# Histoires d'i

**ou**

# Les nombres aussi ont leurs complexes

Jean Mawhin

Professeur émérite de Psychanalyse mathématique à l'Université des Complexes Libérés

(U.C.L.)

# 1. Quand la réalité se cache dans l'imaginaire

# Une recette bien cachée

- Scipion del Ferro (1465-1526)
- racine de l'équation du $3^e$ degré : $x^3 + px = q$

# Une recette bien cachée

- Scipion del Ferro (1465-1526)
- racine de l'équation du 3$^e$ degré : $x^3 + px = q$
- rapportée par Ludovico Ferrari (1522-1565) :
  *Cube le tiers de la chose,*
  *ensuite prends le carré de la moitié du nombre,*
  *ajoute ceci à ce qui a été cubé;*
  *la racine carrée de cette somme*
  *plus la moitié du nombre donne un binôme*
  *et la racine cubique de ce binôme*
  *plus la racine cubique de son résidu donne la chose*

# Une recette bien cachée

- Scipion del Ferro (1465-1526)
- racine de l'équation du 3$^e$ degré : $x^3 + px = q$
- rapportée par Ludovico Ferrari (1522-1565) :
  *Cube le tiers de la chose,*
  *ensuite prends le carré de la moitié du nombre,*
  *ajoute ceci à ce qui a été cubé;*
  *la racine carrée de cette somme*
  *plus la moitié du nombre donne un binôme*
  *et la racine cubique de ce binôme*
  *plus la racine cubique de son résidu donne la chose*
- $\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

# D’où vient-elle ?

- $x^3 + px = q$
- $x = u + v$

# D'où vient-elle ?

- $x^3 + px = q$
- $x = u + v$
- $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$
- $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) = q$

# D'où vient-elle ?

- $x^3 + px = q$
- $x = u + v$
- $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$
- $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) = q$
- $3uv + p = 0,\ u^3 + v^3 = q \quad \Leftrightarrow \quad u^3v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3,\ u^3 + v^3 = q$
- $u^3,\ v^3$ racines de $w^2 - qw - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$
- $u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$

# D'où vient-elle ?

- $x^3 + px = q$
- $x = u + v$
- $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$
- $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) = q$
- $3uv + p = 0,\ u^3 + v^3 = q \quad \Leftrightarrow \quad u^3v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3,\ u^3 + v^3 = q$
- $u^3,\ v^3$ racines de $w^2 - qw - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$
- $u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$
- $u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

# Bizarre !

- $x^3 + 6x = 20$
- $x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$

# Bizarre !

- $x^3 + 6x = 20$
- $x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$
- $f(x) = x^3 + 6x - 20, \quad f'(x) = 3x^2 + 6 > 0$
  $\Rightarrow$ $f$ strictement croissante $\Rightarrow$ un seul zéro

# Bizarre !

- $x^3 + 6x = 20$
- $x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$
- $f(x) = x^3 + 6x - 20, \quad f'(x) = 3x^2 + 6 > 0$
  $\Rightarrow$ $f$ strictement croissante $\Rightarrow$ un seul zéro
- $2^3 + 6 \cdot 2 = 8 + 12 = 20 \quad \Rightarrow \quad 2$ est racine !
- $2 = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$ !

# Bizarre !

- $x^3 + 6x = 20$
- $x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$
- $f(x) = x^3 + 6x - 20, \quad f'(x) = 3x^2 + 6 > 0$
  $\Rightarrow$ $f$ strictement croissante $\Rightarrow$ un seul zéro
- $2^3 + 6 \cdot 2 = 8 + 12 = 20 \quad \Rightarrow \quad 2$ est racine !
- $2 = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$ !
- $(1+\sqrt{3})^3 = 1 + 3\sqrt{3} + 3 \cdot 3 + 3\sqrt{3} = 10 + 6\sqrt{3} = 10 + \sqrt{108}$
- $(1-\sqrt{3})^3 = 1 - 3\sqrt{3} + 3 \cdot 3 - 3\sqrt{3} = 10 - 6\sqrt{3} = 10 - \sqrt{108}$

# Une recette cryptée

- 1539, NICCOLÓ TARTAGLIA (1500-1557) : *communication à* GIROLAMO CARDANO (1501-1576)
- *Lorsque le cube et les choses à côté*
  *S'égalent à quelque nombre discret :*
  *Trouves-en deux, espacés du connu,*
  *Et fais en sorte, suivant l'us,*
  *Que leur produit toujours égale*
  *Le tiers cubé des choses, net.*
  *Et le résidu général*
  *Des côtés cubes bien soustraits*
  *Te donnera ta chose principale*

