http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/LAVALISE/

Des *Situations de Recherche pour la Classe (SiRC)* pour l'apprentissage de la logique et des différents types de raisonnements mathématiques

Denise GRENIER
Institut Fourier et Fédération de Recherche *maths-à-modeler*
Université Grenoble I

Raisonnements, logique et preuve dans les programmes du collège en France

« *Raisonner logiquement, pratiquer la déduction, démontrer* sont des capacités qui relèvent du socle commun de connaissances et de compétences et qui sont à acquérir progressivement, tout au long de la scolarité au collège. » (extrait du document Ressources collège 2009)

Importance de la « démarche d'investigation » pour mettre en oeuvre *différents types de raisonnement (inductif, exhaustivité des cas, disjonction des cas, absurde, ...)*, travailler les notions de *réciproque*, la *quantification*, le *contre-exemple*

Apprentissage de la démarche de recherche, où le raisonnement inductif prend toute sa place pour l'élaboration de *conjectures*

La logique dans les programmes de lycée en France

notations et vocabulaire mathématiques

langage des ensembles

Tous les types de raisonnements

inductif, déductif,

par contraposition, par l'absurde, par exhaustivité des cas

par l'exemple, le contre-exemple

notions de *logique*

implication, équivalence, réciproque, contraposée

ET, OU, NON

Négation d'une proposition conditionnelle

distinguer la logique mathématique de celle du « langage courant »

distinguer implication mathématique et causalité

Nos questions

Quels problèmes peuvent permettre d'atteindre ces objectifs ?

Quels types de conjecture un élève peut-il faire sur une notion qu'il est en train d'apprendre ?

Quelles notions sont-elles nécessaires pour :

justifier la distinction *implication mathématique* /*causalité* ?

comprendre la *négation d'une proposition* ?

Peut-on espérer que l'élève va naturellement s'engager dans une recherche et apprendre à cette occasion des mathématiques ?

Dans les manuels

- Notions de logique non définies
- Formalisations des raisonnements absentes des « cours »
- Problèmes « de recherche » peu présents
- *Investigation* et *expérimental* très liés à l'ordinateur (tableur, logiciels).

Et dans les pratiques de classe ?

- Une activité mathématique restreinte au travail de techniques et de méthodes
- Des contraintes institutionnelles (temps, programme) défavorables à une pratique de problèmes plus « ouverts »
- Absence de formation à la gestion des « problèmes de recherche »
- Doutes des enseignants sur les apprentissages induits.

Nos hypothèses

Un élève ne peut **dans le même temps** construire les savoir-faire nécessaires à l'activité mathématique et apprendre une notion nouvelle (forcément complexe pour lui).

Enseigner la logique *au fil des chapitres* est insuffisant.

Les savoir-faire de la démarche mathématique
- ne peuvent être réduits à des méthodes ou techniques
- nécessitent du temps

L'élève **doit** rencontrer des problèmes de recherche

Les *phases d'investigation ou expérimentales* sont importantes dans la mise en place de conjectures.

Propositions

Trois types de problèmes pour des objectifs (un peu) différents

T1. Des problèmes “ouverts” de réinvestissement de notions et connaissances antérieures

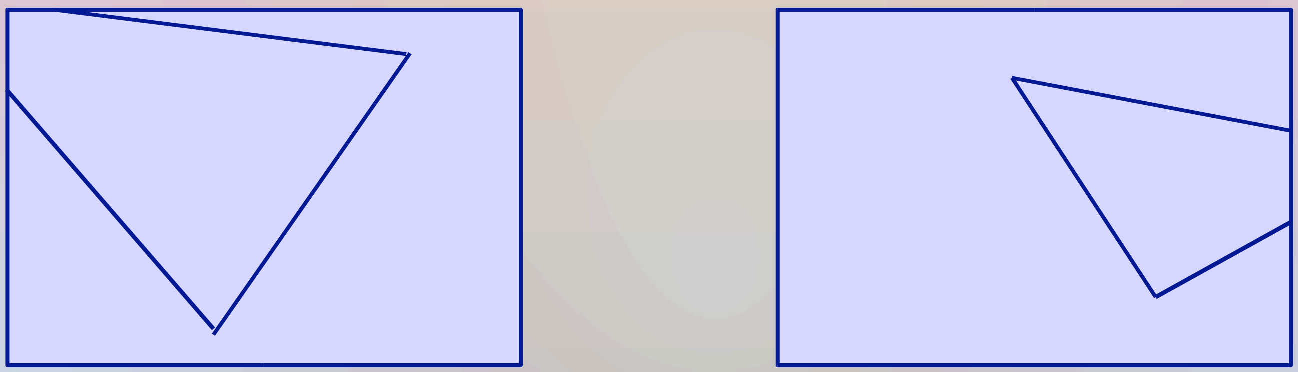
T2. Des problèmes courts pour travailler le raisonnement, la logique et la preuve

