Questions langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

Nivelles le 1er mars 2019

Christophe Hache
LDAR, Université Paris Diderot
IREM de Paris

- Langage : faculté que les hommes et les femmes ont à s'exprimer et à communiquer entre eux à l'aide d'une langue (lexique, grammaire etc.). C’est à la fois une activité individuelle (physique au moins) et une pratique sociale.
- De façon générale, chaque groupe social (notamment les mathématiciens) développe des pratiques qui lui sont propres, y compris des pratiques langagières.
- Pour un sujet donné, le langage n'est pas un média d'une pensée déjà constituée, ce n'est pas seulement une activité physique. C'est un outil de construction, de négociation et de transformation des représentations individuelles (celles du sujet considéré, celles des personnes avec qui il interagit) et collectives.

Analyse de pratiques langagières des mathématiciens

Comme tout groupe social les mathématiciens ont des pratiques langagières qui leur sont propres.

Si on se restreint aux définitions, propriétés et preuves, l’objet du discours est formel. Le formalisme est donc nécessaire, mais on ne peut parler / penser formellement.

On constate un mélange nécessaire et complexe entre formalisme et usage plus habituel de la langue, utilisation d'expressions courante pour dire le formel, usage formel de la langue.

La logique mathématique donne des outils d’analyse de ces pratiques langagières, d’explicitation du contenu formel.

Analyse de pratiques langagières des mathématiciens

Exemples :

- « *n* est un nombre qui s'écrit sous la forme 2*k* avec *k* entier »
- « Il existe un plan contenant un point donné et parallèle à un plan donné »
- « Il existe un point fixe appartenant à toutes les courbes C_t »
- « Si *n* est premier alors *n* est impair »
- « Soit *a* un réel quelconque et *b* un réel positif » ?

Analyse de pratiques langagières des mathématiciens

Exemples :

- « *n* est un nombre qui s'écrit sous la forme 2*k* avec *k* entier »

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad n = 2k$$

- « Il existe un plan contenant un point donné et parallèle à un plan donné »

$$\forall P \, \forall M \, \exists Q \;\; (P \,//\, Q) \wedge (M \in Q)$$

- « Il existe un point fixe appartenant à toutes les courbes C_t »

$$\exists M \, \forall t \;\; M \in C_t$$

- « Si *n* est premier alors *n* est impair »

$$\forall n \;\; (n \text{ premier} \Rightarrow n \text{ impair})$$

Analyse de pratiques langagières des mathématiciens

Exemples :

Remarque : Deux nombres impairs consécutifs peuvent s'écrire aussi $2k+1$ et $2k+3$ avec k entier et $k \geqslant 0$.

Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times p$. Leur somme $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Analyse de pratiques langagières des mathématiciens

Exemples :

- « *n* est un nombre qui s'écrit sous la forme 2*k* avec *k* entier »

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad n = 2k$$

- « Il existe un plan contenant un point donné et parallèle à un plan donné »

$$\forall P \, \forall M \, \exists Q \quad (P \,//\, Q) \wedge (M \in Q)$$

- « Il existe un point fixe appartenant à toutes les courbes C_t »

$$\exists M \, \forall t \quad M \in C_t$$

- « Si *n* est premier alors *n* est impair »

$$\forall n \quad (n \text{ premier} \Rightarrow n \text{ impair})$$

- « Soit *a* un réel quelconque et *b* un réel positif » ?

Ajout au document en ligne :

- Pour ces premières diapositives, voir Hache, C. (2015). Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec « avec ». *Petit x*, (97), 27-43. <hal-01397401>
- À propos de « fixe », « quelconque » et « soit » voir aussi Hache C. (2015) Logique, langage. Énoncés et preuves en mathématiques. In *Actes du 21e colloque de la Corfem, juin 2014*, IREM de Grenoble. <hal-01285113>... et la suite.

Analyse de pratiques langagières des mathématiciens

Formulation des preuves.

Analyse de pratiques langagières des mathématiciens

Exemple : une preuve de « Un nombre et son carré ont toujours même parité »

Analyse de pratiques langagières des mathématiciens

Exemple : une preuve de « Un nombre et son carré ont toujours même parité »

$$\dfrac{b \text{ et } b-1 \text{ consécutifs}, \qquad \forall m \forall n \,[m \text{ et } n \text{ consécutifs} \Rightarrow (m \text{ pair} \vee n \text{ pair})]}{b \text{ pair} \vee b-1 \text{ pair}}\ \forall\Rightarrow/$$

$\odot\, b$

$$\dfrac{\boxed{\phantom{b \text{ pair} \vee b-1 \text{ pair}}} \qquad \forall p \forall q \,[(p \text{ pair} \vee q \text{ pair}) \Rightarrow pq \text{ pair}]}{b(b-1) \text{ pair}}\ \forall\Rightarrow/$$

$$b^2 - b \text{ pair}$$

$$\dfrac{b^2 \text{ et } b \text{ ont même parité} \quad (*)}{\forall x\,(x^2 \text{ et } x \text{ ont même parité})}\ /\forall$$

Ajout au document en ligne :

- Plus de précisions dans : Hache C., Mesnil Z. (2017) Pratiques langagières et preuves. In *Actes du 22e colloque de la Corfem, juin 2015*, IREM de Nîmes. <hal-01285116>

Propriété : Un entier et son carré ont toujours même parité.