TARTAGLIA


CARDANO

# Une histoire complexe

- 1545, CARDANO *(Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus)* : *il y a environ trente ans,* SCIPIONE DEL FERRO *de Bologne, a résolu le problème du présent chapitre et l'a communiqué à* ANTONIO MARIO FIOR *de Venise; celui-ci lors d'un concours qui l'oppose à* NICOLAS TARTAGLIA *de Brescia annonça que* NICOLAS *l'avait résolu à son tour; à ma demande il [*TARTAGLIA*] me l'a communiqué sans démonstration. Avec cette aide nous avons cherché la démonstration, l'avons trouvée, bien qu'avec de grandes difficultés, et nous l'avons établie comme suit*
- FERRARI : *Il y a quatre ans, comme* CARDAN *se rendait à Florence et que j'étais son compagnon de voyage, nous vîmes à Bologne* HANNIBAL DELLA NAVE, *homme ingénieux et aimable, qui nous montra un petit livre écrit jadis de la main même de son beau-père* SCIPION DAL FERRO, *où son invention était élégamment et doctement expliquée*

# Des racines indigestes

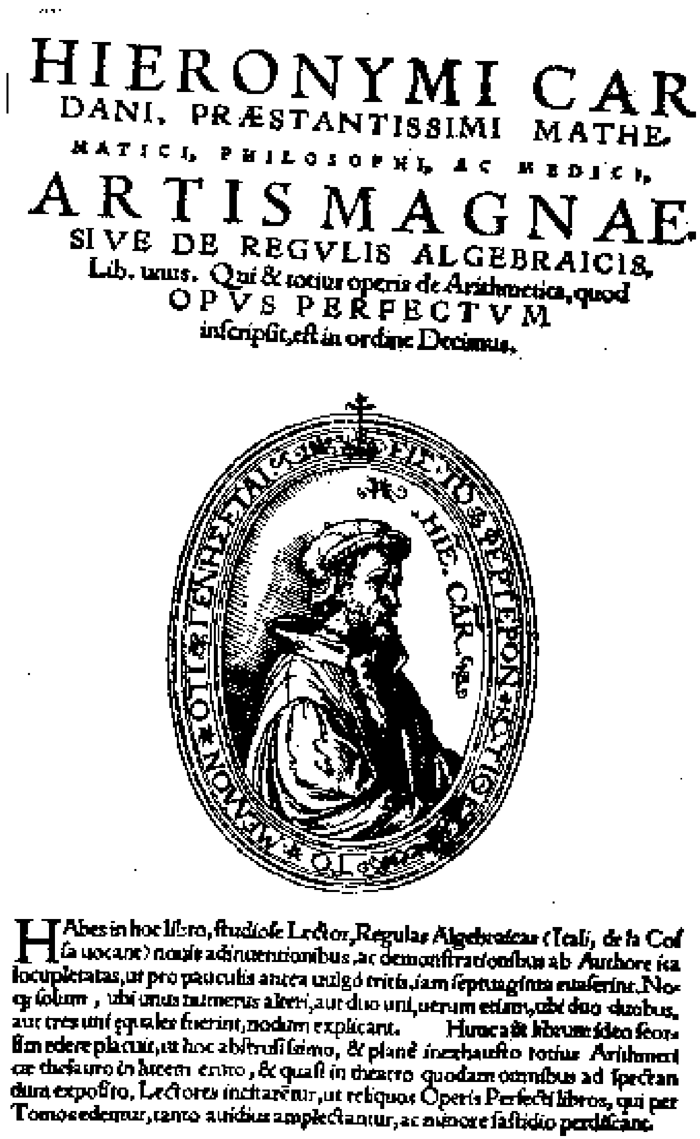
- $x^3 - 15x = 4$
- $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ ???

# Des racines indigestes

- $x^3 - 15x = 4$
- $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ ???
- $4^3 - 15 \times 4 = 64 - 60 = 4 \quad \Rightarrow \quad 4$ est racine !
- $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$

# Des racines indigestes

- $x^3 - 15x = 4$
- $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ ???
- $4^3 - 15 \times 4 = 64 - 60 = 4 \quad \Rightarrow \quad 4$ est racine !
- $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$
- autres racines : $-2 + \sqrt{3}, \quad -2 - \sqrt{3}$
- 3 racines réelles et la formule n'a pas de sens !


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNAE,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.


L'ALGEBRA
OPERA
da Bologna
IN BOLOGNA,
MDLXXIX.