T3. Des Situations de Recherche pour la Classe (SiRC)

Exemple 1. Périmètre du triangle tronqué (Balacheff, 1989)

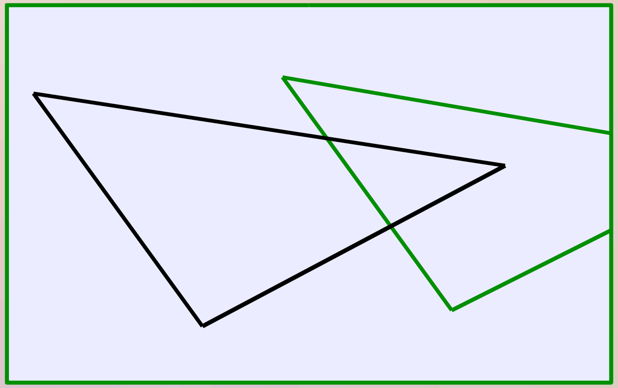
Est-il possible de déterminer le périmètre d'un triangle, à partir de son tracé tronqué d'une pointe, quelles que soient sa taille et sa forme, et sans sortir de la feuille ? Si oui, décrire une méthode.

On dispose de tous les instruments classiques de construction et de mesure.

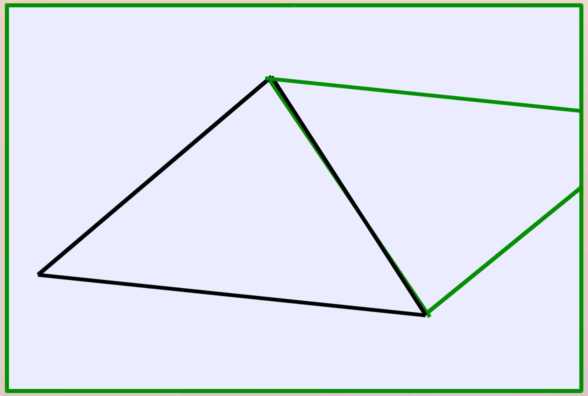


Exemple 1. Périmètre du triangle tronqué (suite)

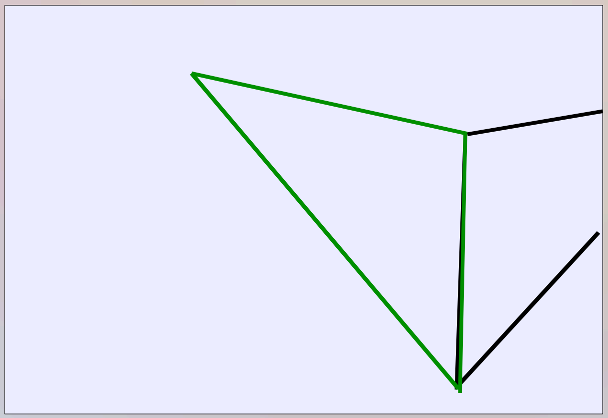
Productions spontanées et majoritaires d'élèves et étudiants : des **Isométries,** qui résolvent le problème pour quelques familles de triangles



