

Catherine Houdement

LDAR, Universités Paris Diderot et Rouen, IUFM

CONNAISSANCES CACHÉES ET RÉOLUTION DE PROBLÈMES

CREM Nivelles 23 novembre 2012

LE PRÉTEXTE

- ✗ Problèmes source et finalité d'apprentissage
- ✗ Le paradoxe
 - + Pour apprendre des mathématiques, il faut résoudre des problèmes
 - + Pour résoudre des problèmes, il faut savoir des mathématiques
- S'intéresser aux **problèmes de réinvestissement**
- Problèmes arithmétiques « *word problems* » incontestés et usuels

LE CONTEXTE

Différenciation scolaire : profits différents que les élèves tirent des « mêmes » enseignements

- ✘ Approches sociologiques : « le faire et l'apprendre » (Bautier 2006, Bonnery 2007, Rochex & Crinon 2012 ...)
- ✘ Approches de psychologie cognitive : Julo (1995), Clément (2009)
- ✘ Approches de didactique des maths :
 - + Sur institutionnalisation: Perrin 1993, Butlen & Pézard 2003, Pézard & al 2012
 - + Enjeux cachés d'apprentissage : Castela (2008)

LA QUESTION

Quelles « idées », dans le temps court de la résolution d'un problème numérique de réinvestissement, sont susceptibles de provoquer une avancée vers la réponse ou au contraire un blocage ?

Regarder didactiquement le point de vue de l'élève....

CADRE THÉORIQUE

- ✘ Mémoire et schémas de problèmes (Julo 1995) ;
- ✘ Champs conceptuels des structures additives et multiplicatives (Vergnaud 1990)
- ✘ Travail privé, travail public (Margolinas 1993, Coppé 1995)
- ✘ Inférences et contrôles (Houdement 2007)

MÉMOIRE DES PROBLÈMES (JULIO 1995)

Un exemple pour illustrer

Calculez le **nombre de tulipes dans UN massif** dans les configurations a b c d :

- a) C'est un massif de fleurs, formé de 60 tulipes rouges et de 15 tulipes jaunes.
- b) Voici un massif de 60 rangées de 15 tulipes.
- c) C'est un massif de 60 fleurs, formé de tulipes et de 15 jonquilles.
- d) Il y a 60 tulipes organisées en 15 massifs identiques.

CHAMP CONCEPTUEL (VERGNAUD 1990)

« On appelle champ conceptuel un ensemble dont le traitement implique des schèmes, concepts et théorèmes, en étroite connexion, ainsi que les représentations langagières susceptibles d'être utilisées pour les représenter »

Laborde & Vergnaud (1994)

- ✘ Un concept est le triplet
 - + Situations qui donnent du sens au concept
 - + Invariants opératoires, modèles implicites d'action
 - + Formes langagières et non langagières qui représentent symboliquement le concept, ses propriétés, les situations, les procédés de traitement

TRAVAIL PUBLIC, TRAVAIL PRIVÉ

- ✘ Avoir accès à la pensée privée : analyser les brouillons
- ✘ Distinguer le *résultat* (ici un calcul) de la *réponse* (ici une phrase)
- ✘ Étudier les *vérifications* qui permettent la *rectification* (Margolinas 1993, Coppé 1995)
 - + Vérification (assure la plausibilité)
 - + Preuve (assure la certitude)

NATURES DES CONTRÔLES

- ✘ Inférence et contrôle **sémantique** : *partager c'est une division ; fois c'est multiplier; si on fait une multiplication on va trouver plus*
- ✘ Contrôle **pragmatique** : calcul contrôlé par comparaison avec connaissance de la réalité évoquée, accepté ou rejeté
- ✘ Contrôle **syntaxique** : retour sur calcul; équivalence entre écritures mathématiques :
 - + « *il faut faire 573 plus quelque chose égale 1260* »
ET calcul de $1260-573$;
 - + *Pour 1860 voitures en cartons de 6* : « *j'ai essayé de faire 6 fois quelques chose* » **ET** calcul de $1860 : 6$

MÉTHODOLOGIE

- ✘ Entretiens individuels de type explicitation (Vermersch 1994) + accès brouillon
- ✘ Après résolution individuelle de problèmes arithmétiques ordinaires, du quotidien de la classe
- ✘ 13 élèves dans 2 classes de cycle 3 et 11 protocoles
- ✘ Recherche d'invariants inter-élèves ou de régularités individuelles

QUELQUES RÉSULTATS

1. Inférence automatique d'un traitement adapté (opération...)
2. Utilisation des contrôles
3. Une méthode expérimentale sur les opérations
4. Un défaut de *qualification*
5. Un défaut de traitement sémiotique

1. Inférences « automatiques »

L'élève ne peut pas expliquer les raisons de son choix : sa réponse est instantanée, par exemple :

C.H : Comment tu sais pour un problème que c'est moins / plus / fois ?

Victor CE2A : Bah, quand j'ai la question je sais moins / plus / fois.

« la vraie compréhension n'a pas de mémoire. Dès que nous avons compris quelque chose, nous oublions comment nous sommes parvenus à cette compréhension ou plus exactement nous interprétons la démarche qui nous a conduits à l'état actuel de notre compréhension à la lumière de ce nouvel état.».