# Un cuisinier audacieux

- 1572, RAFAEL BOMBELLI (1526-1572) *(L'algebra parte maggiore dell'aritmetica divisa in tre libri) :*

> *J'ai trouvé une autre sorte de racine carrée très différente des autres, qui paraît au chapitre sur le cube égal à une quantité et à un nombre quand le cube du tiers de la quantité est plus grand que le carré de la moitié du nombre. [...]*
> *Cette sorte de racine carrée a pour son algorithme des opérations différentes des autres et a un nom différent. [...]*
> *Ceci peut paraître très sophistiqué mais [...] d'abord je traiterai de la multiplication en donnant les règles pour plus et moins*

# Règles pour assaisonner les racines

- *Plus fois plus de moins fait plus de moins*
  *Moins fois plus de moins fait moins de moins*
  *Plus fois moins de moins fait moins de moins*
  *Moins fois moins de moins fait plus de moins*
  *Plus de moins fois plus de moins fait moins*
  *Plus de moins fois moins de moins fait plus*
  *Moins de moins fois plus de moins fait plus*
  *Moins de moins fois moins de moins fait moins*

# Règles pour assaisonner les racines

- *Plus fois plus de moins fait plus de moins*
  *Moins fois plus de moins fait moins de moins*
  *Plus fois moins de moins fait moins de moins*
  *Moins fois moins de moins fait plus de moins*
  *Plus de moins fois plus de moins fait moins*
  *Plus de moins fois moins de moins fait plus*
  *Moins de moins fois plus de moins fait plus*
  *Moins de moins fois moins de moins fait moins*
- *piu, meno, piu di meno, meno di meno* :
  $+, -, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$
  *piu di meno via meno di meno fa piu* :
  $(+\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = +1$
  *piu et piu di meno ne s'additionnent pas*

# Faire du réel avec de l'imaginaire

- $x^3 - 15x = 4$
- $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$
  $= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$

# Faire du réel avec de l'imaginaire

- $x^3 - 15x = 4$
- $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$
  $= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$
- $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3$
  $= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$
- $(2 - \sqrt{-1})^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{-1})^3$
  $= 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} = 2 - 11\sqrt{-1}$

# Faire du réel avec de l'imaginaire

- $x^3 - 15x = 4$
- $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$
  $= \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$
- $(2+\sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3\cdot 2\cdot(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3$
  $= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$
- $(2-\sqrt{-1})^3 = 2^3 - 3\cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3\cdot 2\cdot(\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{-1})^3$
  $= 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} = 2 - 11\sqrt{-1}$
- $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4 \quad !$

# Un génie face à ses complexes

- GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ (1646-1716) :
- *1674 (lettre à* HUYGENS) : $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$
  *je ne me souviens pas avoir remarqué un fait plus singulier et paradoxal dans toute l'analyse; je pense être le premier à avoir réduit des racines irrationnelles, de formes imaginaire, à des valeurs réelles*

# Un génie face à ses complexes

- GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ (1646-1716) :
- *1674 (lettre à* HUYGENS) : $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$
  *je ne me souviens pas avoir remarqué un fait plus singulier et paradoxal dans toute l'analyse; je pense être le premier à avoir réduit des racines irrationnelles, de formes imaginaire, à des valeurs réelles*
- *1702 (Acta Eruditorum) : les racines imaginaires sont une subtile et magnifique ressource de l'esprit divin, sorte d'hermaphrodite entre l'existence et la non-existence*

# Un génie face à ses complexes

- Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) :
- *1674 (lettre à* Huygens) : $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$
  *je ne me souviens pas avoir remarqué un fait plus singulier et paradoxal dans toute l'analyse; je pense être le premier à avoir réduit des racines irrationnelles, de formes imaginaire, à des valeurs réelles*
- *1702 (Acta Eruditorum) : les racines imaginaires sont une subtile et magnifique ressource de l'esprit divin, sorte d'hermaphrodite entre l'existence et la non-existence*
- *1702 (lettre à* Varignon*) : ces imaginaires ont ceci d'admirable que, dans le calcul, ils n'enveloppent rien d'absurde ou de contradictoire et que cependant ils ne peuvent être représentées dans la nature des choses*

# Fantaisies et imagination

- *1768,* LEONHARD EULER (1707-1783) *(Elémens d'algèbre)*
- *les racines carrées de nombres négatifs ne peuvent être calculées parmi les nombres possibles: par conséquent nous devons dire qu'elles sont des nombres qui sont impossibles, [ce qui] nous conduit au concept [...] des* nombres imaginaires *ou des* nombres fantaisistes *parce qu'ils existent seulement dans notre fantaisie ou notre imagination [...] de pareils nombres [...] ne sont ni rien, ni plus que rien, ni moins que rien;*
  *cependant, ces nombres se présentent à l'esprit, ils ont lieu dans notre imagination, et nous ne laissons pas d'en avoir une idée suffisante; [...] par* $\sqrt{-4}$, *par exemple, on entend un nombre qui, multiplié par lui-même, fait* $-4$.
  *C'est aussi pourquoi rien ne nous empêche d'appliquer le calcul à ces nombres imaginaires et de les employer*