Translations



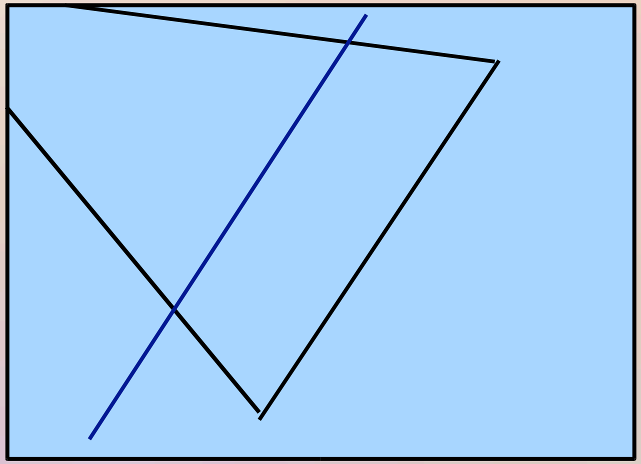
Symétrie centrale

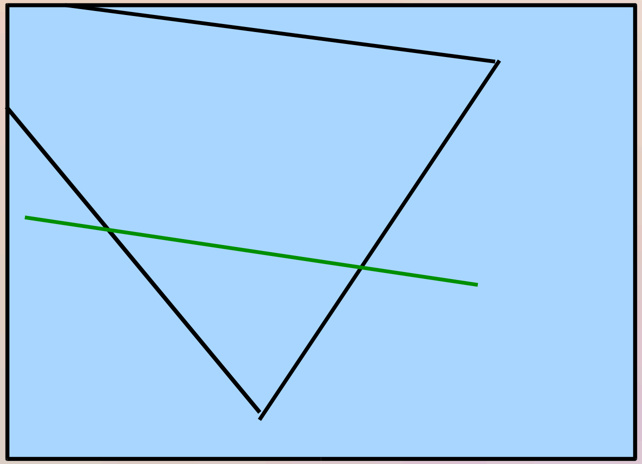


Symétrie orthogonale

Exemple 1. Périmètre du triangle tronqué (suite)

“Thalès” résout le problème pour TOUT triangle tronqué d'une pointe





Sens premier du théorème de Thalès : mesurer indirectement des longueurs. On peut *donc* mesurer le périmètre d'un triangle sans connaître la longueur des trois côtés.

Exemple 2. La course à n (Brousseau, 1980)

Jeu à deux joueurs

On se fixe deux nombres n et $p < n$. On part de 0. Chaque joueur à tour de rôle ajoute au choix 1, 2, …, p, au nombre donné par le joueur précédent. Celui qui arrive à n exactement) a gagné.
Existe-t-il une stratégie gagnante quels que soient n et p ?

Deux variables
En primaire et collège, on peut fixer p
En CM1-CM2 (2010) : n=20, p = 2

Exemple 2. La course à n (Brousseau, 1980) (suite)

Jouons à la course à 23, avec des pas de 1, 2 ou 3

+2 +3 +1 +3 +1 +3 +2 +2 +2 +2

2 4 7 8 11 12 15 17 19 21 23

Bleu gagne par hasard

On recommence

+3 +2 +3 +3 +1 +1 +2 +2 +1 +3

2 5 7 10 13 14 15 17 19 20 23

Bleu pouvait gagner

Rouge a repéré qu'il faut atteindre 19 pour dire 23

Puis que pour atteindre 19, il faut atteindre 15.

Exemple 2. La course à n (Brousseau, 1980) (suite)

En CM1-CM2 (2010) : n=20, p = 2

Jouer aboutit aux questions et conjectures :

*« pour gagner, **il faut** arriver à 17 »*
*« mais **si** on ne passe pas par 17 ? »* […]
*« pour arriver à 17, **il faut** passer par 14 »*
« comment on est sûr de passer par 14 ? » […]
« mais c'est par 3 ! Il faut sauter 3 à chaque fois ! »

Stratégie gagnante : commencer, dire 2, puis ajouter 1 ou 2 pour pouvoir dire 5, 8, 11, 14, 17 et enfin 20.

Notion en jeu : la division euclidienne,
retrouvée comme soustraction réitérée

Type2. Problèmes de logique. Exemple 1

Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Peut-on répondre pour toutes, et sinon, pourquoi ? Justifiez votre réponse.

P1. Un carré est un parallélogramme

P2. Un rectangle est un carré

P3. 4 est pair ou 6 est impair

P4. 4 est pair et 6 est impair

P5. Pour tout entier n, n est pair ou $n+4$ est impair

P6. Si $x^2 \geq 4$, alors $x \geq 2$

Phrases ouvertes (P1, P2, P6)

Quantifications nécessaires pour répondre à P2 et P6

Conjonctions *et*, *ou* (P3, P6)

Le *ou* marque une alternative en P5.

Type2. Problèmes de logique. Exemple 1

Les quatre phrases ci-dessous peuvent être vraies ou fausses.
Combien y-a-t-il de phrases vraies ?

A1. Aucune de ces phrases n'est vraie.
A2. Une seule de ces phrases est fausse.
A3. Deux exactement de ces phrases sont vraies.
A4. Deux exactement de ces phrases sont fausses.

Type2. Problèmes de logique. Exemple 1 (suite)

Combien y-a-t-il de phrases vraies ?