Julo (1995, p.86)

2. Jeux sur les contrôles

Résultat calculé en conflit avec contrôle pragmatique

Exemple Deborah (grade 5) face à « 25 tables pesant 300 kg » : elle infère l'opération adaptée, mais doute.....après avoir calculé

Deborah je vais faire 300 divisé par 25

(elle pose la division 300 par 25) on trouve 12

CH alors qu'est ce que c'est 12

Deborah le poids d'une table

CH es tu sure de ça

Deborah non ça m'étonnerait

CH pourquoi ça t'étonnerait

Deborah bah c'est beaucoup / c'est pas assez je veux dire...

Conflit réglé par contrôle sémantique

Deborah toujours

CH tu doutes parce que tu trouves que c'est pas assez 12 pour une table
? Est ce que tu doutes de l'opération que tu as faite ?

Deborah bah no...non

CH tu penses que c'est l'opération qui va te permettre de trouver le
résultat

Deborah oui je pense

CH pourquoi tu penses que c'est l'opération qui va te permettre de trouver
le résultat

Deborah bah parce qu'on peut faire une multiplication / 300 multiplié par
25 c'est pas possible/ c'est beaucoup trop/ ni une soustraction /donc
je pense faire une division / et aussi parce qu'il faut partager/ il faut /
oui / faut partager

ON NOTE que Deborah était déjà sûre (de façon spontanée) du champ
conceptuel (multiplication ou division)

Inférence spontanée du « bon » champ conceptuel

Contrôles sémantique et pragmatique

Exemple Ludivine (grade 5)

C.H. : On a besoin de 3 œufs pour une brioche et on fait 8000 brioches.

Ludivine : C'est un partage.

C.H. : C'est un partage ? Tu fais un dessin si tu veux.

Ludivine : Oui, il faut que je fasse 3 œufs pour une brioche etc...

C.H. : Bon, ça va faire combien d'œufs : 3 œufs pour une brioche, combien pour 8 000 ?

Ludivine : Je sais pas // C'est une multiplication.

C.H. : C'est un partage ou une multiplication ?

Ludivine [silence, puis lentement] : Si on fait une division, on va peut-être trouver moins / que si on fait une multiplication on va trouver plus.

C.H. : Alors ?

Ludivine : Bah, une multiplication.

3- Une stratégie peu connue (?) citée (?) : **« démarche expérimentale »**

- ✘ Certains élèves testent les opérations (toutes ou celles du champ conceptuel inféré)
- ✘ En mettant en œuvre différents contrôles pour se décider : pragmatiques, sémantiques, voire syntaxiques
- ✘ Ils font des calculs avec UNE opération et décident de conserver le résultat en fonction de contrôles pragmatiques et sémantiques ; résoudre des conflits
- ✘ Avec limite: il faut que le résultat soit calculable
- ✘ Une condition nécessaire pour cette démarche : la qualification

4- La qualification

- ✗ Savoir contextualiser les nombres donnés ou calculés, savoir les référer à une grandeur
- ✗ Qualification faible
 - Pas 30, mais 30 euros
- ✗ Qualification (complète)
 - + 30 euros, le prix qu'ont payé les enfants

✘ Nicolas (grade 5) sur le problème

Au cinéma « royal ciné » un adulte paye 6€ par séance et un enfant paye 4€ par séance

A la séance de l'après-midi, il y avait 50 adultes et des enfants.

A la séance du soir, il y avait 15 adultes et 20 enfants.

La recette de la journée est 542€

Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ?

Nicolas CM1 bah là j'ai essayé de faire / parce que un adulte c'est 6€ et un seul enfant 4€/ un adulte c'est 6€ **donc j'ai fait 15 fois 6, 90** / ensuite il y avait 20 enfants à la séance / comme c'était 4€ **j'ai fait 20 fois 4, 80** / euh/ il y avait 50 adultes donc j'ai fait 50 fois 6, 300 / et là il demandait combien il y a d'enfants à cette séance / donc j'ai additionné ces 3 là et j'ai trouvé 542 / j'ai trouvé la recette de la journée / **j'ai trouvé 72 enfants**

Nicolas a bien calculé, ce calcul était nécessaire,
mais il a mal qualifié le résultat du calcul

CH alors là quand tu / est ce que.. / quand tu calcules cela / qu'est ce que tu calcules / ça correspond à quoi **le nombre 90** que tu cherches
Nicolas (silence)

CH le nombre 90 que tu as trouvé là / si tu pouvais me donner une petit phrase qui va avec ce nombre là

Nicolas (silence)

CH tu vois pas / donc quand tu as fait le calcul tu avis envie de faire ce calcul là mais tu vois pas à quoi correspond 90

Nicolas non

CH et ce calcul là / est ce que tu vois à quoi il correspond /

Nicolas à **4 fois 20**

CH mais par rapport au problème, qu'est ce que tu as calculé par rapport au problème

Nicolas bah 4 € et 20 enfants

CH et finalement quand tu fais 4€ et 20 enfants qu'est ce que tu obtiens à la fin

Nicolas 80€

**Nicolas nous montre (1) qu'il ne qualifie pas de lui-même ,
(2) qu'il a du mal à qualifier, même faiblement**

Corentin (grade 4)

Le libraire dit : « Avec mes 2255 €, si j'achète 36 livres d'art à 62 €, il me restera 13 €. »

A-t-il raison ?