# 2. Les ondulations vraies des croissances imaginaires

# L'analyse aussi s'encanaille

- 1714, ROGER COTES (1682-1716) *(Logometria) :*
  $ix = \log(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)$
  argument difficilement compréhensible

# L'analyse aussi s'encanaille

- 1714, Roger Cotes (1682-1716) *(Logometria) :*
  $ix = \log(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)$
  argument difficilement compréhensible
- 1730, Abraham De Moivre (1667-1754) :
  $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos nx + \sqrt{-1}\sin nx} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos nx - \sqrt{-1}\sin nx}$

# L'analyse aussi s'encanaille

- 1714, ROGER COTES (1682-1716) *(Logometria) :*
  $ix = \log(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)$
  argument difficilement compréhensible
- 1730, ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) :
  $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos nx + \sqrt{-1}\sin nx} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos nx - \sqrt{-1}\sin nx}$
- 1739, DE MOIVRE *(lettre à* W. JONES) :
  $(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^{1/n}$ *:* $n$ ***valeurs***
  $\cos\left(\frac{x+2k\pi}{n}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\frac{x+2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$

# trigonométrie = calcul exponentiel

- 1740, EULER *(lettre à Jean Bernoulli; publié en 1743) :*
  $$2\cos x = e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}, \quad 2\sin x = e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}$$

# trigonométrie = calcul exponentiel

- 1740, EULER *(lettre à Jean Bernoulli; publié en 1743) :*
  $2\cos x = e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}, \quad 2\sin x = e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}$
- 1748, EULER *(Introductio in Analisis infinitorum) :*
  $\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x = e^{\pm\sqrt{-1}x}, \quad e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$

# trigonométrie = calcul exponentiel

- 1740, EULER *(lettre à Jean Bernoulli; publié en 1743) :*
  $2\cos x = e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}, \quad 2\sin x = e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}$
- 1748, EULER *(Introductio in Analisis infinitorum) :*
  $\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x = e^{\pm\sqrt{-1}x}, \quad e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$
- 1777, EULER *(publié 1794) :* $\sqrt{-1} := i$

# trigonométrie = calcul exponentiel

- 1740, EULER *(lettre à Jean Bernoulli; publié en 1743) :*
  $2\cos x = e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}, \quad 2\sin x = e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}$
- 1748, EULER *(Introductio in Analisis infinitorum) :*
  $\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x = e^{\pm\sqrt{-1}x}, \quad e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$
- 1777, EULER *(publié 1794) :* $\quad \sqrt{-1} := i$
- $e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2j+1}}{(2j+1)!}$
  $= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} + i\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} = \cos x + i\sin x$
- $(\cos x + i\sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{inx} = \cos nx + i\sin nx$
- $(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)$
  $= \begin{cases} \cos x\cos y - \sin x\sin y + i(\sin x\cos y + \cos x\sin y) \\ e^{ix}\cdot e^{iy} = e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y) \end{cases}$

# 3. Comprendre ses complexes en les mettant à plat

# La lumière en sortant du tunnel

- 1685, JOHN WALLIS (1616-1703) *(De algebra Tractatus)*
- *De telle sorte que, dans le cas de racines négatives, nous devons dire que le point $B$ ne peut être trouvé, comme supposé sur $AC$ vers la droite, mais à gauche de $A$ et sur la même ligne.*
  *Nous devons dire ici, dans le cas d'un carré négatif, que le point $B$ ne peut être trouvé, ainsi qu'il était supposé, sur la ligne $AC$ mais au-dessus de cette ligne dans le même plan*

# Le bon plan d'un cartographe

- 1798, CASPAR WESSEL (1745-1818) *(Sur la représentation analytique de la direction)*
- *Désignons par* $+1$ *l'unité positive rectiligne et par* $+\epsilon$ *une certaine autre unité perpendiculaire à l'unité positive et ayant la même origine;*
  *alors l'angle de la direction de* $+1$ *sera égale à* $0^o$ *, celui de* $-1$ *à* $180^o$, *celui de* $\epsilon$ *à* $90^o$ *, et celui de* $-\epsilon$ *à* $-90^o$ *ou* $270^o$ *.*
  *Par la règle que l'angle de la direction du produit est égal à la somme des angles des facteurs, nous avons*
  $(+1)(+1) = +1\,;[...];\ (-1)(-1) = +1$ *;*
  $(+1)(+\epsilon) = +\epsilon\,;[...];\ (+\epsilon)(+\epsilon) = -1$
  *De ceci on déduit que* $\epsilon$ *est égal à* $\sqrt{-1}$;
- coordonnées polaires : $a + ib = (r, \theta),\ c + id = (s, \varphi)$
  $(a + ib)(c + id) = (rs, \theta + \varphi)$