*A1. **Aucune** de ces phrases n'est vraie.*
*A2. **Une seule** de ces phrases est fausse.*
*A3. Deux **exactement** de ces phrases sont vraies.*
*A4. Deux **exactement** de ces phrases sont fausses.*

A1 vraie $\Rightarrow$ *A1* fausse on a une contradiction
Nécessaire de supposer *A1* fausse (non contradictoire)
$\overline{A1}$. *L'une de ces phrases **au moins** est vraie.*

$\overline{A1}$ **et** *A2* vraies $\Rightarrow$ *A2* **et** *A3* **et** *A4* vraies $\Rightarrow$ *A2* fausse
Absurde
$\overline{A1}$ **et** $\overline{A2}$ sont compatibles **seulement si** au moins deux des quatre phrases sont vraies. C'est (encore) possible.

A3 **et** *A4* vraies $\Rightarrow$ *A1* **et** *A2* fausses.
Et *A3* fausse ou *A4* fausse entraînent des contradiction.

Troisième type de situations

Les “Situations de Recherche pour la classe » (SiRC)

- Caractéristiques du modèle SiRC
- Exemples
- Quelques éléments bibliographiques

Caractérisation du modèle SiRC (Grenier et Payan, 2002)

• Une SiRC est proche d'une *question vive* de la recherche
==> *éviter l'usure et la non-pertinence de l'activité de recherche*

• La question initiale est facile d'accès à des niveaux différents
==> *énoncé peu mathématisé,*
et évitant les « bruits » non mathématiques

• Stratégies initiales ne résolvent pas complètement la question
==> *techniques ou propriétés « institutionnelles » insuffisantes*

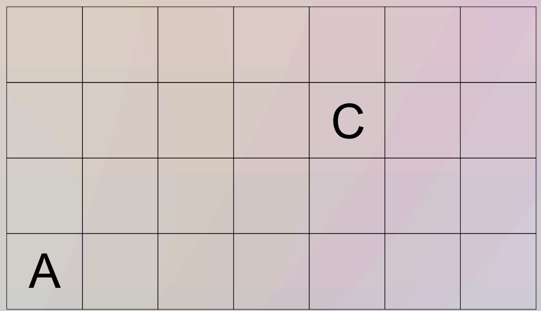
• Conjectures accessibles par essais-erreurs, cas particuliers, etc..
==> *conjectures non évidemment vraies,*
contre-exemples accessibles

• La question initiale peut induire de *nouvelles questions*

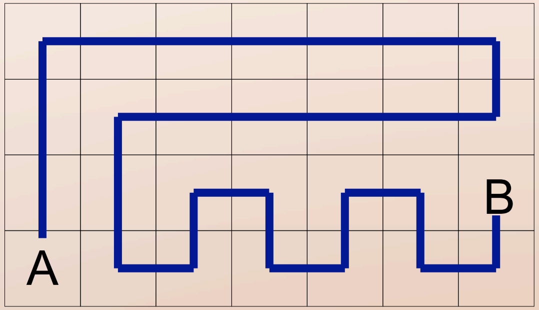
SiRC. Exemple 1. Promenade dans une grille (tout public)

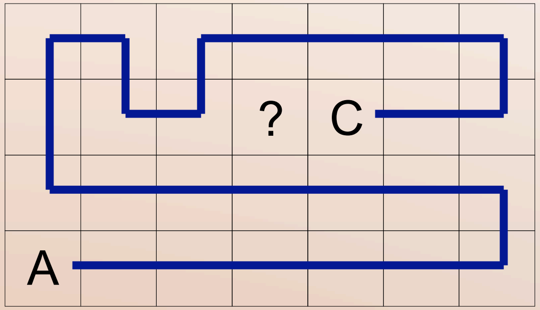
Problème général. On parcourt la grille en passant d'une case à une autre qui lui est directement voisine. Trouver, s'ils existent, un chemin reliant deux cases données, ou un cycle passant une fois et une seule par toutes les cases de la grille (chemin ou cycle hamiltonien)

Exemple



SiRC. Exemple 1. Promenade dans une grille (suite)

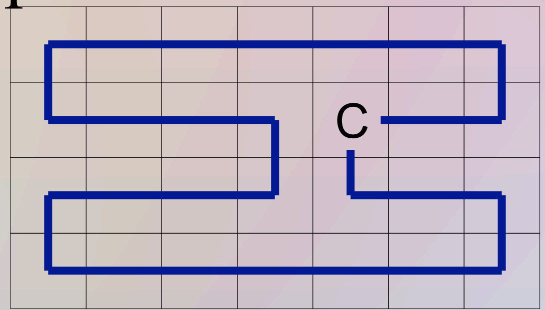




Il existe un chemin hamiltonien de A à B
Preuve : par exhibition d'un exemple

La question reste ouverte pour le chemin de A à C.
Des essais permettent de faire une hypothèse « forte » : il n'y en a pas.

