ai simplifié en présentant des règles déterministes.

Côté théorique :

Proposition

Supposons que l'état de l'étudiant soit constant, égal à K_0, et que ses réponses soient cohérentes avec cet état ($\beta_q = \eta_q = 0, \forall q \in Q$).

Le processus stochastique avec la règle de questionnement demi-scindée et la règle de mise à jour multiplicative converge vers la distribution centrée sur K_0.

Il nous manque des résultats généraux de convergence.

Côté pratique :

`ALEKS`; d'autres logiciels développés à Graz, en Inde.

Le contexte

Les fondements combinatoires

(Les géométries convexes)

Les aspects probabilistes et la procédure d’évaluation

Conclusions

Conclusions

- un projet lancé il y a 30 ans, qui a déjà mené à
  - des publications, dont des livres (deux par JPD et JCF),
  - un système effectif d'enseignement en ligne, `ALEKS`;
- un sujet de recherche avec des problèmes ouverts;
- une réelle application de mathématiques combinatoires;
- un système qui rencontre du succès
  et collecte d'énormes données sur l'apprentissage.

Des interrogations :

- pourquoi aux Etats-Unis ?
  (Aleks Inc. fondée par 2 Belges, 2 Français, 1 Chinoise)
- et chez nous ?

En Belgique, `Oscar`, dû à LAURENT FOURNY, repose sur des principes semblables pour tester la maîtrise des compétences.

Merci pour votre intérêt !

N'oublions pas "la complainte d'un mathématicien" :

PAUL LOCKHART, *A Mathematician's Lament*,
(internet, 2002; Bellevue Literary Press, New York, 2009);

traduction française :

PAUL LOCKHART, *La lamentation d'un mathématicien*,
(L'Arbre de Diane, Boitsfort, 2017).