# Un comptable qui tire son plan

- 1806, JEAN ROBERT ARGAND (1768-1822) *(Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques)*
- *Toute ligne parallèle à la direction primitive est exprimée par un nombre réel, et celles qui lui sont perpendiculaires sont exprimées par des nombres imaginaires ou de la forme $\pm a\sqrt{-1}$ ,*
  *et, enfin, celles qui sont tracées dans une direction autre que les deux précédentes appartiennent à la forme $\pm a \pm b\sqrt{-1}$ ,*
  *qui se compose d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. [...]*
  *Ces lignes sont des quantités tout aussi réelles que l'unité primitive*

# Évidemment Gauss le savait !

- CARL-FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)
- 1811 *(Lettre à* BESSEL) :
  *de même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se représenter le domaine complet de toutes les quantités, les réelless et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini, où chaque point déterminé par son abscisse* $a$ *et son ordonnée* $b$ *, représente en même temps la quantité* $a + bi$

# Évidemment Gauss le savait !

- CARL-FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)
- 1811 *(Lettre à* BESSEL) :
  *de même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se représenter le domaine complet de toutes les quantités, les réelless et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini, où chaque point déterminé par son abscisse $a$ et son ordonnée $b$, représente en même temps la quantité $a + bi$*
- 1825 *(Lettre à Peter Hansen) :*
  *Le vrai sens de $\sqrt{-1}$ se révèle vivement devant mon âme, mais il sera très difficile de l'exprimer en mots, qui ne peuvent donner qu'une image suspendue dans l'air*
- GAUSS propose la terminologie *nombre complexe*

# Une question de mots ?

- 1831, GAUSS *(Theoria Residuorum Biquadraticorum. Comment. Secund. :* *ces nombres imaginaires, en tant qu'opposés aux quantités réelles – autrefois, et même encore aujourd'hui occasionnellement, quoiqu'improprement appelés impossibles – ont été simplement tolérés plutôt que de recevoir la citoyenneté complète, et apparaissent dès lors plus comme un jeu joué avec des symboles dépourvus de sens, auxquels on se garde absolument d'attribuer un quelconque substrat visuel, sans désir de diminuer le riche tribut que ce jeu a contribué au trésor des relations entre nombres réels. Si ce sujet a jusqu'ici été considéré du mauvais point de vue et dès lors enveloppé de mystère et d'obscurité, c'est à cause surtout d'une terminologie inappropriée. Si* $+1, -1$ *et* $\sqrt{-1}$ *, au lieu d'être appelés l'unité positive, négative et imaginaire (ou pire encore impossible), avaient reçu les noms, disont, d'unité directe, inverse et latérale, il y aurait difficilement eu place pour une telle obscurité*

# Des symboles légitimes

- 1821, Augustin Cauchy (1789-1857) *(Cours d'analyse algébrique) :*
*on appelle* expression symbolique *ou* symbole *toute combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien par elle-même, ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir [...]*
*on appelle* expression imaginaire *toute expression symbolique de la forme* $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ *,* $\alpha, \beta$ *désignant deux quantités réelles; et l'on dit que deux expressions imaginaires* $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ *,* $\gamma + \delta\sqrt{-1}$ *sont* égales *entre elles, lorsqu'il y a égalité de part et d'autre, entre les parties réelles* $\alpha$ *et* $\gamma$ *, et entre les coefficients de* $\sqrt{-1}$ *, savoir* $\beta$ *et* $\delta$ *. L'égalité de deux expressions imaginaires s'indique [...] par le signe* $=$ *; et il en résulte ce qu'on appelle une* équation imaginaire. *[...] toute équation imaginaire n'est que la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles*

# Apaiser sa soif de réel

- 1847, CAUCHY *(Mémoire sur une nouvelle théorie des imaginaires, et sur les racines symboliques des équations et des équivalences) :*
  *mais il est évident que la théorie des imaginaires deviendrait beaucoup plus claire encore et beaucoup plus facile à saisir, qu'elle pourrait être mise à la portée de toutes les intelligences, si l'on parvenait à réduire les expressions imaginaires, et la lettre $i$ elle-même, à n'être plus que des quantités réelles.*
  *On prend pour convention fondamentale que la lettre symbolique $i$ substituée à la lettre $x$ dans une fonction entière $f(x)$ indiquera la valeur que reçoit non pas $f(x)$ mais le reste de la division algébrique de $f(x)$ par $x^2+1$ quand on attribue à $x$ la valeur particulière $i$*