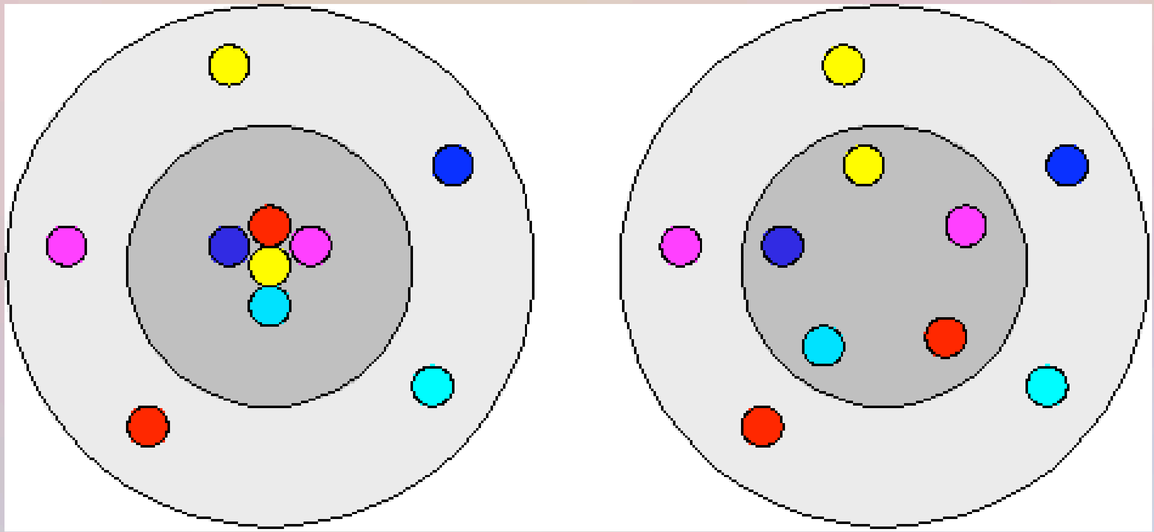
Mais par ailleurs,
on peut trouver un cycle
passant par A et C



Il s'agit ensuite de chercher à comprendre ce qui se passe...

SiRC. Exemple 2. La roue aux couleurs (Godot, thèse, 2005)

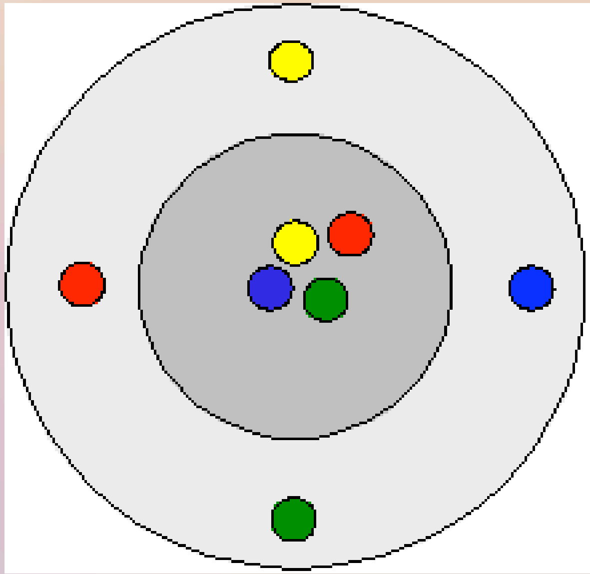
Soient deux disques concentriques, n pions de k couleurs équirépartis sur le disque extérieur. Est-il possible de placer n pions sur le petit disque, face à ceux du disque extérieur, de couleurs prises parmi les k données, tels que pour toute rotation de $2\pi/n$, il n'y ait que deux pions de même couleur face à face.



Exemple n=k=5

SiRC. Exemple 2. La roue aux couleurs (Godot, thèse, 2005) (suite)

Autre exemple n=k=4. Solution ?