Dit pendant l'entretien

en fait dans ma tête quand je lis / là il y a 2255 € / ça c'est clair / y a 36 livres ça coûte 62 €/ après je calcule ces deux là / après ça fait le nombre d'euros que je dois payer / et après je compare les deux que j'ai / le nombre d'euros et ce que j'ai trouvé

Écrit sur son brouillon

2255 : euros

36 : livre-darts

62 : prix des livre-darts

Corentin (1) sait que qualifier aide à résoudre
et (2) sait qualifier

DÉFICIT SYNTAXIQUE

Corentin (grade4) en fait j'ai d'abord additionné 60 billets de 5 / et j'ai vu que ça faisait 300 / et j'ai dit que 20 fois quelque chose était égal à 300

Problème non résolu par Corentin

En question

- Disponibilité de $20 \times n = 300$

Permettrait recherche par essai

- Transformation en $n = 300/20$

Permettrait calcul direct

CONCLUSIONS

Accès à des connaissances ignorées

1. non prises en charge explicitement par l'institution, **sans doute** nécessaires à la réussite et **a priori** enseignables (contrôle syntaxique)
2. auto-construites par les élèves (jeu sur les contrôles) **qui semblent efficaces**

Limites sur résultats : quelques élèves, effet enseignant

Finalement hypothèses de recherche du primaire au collège et au-delà

DIALECTIQUE DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE ET CONTRÔLES

- ✗ En général peu de contrôles de la part des élèves sur leur activité mathématique
- ✗ Apprendre tôt à contrôler un résultat pour en faire une réponse
 - + Situations d'apprentissage (TSD)
 - ✗ Un milieu matériel réel qui rétroagit
 - ✗ Un milieu matériel de savoirs déjà là....
 - + Problèmes a-typiques (Programmes 2002 France)
 - + Problèmes arithmétiques ordinaires : le test d'opérations dans un champ conceptuel
- ✗ Un invariant effectif des sciences dont les mathématiques : la démarche expérimentale....

SUR LA QUALIFICATION

- ✘ Écho d'un changement plus vaste ? Relation qui s'est distendue entre nombres et grandeurs depuis maths modernes (Chambris 2008)
- ✘ A définir :
 - + Curricula : introduction explicite dans les programmes du calcul sur les grandeurs (Chambris 2008)
 - + Formation : vigilance des enseignants sur utilité de qualification complète (au départ et en cours de résolution)
 - + Extension des recherches au-delà du primaire
 - ✘ qualifier comme dialectique sémantique/syntaxique
 - ✘ qualifier =mettre à sa juste place

SUR LE SÉMIOTIQUE : HYPOTHÈSES À TESTER

Dans l'enseignement introduction de, travail sur

✘ Écritures pré-algébriques

$$25 + ? = 100 \quad 45 \times a = 1575$$

✘ **Discours** et techniques associés

45 fois quelque chose égale 1575

J'essaie 10, 50....

✘ Exercices **écrits** de traitement de ces écritures

$$25 + b = 100 \quad 100 - 25 = b$$

$$45 \times a = 1575 \quad 1575 : 45 = a$$

BIBLIOGRAPHIE

- Bautier, E. (2006). *Apprendre à l'école, apprendre l'école. Des risques de construction d'inégalités dès l'école maternelle*. Lyon : Chronique Sociales.
- Bonnery S. (2007) *Comprendre l'échec scolaire* . La Dispute
- Butlen, D. & Pézard, M. (2003). Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 23.1. 1-40
- Burgermeister P.F. & Coray M. (2008), Processus de contrôle en résolution de problèmes dans le cadre de la proportionnalité des grandeurs : une analyse descriptive. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 28/1. 63-106
- Charles-Pézard M., Butlen D., Masselot P. (2012) *Professeurs des écoles débutants en ZEP*. Grenoble: La Pensée Sauvage
- Clément, E. (2009). *La résolution de problème : à la découverte de la flexibilité cognitive*. Paris : Armand Colin.
- Coppé, S. (1995). Types de connaissances mises en oeuvre par les élèves dans la détermination de la composante publique du travail . In *Différents types de savoirs et leur articulation*. 129-144. Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

Houdement, C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N*, 71, 7-23

Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 15. 67-96

Houdement, C. (2012). Démarche expérimentale en résolution de problème. *Actes EMF Genève février 2012*

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Mercier, A. (1998). La participation des élèves à l'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18 (3), 279-310.

Perrin, M.J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement de mathématiques à des classes « faibles ». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13 (1-2), 5-118.

Rochex J.Y. & Crinon J. (dir, 2012) *La Construction des inégalités scolaires. Au cœur des dispositifs d'enseignement*. Rennes: PUR

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2/3), 133-170.

Vermersch, P. (1994). *L'entretien d'explicitation*. Paris : ESF.