# Apaiser sa soif de réel

- 1847, CAUCHY *(Mémoire sur une nouvelle théorie des imaginaires, et sur les racines symboliques des équations et des équivalences) :* *mais il est évident que la théorie des imaginaires deviendrait beaucoup plus claire encore et beaucoup plus facile à saisir, qu'elle pourrait être mise à la portée de toutes les intelligences, si l'on parvenait à réduire les expressions imaginaires, et la lettre $i$ elle-même, à n'être plus que des quantités réelles.*
*On prend pour convention fondamentale que la lettre symbolique $i$ substituée à la lettre $x$ dans une fonction entière $f(x)$ indiquera la valeur que reçoit non pas $f(x)$ mais le reste de la division algébrique de $f(x)$ par $x^2+1$ quand on attribue à $x$ la valeur particulière $i$*
- *un* nombre complexe *est une classe d'équivalence de polynômes réels pour la relation "avoir le même reste dans la division par $1+x^2$"*

# 4. On trouve ses racines au sein de ses complexes

# En comptant les racines

- *une équation du premier degré* $ax + b = 0$ ( $a \neq 0,$ $b$ *réels) a exactement une solution réelle*
- *une équation du second degré* $ax^2 + bx + c = 0$ ( $a \neq 0,$ $b$ , $c$ *réels) a* $0$ , $1$ *ou* $2$ *solutions réelles*
- *une équation du troisième degré* $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ( $a \neq 0,$ $b$ , $c$ , $d$ *réels) a* $1$ , $2$ *ou* $3$ *solutions réelles*
- *une équation du quatrième degré* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ( $a \neq 0,$ $b$ , $c$ , $d$ $e$ *réels) a* $0$ , $1$ , $2$ , $3$ *ou* $4$ *solutions réelles*

# En comptant les racines

- *une équation du premier degré* $ax + b = 0$ ( $a \neq 0,\ b$ *réels) a exactement une solution réelle*
- *une équation du second degré* $ax^2 + bx + c = 0$ ( $a \neq 0,\ b$ , $c$ *réels) a* $0$ , $1$ *ou* $2$ *solutions réelles*
- *une équation du troisième degré* $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ( $a \neq 0,\ b$ , $c$ , $d$ *réels) a* $1$ , $2$ *ou* $3$ *solutions réelles*
- *une équation du quatrième degré* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ( $a \neq 0,\ b$ , $c$ , $d$ $e$ *réels) a* $0$ , $1$ , $2$ , $3$ *ou* $4$ *solutions réelles*
- *une équation du second degré* $ax^2 + bx + c = 0$ *a exactement* $2$ *solutions(réelles ou imaginaires)*
- *une équation du troisième degré* $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ *peut avoir* $1$ *solution réelle et* $2$ *imaginaires*

# Conjectures positives

- 1608, Peter Roth (?-1617) : *une équation de degré* $n$ *a au plus* $n$ *solutions*

# Conjectures positives

- 1608, PETER ROTH (?-1617) : *une équation de degré* $n$ *a au plus* $n$ *solutions*
- 1629, ALBERT GIRARD (1595-1632) *(une équation de degré* $n$ *a toujours* $n$ *solutions) : toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions, que la dénomination de la plus haute quantité le démontre*

# Conjectures positives

- 1608, PETER ROTH (?-1617) : *une équation de degré $n$ a au plus $n$ solutions*
- 1629, ALBERT GIRARD (1595-1632) *(une équation de degré $n$ a toujours $n$ solutions) : toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions, que la dénomination de la plus haute quantité le démontre*
- 1637, RENÉ DESCARTES (1596-1650) *(une équation de degré $n$ a toujours $n$ solutions) : sachez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines, c'est-à-dire de valeurs de cette quantité. Au reste tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires; c'est-à-dire, qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine*

# Conjectures négatives

- 1638, JEAN BEAUGRAND (1595-1640) *(une équation de degré $n$ n'a pas toujours $n$ solutions) : s'il y a une infinité d'équations qui se produisent par la multiplication d'autres équations, il y en a aussi une infinité d'autres qui ne peuvent être produites suivant cet ordre. [...] Lorsque non seulement elles ne sont point, mais qu'il implique contradiction qu'elles soient, on ne les peut pas nommer avec raison ni réelles ni imaginaires*

# Conjectures négatives

- 1638, JEAN BEAUGRAND (1595-1640) *(une équation de degré $n$ n'a pas toujours $n$ solutions) : s'il y a une infinité d'équations qui se produisent par la multiplication d'autres équations, il y en a aussi une infinité d'autres qui ne peuvent être produites suivant cet ordre. [...] Lorsque non seulement elles ne sont point, mais qu'il implique contradiction qu'elles soient, on ne les peut pas nommer avec raison ni réelles ni imaginaires*
- 1702, LEIBNIZ : *un polynôme réel ne peut pas toujours s'écrire comme produit de facteurs du premier et du second degré*
  *"exemple":* $x^4 + a^4$