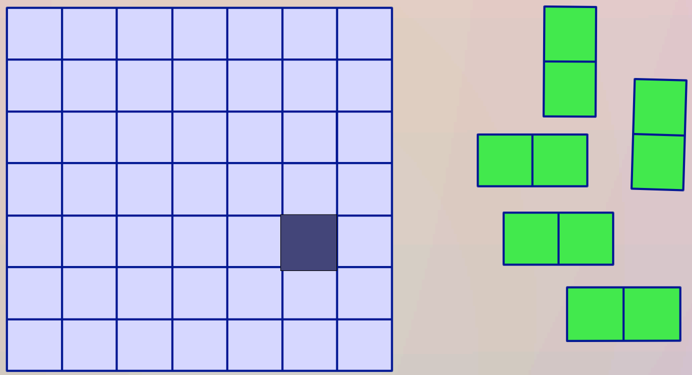
SiRC. Exemple 3. Pavages de polyminos

Collection de problèmes de pavages (formes et pavés différents)

Un problème particulier de pavage

On considère les polyminos carrés de taille *n* (nombre de cases du côté), ayant un trou d'une case pouvant se situer n'importe où.
Pour quelles valeurs de *n* et quelles positions du trou (d'une case), un polymino carré est-il pavable par des dominos ?

Exemple n =7



Situation pertinente du primaire à la fin de l'université
Matériel à manipuler nécessaire, en bois, mousse, ou carton …

Situation fondamentale **pour tous les types de raisonnement**

SiRC. Exemple 3. Pavages de polyminos (suite)

Conjectures émergeant de la recherche

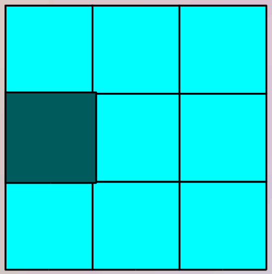
Propriété 1. Une ***condition nécessaire*** pour pouvoir paver un polymino carré ayant un trou avec des dominos est que son aire soit paire.

Preuve (facile) : un domino couvre deux cases.

On considère donc n impair.

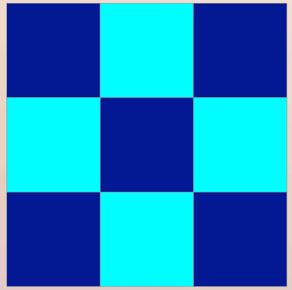
Cette condition n'est pas suffisante

Contre-exemple :

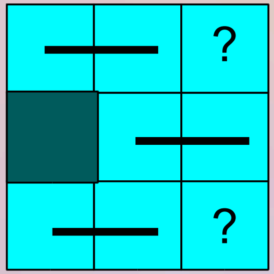


SiRC. Exemple 3. Pavages de polyminos (suite)

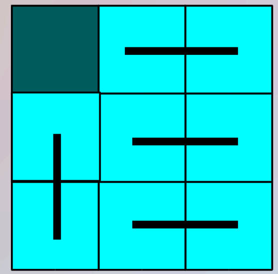
Propriété 2. Pour n=3, une ***condition nécessaire et suffisante*** pour pouvoir paver avec des dominos est que le trou soit placé sur une des cases hachurées ci-contre.



preuve *d'impossibilité* : par pavage forcé (***raisonnement par l'absurde***)



preuve de *possibilité* : par exhibition d'un exemple (***il existe*** un pavage)

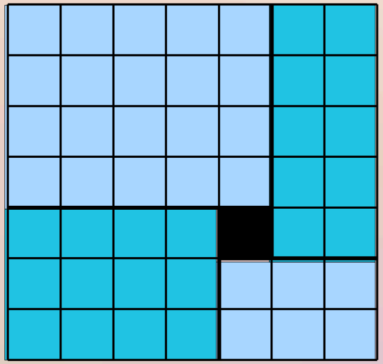


SiRC. Exemple 3. Pavages de polyminos (suite)