- **Preuve :** L'un des deux entiers n ou $n-1$ est pair, donc l'entier $n^2-n=n(n-1)$ est pair.

- **Preuve :**

Un entier n est soit pair, *i.e.* divisible par 2, soit impair, *i.e.* $n-1$ est divisible par 2 ; donc, quel que soit n, $n(n-1)$ est pair. Or dire qu'un entier n et son carré n^2 ont même parité signifie que leur différence $n^2-n=n(n-1)$ est paire, cqfd.

- **Preuve :**

Dans la suite des nombres entiers, les nombres sont alternativement pairs et impairs.

Dire que les nombres entiers a et b ont même parité signifie que leur différence est paire. Avec $a=b^2$, la différence s'écrit $b(b-1)$ produit de deux entiers consécutifs, l'un des deux est donc pair, et donc ce produit est pair.

- **Preuve :**

Un entier n est dit *pair* s'il est divisible par 2, et *impair* sinon. On dit que deux entiers ont *même parité* si leur différence est paire. Cela revient à dire qu'ils sont tous deux pairs ou tous deux impairs. Montrons que n^2 et n ont même parité. Cela revient à dire que n^2-n est pair. Or $n^2-n=n(n-1)$. Comme n et $n-1$ sont deux nombres consécutifs, ils n'ont pas même parité (leur différence est 1, qui est impair). L'un d'entre eux est donc pair, et donc divisible par 2. Le produit $n(n-1)$ est donc aussi divisible par 2. Donc n^2-n est pair.

Analyse de pratiques langagières des mathématiciens

Premières hypothèses côté enseignants :

- Les outils logiques, l'analyse de formulation, permettent une réflexivité aux enseignants de mathématiques sur leurs pratiques langagières,
- Cette réflexivité permet une attention plus grande aux formulations (aux implicites, aux quantifications et à leurs formulations par exemple), et une meilleure réactivité aux questions ou difficultés d'ordre langagier pour les élèves.

Quel travail avec les élèves ?

Texte, auteur et lecteur

Lien lecture-écriture.

« auteur » : a une intention (notamment vis-à-vis du lecteur), est conscient des effets produits (ou au moins du fait que son texte aura des effets sur le lecteur, doit avoir un effet), a une stratégie d'écriture (importance de la relecture, de la révision), du recul sur son activité d'écriture et son écrit.

Le travail collectif (écriture à plusieurs mains, écrit individuel discuté à plusieurs, écriture planifiée collectivement, relecture entre pairs, etc.) est central : explicitation des contraintes, prise de recul, compréhension et intériorisation des effets de l'écrit sur le lecteur (ce sujet lecteur n'étant plus le seul enseignant), etc.

Ajout au document en ligne :

- Plus de précisions dans : Hache C. (à paraître) Lecture et écriture en didactique du Français, questions pour la didactique des mathématiques, *Actes de la 19e école d'été de didactique des mathématiques, Paris, août 2017*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Expérimentations exploratoires

- **Formulation-reformulation**

Exemple n°1 (évolution d'une formulation de théorème pendant une séance)

« Dans un triangle rectangle, les côtés perpendiculaires au carré sont égaux à l'hypoténuse au carré »

« Dans un triangle rectangle, la somme des côtés perpendiculaires au carré est égale à l'hypoténuse au carré » (suggestion élève)

« Dans un triangle rectangle, la somme des côtés de l'angle droit au carré est égale à l'hypoténuse au carré » (question professeur)

« Dans un triangle rectangle, la somme des *carrés* des côtés de l'angle droit est égale au *carré* de l'hypoténuse » (ambiguïté soulignée par l'enseignant)

« Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit est égale au carré de la longueur de l'hypoténuse » (question de l'enseignant sur ce qui est mis au carré)

→ Première formulation retenue

Expérimentations exploratoires

- **Formulation-reformulation**

Exemple n°1 (évolution d'une formulation de théorème pendant une séance)

« Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des longueurs des côtés de l’angle droit est égale au carré de la longueur de l’hypoténuse »

Critiques des élèves :

« C'est long » → « Comment faire plus court ? » → « en écrivant "en mathématiques" ».

« Il n'y a pas "si alors" ».