# Conjectures négatives

- 1638, JEAN BEAUGRAND (1595-1640) *(une équation de degré $n$ n'a pas toujours $n$ solutions) : s'il y a une infinité d'équations qui se produisent par la multiplication d'autres équations, il y en a aussi une infinité d'autres qui ne peuvent être produites suivant cet ordre. [...] Lorsque non seulement elles ne sont point, mais qu'il implique contradiction qu'elles soient, on ne les peut pas nommer avec raison ni réelles ni imaginaires*
- 1702, LEIBNIZ : *un polynôme réel ne peut pas toujours s'écrire comme produit de facteurs du premier et du second degré* *"exemple":* $x^4 + a^4$
- 1722, COTES; 1730, DE MOIVRE : *le "contre-exemple" de Leibniz n'en est pas un*
- 1742, NICOLAS BERNOULLI (1687-1759) : *autre 'exemple' soutenant* LEIBNIZ, *critiqué par* EULER

# Essais de preuves...

- 1739, 1742, EULER *(un polynôme réel peut toujours s'écrire comme produit de facteurs du premier et du second degré) :*

  *on résout si possible cette expression en facteurs simples réels de la forme* $1 - \alpha p$ *; mais si cela ne peut être fait, on la résout en facteurs de dimension deux de la forme* $1 - \alpha p + \beta pp$ *, résolution qui peut toujours être faite; de cette façon l'expression ci-dessus pourra apparaître sous la forme d'un produit de facteurs simples* $1 - \alpha p$ *ou de dimension deux* $1 - \alpha p + \beta pp$ *, tous réels*

# Essais de preuves...

- 1739, 1742, EULER *(un polynôme réel peut toujours s'écrire comme produit de facteurs du premier et du second degré) :*

  *on résout si possible cette expression en facteurs simples réels de la forme $1 - \alpha p$ ; mais si cela ne peut être fait, on la résout en facteurs de dimension deux de la forme $1 - \alpha p + \beta pp$ , résolution qui peut toujours être faite; de cette façon l'expression ci-dessus pourra apparaître sous la forme d'un produit de facteurs simples $1 - \alpha p$ ou de dimension deux $1 - \alpha p + \beta pp$ , tous réels*

- 1741, JEAN PAUL DE GUA (1712-1786) : *toute équation algébrique de degré $n$ a $n$ racines*
  *(suppose qu'elle peut se résoudre par radicaux)*

# Essais de preuves...

- 1746, JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783) : *analytique*

  *soit un multinôme quelconque*
  $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + fx + g$
  *tel qu'il n'y ait aucune quantité réelle qui étant substituée à la place de* $x$ *y fasse évanouir tous les termes, je dis qu'il y aura toujours une quantité* $p + q\sqrt{-1}$ *à substituer à la place de* $x$ *et qui rendra ce multinôme égal à zéro*

# Essais de preuves...

- 1746, Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) : *analytique*

  *soit un multinôme quelconque*
  $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + fx + g$
  *tel qu'il n'y ait aucune quantité réelle qui étant substituée à la place de* $x$ *y fasse évanouir tous les termes, je dis qu'il y aura toujours une quantité* $p + q\sqrt{-1}$ *à substituer à la place de* $x$ *et qui rendra ce multinôme égal à zéro*

- 1749, Euler : *algébrique, inspiré par sa correspondance avec* Nicolas Bernoulli*; suppose les racines fonctions algébriques des coefficients*

- 1774, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) : *algébrique, critique de la preuve d'*Euler

- 1795, Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) : *algébrique*

# Preuves...

- 1799, Gauss : *topologique; complétée par* Ostrowski, 1927
- 1814, Argand : *analytique; minimization de* $|P(z)|$ *; reprise par* Cauchy, 1820*; complétée par* Weierstrass, 1880
- 1816, Gauss : *algébrique du type d'*Euler*; partie analytique : théorème des valeurs intermédiaires*
- 1816, Gauss : *analytique (calcul intégral)*
- 1831, Cauchy : *analytique (résidus)*
- 1849, Gauss : *topologique*
- 1869, Karl Weierstrass (1815-1897) : *analytique (fonctions holomorphes)*