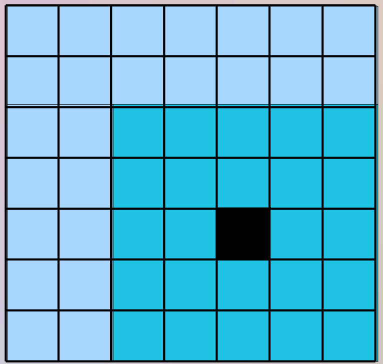
Preuve générale de possibilité

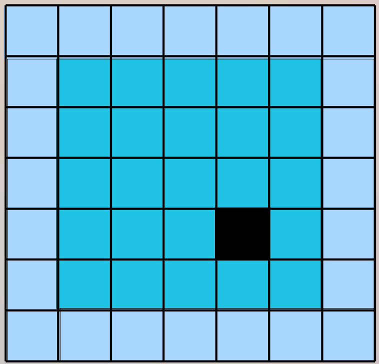
Illustration pour n=7

par découpages en rectangles d'aires paires sans trous



ou ***récurrence*** sur la taille du carré





résultat généralisable aux rectangles

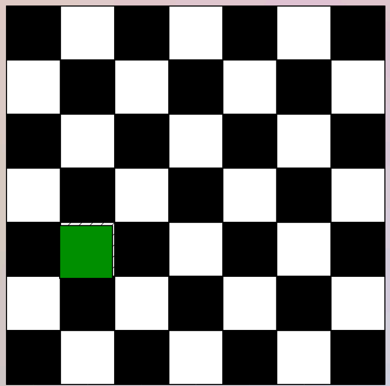
SiRC. Exemple 3. Pavages de polyminos (suite)

Preuves d'impossibilité par coloration

Propriété et définition

Une *condition nécessaire* pour pouvoir paver est que, dans la coloration en damier, il y ait autant de cases de chacune des deux couleurs. On dit que le *polymino est équilibré*.

Autrement dit : Si P est non équilibré, alors P est non pavable



Preuve ***par contraposée*** **ou** ***par l'absurde***

SiRC. Exemple 3. Pavages de polyminos (suite)

Analyse didactique de la situation

La **dévolution** du problème est immédiate
Il n'y a pas de « bruits »

Résultats produits par les élèves

La CN : n impair

La conjecture sur les cases qui marchent et celles qui ne marchent pas.

Des preuves pour les cases qui marchent, pour n=3,5

Une (ébauche de) preuve générale pour les cases qui marchent

Résultat non accessible sans l'enseignant

La preuve générale pour les cases qui ne marchent pas

SiRC. Exemple 3. Pavages de polyminos (suite)

Analyse didactique (suite)

Gestes de gestion usuels qui fonctionnent « bien »

Le damier comme **outil de preuve** (et pas seulement de représentation des solutions).

Quand on essaie de paver avec le trou sur une mauvaise case, il reste deux cases de la même couleur. Conclusion ?

Liens entre l'adjacence des deux cases d'un domino et la coloration en damier.

La conjecture « équilibrée » peut alors émerger et être précisée et mise en débat collectivement.

SiRC. Exemple 3. Pavages de polyminos (suite)

Apprentissages en jeu dans la situation

• *Différents types de preuves* (certaines accessibles dès le primaire)

exhaustivité des cas

exhibition d'un exemple (cas du *théorème d'existence)*

contraposition

absurde

récurrence

• *Outils de preuve*

décomposition/recomposition de la figure

coloration en damier

• *Existence ou non de solutions selon un paramètre*

SiRC. Exemple 3. Pavages de polyminos (suite)

Apprentissages en jeu dans la situation (suite)

- Distinction CN / CS   Il faut / il suffit
  - les CN ne sont pas des CS et vice-versa
  - pour une CNS :
    - des preuves très différentes pour la CS et la CN

- **Notions mathématiques**
  - propriétés de N, notion de pair/impair
  - calcul d'aires
  - notion d'adjacence
  - Récurrence sur des ensembles d'objets de taille n

SiRC. Exemple 4. La « Chasse à la bête »

(situation inventée par E. DUCHÊNE, chercheur en maths discrètes, étudiée dans maths-à-modeler)

On veut protéger un territoire quadrillé (5x5) d'un nuage de bêtes qui veulent se poser. On dispose pour cela d'un grand nombre de pièges. Les bêtes comme les pièges se posent exactement sur les cases (et non en travers). Si une case est occupée par un piège, aucune bête ne peut se poser en couvrant la case.

Il y a trois types de bêtes : domino, trimino long, trimino coudé (chacun correspond à un problème différent).

Question : ***quel est, pour chaque type de bêtes, le plus petit nombre de pièges qui protègera le territoire ?***

SiRC. Exemple 4. La « Chasse à la bête » (suite)
(voir articles pour plus de précisions)

Quelques éléments d'analyse

• Situation ludique impliquant un problème d'optimisation dans N
• Dévolution facile dès la fin du primaire, conjectures accessibles, preuves plus difficiles
• Recherche de la solution optimale par encadrements successifs du nombre cherché

• Notions en jeu (implicites pour faire des conjectures, à expliciter pour les preuves) :

borne inf, borne sup,
encadrements dans les entiers,
passage au « dual »

Exemples de SiRC (étudiées dans « maths-à-modeler ») avec indications des savoir-faire et notions mis en jeu et quelques références)