Deux autres énoncés sont finalement inscrits dans le cahier de cours :

« Si un triangle ABC est rectangle en A, alors on a :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$ » (accompagné d'un triangle rectangle tracé à main levée de sommets A, B et C).

« Si un triangle est rectangle, alors la somme des carrés des longueurs des côtés de l’angle droit est égale au carré de la longueur de l’hypoténuse ».

Texte, auteur et lecteur

- *Textes de démonstrations*

Texte devant permettre au lecteur de :

1) reconstituer la structure formelle de la preuve (succession de pas de déduction),

2) se convaincre qu'elle est valide,

3) (optionnel) retrouver l'heuristique de la démonstration.

- Il existe aussi des outils logique pour décrire les preuves (et leurs formulations)

Texte, auteur et lecteur

- Contraintes spécifiques (contenu, écriture, lecture).
- On retrouve cependant certaines caractéristiques du jeu entre auteur et lecteur : liberté de l’auteur, choix et intentions vis à vis du lecteur (lecteur modèle, variable d’un auteur à l’autre) ; attention et interprétation du lecteur.
- Cela permet une revisite et des questionnements sur l’apprentissage de la démonstration (qui comprend inévitablement une dimension langagière).
- Pistes de travail avec les élèves et expérimentations exploratoires.

Expérimen

- **Formulation-refor**

Exemple n°1bis (théorèmes, formulations cahiers)

II. Propriété

On va écrire plusieurs formulations différentes de la propriétés de Thalès.

propriétés :

On a : - deux demi-droites d'origine A nommée [AB) et [AC).
- un point M qui appartient à la demi droite [AB).
- un point N qui appartient à la demi-droite [AC) tel que les droites (BC) et (MN) soient parallèles.

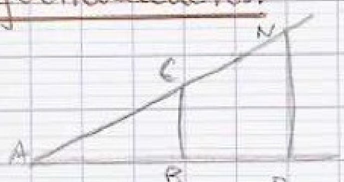
Alors les longueurs des côtés du triangle AMN sont proportionnelles aux longueurs des côtés du triangle ABC.

Autre formulations:

On a : - un triangle ABC et un triangle AMN tels que : $M \in [AB)$ et $N \in [AC)$.

Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors le triangle AMN est une réduction ou un agrandissement du triangle ABC.

Autres formulations:



On sait que : (BC) // (MN)

Alors, le triangle AMN est une réduction ou un agrandissement du triangle ABC.

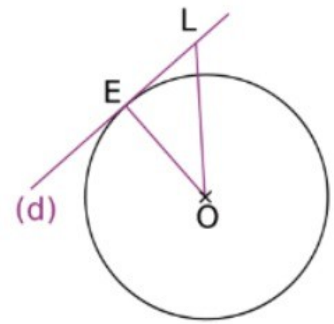
Expérimentations exploratoires

- **Formulation-reformulation**

Exemple n°2 (démonstration)

Exercice 1

Sur la figure ci-contre, la droite (d) est la tangente au cercle en E.
Le point L appartient à la droite (d) et l'angle $\widehat{EOL}$ mesure 38°.
En justifiant précisément, donner la mesure de l'angle $\widehat{ELO}$.



on sait que $\widehat{EOL}$ égale à 38° et que $\widehat{OEL}$ égale à 90°
Alors : 90 - 38 = 52°
Donc l'angle $\widehat{ELO}$ égale à 52°

On sait que $\widehat{EOL}$ est égale à 38° et que $\widehat{OEL}$ est égale à 90° car la droite (d) est tangente au cercle O donc elle est perpendiculaire à la demi droite (OE). $\widehat{LEO}$ est donc un angle droit

La somme des angles d'un triangle doivent être égale à 180°.
Alors 90 - 38 = 52°
90 + 38 + 52 = 180°
Donc l'angle $\widehat{EOL}$ est égale à 52°.

Ajout au document en ligne :

- Plus de précisions sur les exemples 1 et 1bis dans dans : Hache et al. (2018). Formulations et reformulations, un travail collectif en mathématiques. *Au fil des maths*, n°528 Mathématiques et langage, APMEP <afdm>

Conclusions, questions

Pistes de travail : poursuite de l'analyse des pratiques langagières (mathématiciens, manuels, enseignants), poursuite de la réflexion sur les outils, de la formation des enseignants.

Travail en classe explicite, réflexif et collectif ?

Formulation de nouvelles questions (non exhaustif) :

- Quel travail de lecture (pour les élèves) en mathématiques ? Quel travail sur la lecture et la compréhension (avec les élèves) ?
- Les élèves écrivent, mais quel travail de l'écriture en mathématiques ? Posture d'auteur ?
  Travail de textes sur le temps long, réécriture, travail réflexif, travail collectif, « publication » ?

Contrôle du lien avec l'apprentissage « des mathématiques »