# Preuves...

- 1799, GAUSS : *topologique; complétée par* OSTROWSKI, 1927
- 1814, ARGAND : *analytique; minimization de* $|P(z)|$ *; reprise par* CAUCHY, 1820*; complétée par* WEIERSTRASS, 1880
- 1816, GAUSS : *algébrique du type d'*EULER*; partie analytique : théorème des valeurs intermédiaires*
- 1816, GAUSS : *analytique (calcul intégral)*
- 1831, CAUCHY : *analytique (résidus)*
- 1849, GAUSS : *topologique*
- 1869, KARL WEIERSTRASS (1815-1897) : *analytique (fonctions holomorphes)*
- **théorème fondamental de l'algèbre** : *tout polynôme à coefficients complexes a au moins une racine complexe*

# 5. Les complexes démystifiés par les couples et les matrices

# Les couples se multiplient

- 1835, William Rowan Hamilton (1805-1865) *(Conjugate functions, or algebraic couples)*
- $z = (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ w = (c, d) :\ z + w := (a + c, b + d)$
  $zw := (ac - bd, ad + bc)\ ; (-1, 0)(c, d) = (-c, -d) = -(c, d)$
  $(a, 0)(c, 0) = (ac, 0) := ac\ ;\ (0, b)(0, d) = (-bd, 0) = -bd$
  $(0, 1)(0, 1) = -1, \quad i := (0, 1), \quad i^2 = -1$

# Les couples se multiplient

- 1835, William Rowan Hamilton (1805-1865) *(Conjugate functions, or algebraic couples)*
- $z = (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ w = (c, d) :\ z + w := (a + c, b + d)$
  $zw := (ac - bd, ad + bc)\ ; (-1, 0)(c, d) = (-c, -d) = -(c, d)$
  $(a, 0)(c, 0) = (ac, 0) := ac\ ;\ (0, b)(0, d) = (-bd, 0) = -bd$
  $(0, 1)(0, 1) = -1, \quad i := (0, 1), \quad i^2 = -1$
- *Ces définitions bien qu'arbitraires, ne sont pas contradictoires l'une par rapport à l'autre, ni par rapport aux premiers principes de l'algèbre, et il est possible de tirer des conclusions légitimes, par un raisonnement mathématique rigoureux, à partir des prémisses acceptées arbitrairement de cette façon. [...]*
  *Dans la théorie des nombres simples, le symbole* $\sqrt{-1}$ *est absurde, mais dans la théorie des couples le même symbole* $\sqrt{-1}$ *a un sens et indique une extraction possible, ou un couple réel, à savoir la racine carrée principale du couple* $(-1, 0)$

# Les matrices forgent le produit

- $$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = aI + bJ$$

  $$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ *(matrice symplectique)*

  $$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}$$

- $$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

# Les matrices forgent le produit

- $$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = aI + bJ$$
  $$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ *(matrice symplectique)*
  $$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$$
- $$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$
- ARTHUR CAYLEY (1821-1895 : *la notion, qui est véritablement fondamentale [...], sous-tendant et envahissant toute l'analyse moderne et la géométrie est celle de quantité imaginaire en analyse et d'espace imaginaire en géométrie*

# 6. Les complexes sont aussi une question de physique

# Relativité

- 1905, Henri Poincaré (1854-1912) *(Sur la dynamique de l'électron)*
- *regardons*

$$\begin{array}{cccc} x, & y, & z, & t\sqrt{-1} \\ x', & y', & z', & t'\sqrt{-1} \\ x'', & y'', & z'', & t''\sqrt{-1} \end{array}$$

*comme les coordonnées de trois points* $P, P', P''$ *dans l'espace à quatre dimensions. Nous voyons que la transformation de Lorentz n'est qu'une rotation de cet espace autour de l'origine, regardée comme fixe*

# Mécanique quantique

- 1925, Werner Heisenberg (1901-1976) : $pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$

# Mécanique quantique

- 1925, Werner Heisenberg (1901-1976) : $pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$
- 1926, Erwin Schrödinger (1887-1961) :
  $\frac{ih}{2\pi}\partial_t\psi + \frac{h^2}{8\pi^2 m}(\partial^2_{xx}\psi + \partial^2_{yy}\psi + \partial^2_{zz}\psi) - V(x,y,z)\psi = 0$
- 1965, Richard Feynman (1918-1988) *(Mécanique quantique): on peut penser à l'équation comme à la description de la diffusion d'une amplitude de probabilité d'un point à un autre. [...]*
  *De fait, l'équation ressemble un peu aux équations de diffusion [...].*
  *Mais il y a une différence essentielle : le coefficient imaginaire devant la dérivée par rapport au temps donne un comportement complètement différent de celui que vous obtiendriez pour la diffusion ordinaire [...].*
  *La diffusion ordinaire donne lieu à des solutions exponentielles réelles, tandis que les solutions de l'équation sont des ondes complexes*

# Conclusion

*Comme Bart De Wever,*

*la mathématique donne des complexes à beaucoup de gens,*

*mais n'est pas près de se débarrasser des siens ...*