Pavages de polyminos / *algorithmes, théorèmes d'existence, récurrence* / coloration de graphes de grille (Grenier et Payan 1998, Deloustal-Jorrand, thèse Institut Fourier 2004, Grenier 2007 &2008)

Promenades dans une grille / *algorithmes, théorèmes d'existence* / chemin hamiltonien, coloration (in http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/LAVALISE/)

Dénombrements (mots, chemins, etc) / *modélisation, bijection* / analyse combinatoire (in http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/LAVALISE/)

La chasse à la bête / *optimisation dans N* / intervalles d'entiers, borne sup, borne inf (Duchêne, thèse en maths discrètes 2006, Grenier CERME8, 2012)

La roue aux couleurs / *modélisation, bijection* / arithmétique, nombres premiers, permutations (Godot, thèse Institut Fourier, 2005)

Objets géométriques discrets / *représentation (pixels), définition* / géométrie euclidienne (Ouvrier-Buffet, thèse Institut Fourier, 2003)

Déplacements dans le plan discret / *définition* / systèmes générateurs, minimaux, algèbre linéaire (Ouvrier-Buffet, thèse Institut Fourier, 2003)

Chemins eulériens, hamiltonniens / définition, modélisation/ graphes (Cartier, thèse Institut Fourier, 2008)

Exemples de SiRC (suite)

Les gardiens de musée / *optimisation* / triangulation d'un polygone, coloration (Groupe SiRC, IREM de Grenoble)

Polyèdres réguliers de l'espace / *définition, construction et preuve* / géométrie de l'espace, graphes planaires (Grenier et Tanguay, 2008 & 2010)

Polygones réguliers à sommets entiers / *récurrence, absurde* / géométrie combinatoire (Grenier et Payan, 1998)

Disques dans triangles ou carrés / *optimisation* / géométrie combinatoire, graphe (Grenier et Payan, 1998)

Partage d'un carré en n carrés / *induction* / suites, congruences, dénombrement, géométrie (Groupe SiRC, site de l'IREM de Grenoble, rapport activités 2012)

Jeu des carrés dans un rectangle / *stratégie* / algorithme d'Euclide (Colipan, thèse en cours, Institut Fourier)

Jeu de SET/ *démarche expérimentale*/ dénombrements, permutations (Giroud, thèse, Institut Fourier, 2011)

Jeu de la frontière / *stratégie, absurde* / convexité (Giroud, thèse, Institut Fourier, 2011)

Quelques textes généraux (en français) sur les SiRC (liste non exhaustive)

GRENIER D., PAYAN Ch. (1998) Spécificités de la preuve et de modélisation en Mathématiques Discrètes, *Revue de Didactique des Mathématiques* vol. 18.1, pp.59-100, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

GRENIER D. (1995) Savoirs mis en jeu dans des problèmes de combinatoire *in* Arsac G., Gréa J., Grenier D., Tiberghien A (eds) (1995). *Différents types de savoirs et leur articulation*, Grenoble, ed. La Pensée Sauvage.

GRENIER D., PAYAN Ch. (2003) Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation, *cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*, Paris, 19 Octobre 2002.

GRENIER D., PAYAN Ch. (2007) Des « situations recherche » pour l'apprentissage des savoirs transversaux, *actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF*, Sherbrooke, mai 2006.

GRENIER D. (2008) Expérimentation et preuve en mathématiques, in *Didactique, épistémologie et histoire des sciences*, collection « Science, histoire et société », direction Laurence Viennot, PUF.

GRENIER D. (2008) Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique, *Actes du colloque AMQ*, Sherbrooke, Québec, juin 2006.

Thèses contenant des études didactiques de SiRC (soutenues à l'Université Joseph Fourier, Grenoble)

Julien ROLLAND (1999). *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication.*

Cécile OUVRIER-BUFFET (2003) *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définition en mathématiques.*

Virginie DELOUSTAL-JORRAN (2004) *Etude épistémologique et didactique de l'implication en mathématique.*

Karine GODOT (2005) *Situations de recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation.*

Léa CARTIER (2008) *Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation.*

Michèle GANDIT (2008) *Étude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation.*

Nicolas GIROUD (2011) *Étude de la démarche expérimentale dans les Situations de recherche pour la classe.* Thèse de l'université Joseph Fourier.

Ximena COLIPAN (en cours, soutenance prévue en 2014) *Étude de SiRC basées sur des jeux combinatoires particuliers : les jeux de type Nim.*