

Rallye Mathématique Transalpin

Section belge francophone



Atelier du 26 août 2014

Congrès de la SBPMef

3. LES TROIS MAISONS (Cat. 3, 4, 5)



Trois commerçants, un Suisse, un Italien et un Français habitent dans ces trois maisons de la même rue, qui sont de couleurs différentes.

Le boucher habite dans la maison jaune qui est à côté de la rouge mais qui n'est pas à côté de la verte.

L'épicier, qui n'est pas Suisse, habite à côté du Français.

L'Italien habite au numéro 21 et sa maison n'est pas jaune.

Quelle est la nationalité du pharmacien et de quelle couleur est sa maison ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Reconstituer une répartition de 3 personnes de nationalités différentes, dans trois maisons de couleurs différentes, de 3 métiers différents à partir d'affirmations, négations et relations de voisinage

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a trois nationalités, trois professions et trois couleurs à partir d'une première lecture.
- Lire une à une les informations, constater qu'il faudra parfois en combiner plusieurs pour pouvoir déterminer progressivement les caractéristiques de chaque maison et chaque individu. Par exemple : la maison jaune à côté de la rouge n'est pas à côté de la verte, implique que la rouge est au milieu et que la jaune et la verte sont aux extrémités ; puis l'Italien habitant au numéro 21, qui est à une extrémité dans une maison qui n'est pas jaune est donc dans la maison verte. On sait alors que le boucher de la maison jaune est au 25, que la maison du milieu est rouge et que l'Italien habite au 21 dans la maison verte. Comme il n'est pas suisse ni français, c'est lui l'épicier et il ne reste qu'un choix pour la maison rouge : c'est celle du pharmacien, qui est français.

Ou, émettre une hypothèse concernant la première information et la vérifier avec les autres ou la rejeter, puis procéder, pas à pas, jusqu'à la description complète de chaque maison.

La configuration définitive est, pour les couleurs : 21 vert 23 rouge 25 jaune
 pour les nationalités : Italien Français Suisse
 pour les professions : épicier pharmacien boucher

Attribution des points

- 4 La solution : « Le pharmacien est français et habite la maison rouge », avec une explication consistant à donner la configuration complète et une description d'une au moins des relations logiques (par exemple : l'épicier est italien parce qu'il n'est pas suisse et qu'il habite à côté du Français) avec des termes du genre « parce que », « vu que », « comme il n'est pas ... »

7. CARTABLE RMT (Cat. 4, 5, 6)

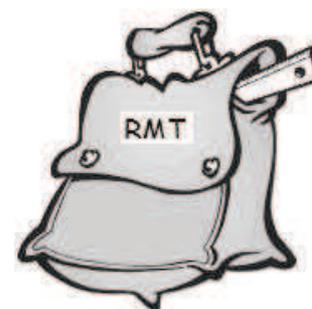
Philippe et Pierre ont acheté le même cartable de la marque RMT. Dans son cartable Philippe a mis 2 classeurs, 6 cahiers et 3 livres de classe.

Pierre a déposé dans son cartable, 1 classeur, 8 cahiers et 2 livres.

Pierre et Philippe savent que le poids d'un classeur est égal au poids de 4 cahiers mais est aussi égal au poids de 2 livres.

Qui a le cartable le plus lourd ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.



ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : équivalence, addition, multiplication

Analyse de la tâche

- Comprendre que le poids du cartable vide n'intervient pas dans la comparaison puisque les deux amis possèdent le même cartable.
- Dresser la liste du matériel de Philippe et Pierre, par exemple sous la forme d'un tableau :

Philippe	Pierre
2 classeurs	1 classeur
6 cahiers	8 cahiers
3 livres	2 livres

- Dédurre des informations de l'énoncé que le poids d'un livre est égal au poids de 2 cahiers
- Rechercher les équivalences choisir une unité de mesure et exprimer chaque matériel avec cette unité, par exemple en cahiers (la plus petite unité commune). Additionner les cahiers pour chaque ami. Exprimer ce travail par exemple sous la forme d'un tableau :

Philippe		Pierre	
2 classeurs	8 cahiers	1 classeur	4 cahiers
6 cahiers	6 cahiers	8 cahiers	8 cahiers
3 livres	6 cahiers	2 livres	4 cahiers
Total	20 cahiers	Total	16 cahiers

Ou : repérer des équivalences, et ôter ce qui est commun (mise en évidence).

Philippe		Pierre	
2 classeurs	1 classeur	1 classeur	0 classeur
6 cahiers	0 cahier	8 cahiers	2 cahiers
3 livres	1 livre	2 livres	0 livre

- Dédurre que le cartable de Philippe est plus lourd que celui de Pierre puisqu'un classeur (soit 4 cahiers) est plus lourd que 2 cahiers.

Chercher les équivalences et les exprimer dans la plus petite unité, par exemple sous forme de tableau.

Philippe		Pierre	
1 classeur	4 cahiers	0 classeur	
0 cahier		2 cahiers	2 cahiers
1 livre	2 cahiers	0 livre	
Total	6 cahiers	Total	2 cahiers

Ou : attribuer un poids à un des éléments et déterminer le poids des deux autres. Par exemple 200 g pour un classeur ; 50 g pour un cahier ; 100 g pour un livre. Ensuite calculer le poids de chaque cartable :

- pour Philippe : $2 \times 200 + 6 \times 50 + 3 \times 100 = 1000$ (en g)
- pour Pierre : $200 + 8 \times 50 + 2 \times 100 = 800$ (en g)

Conclure que le cartable le plus lourd est celui de Philippe.

Attribution des points

4 Solution correcte (Philippe possède le cartable le plus lourd) avec explications complètes de la démarche et justification

Niveau : 4, 5, 6

Origine : Belgique

6. DES CHIFFRES ... ET ENCORE DES CHIFFRES (Cat. 4, 5, 6)

Jules a écrit un journal de 260 pages.

Pour numéroter les 13 premières pages (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13) il a écrit 17 chiffres : six fois le chiffre 1, deux fois le chiffre 2, deux fois le chiffre 3 et une fois chacun des autres chiffres 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 0.

Combien de chiffres Jules a-t-il écrit pour numéroter toutes les pages de son journal, de la page 1 à la page 260 ?

Expliquez comment vous avez obtenu votre résultat.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique :**

Dénombrer ou compter les chiffres utilisés pour écrire les nombres de 1 à 260

Analyse de la tâche

- Écrire la liste des nombres de 1 à 260 et comptabiliser ensuite le nombre de chiffres utilisés.
Cette procédure qui est fastidieuse si elle est conduite par une seule personne peut être plus facilement menée à son terme si les élèves se répartissent le travail en scindant la plage des nombres de 1 à 260.
Cette procédure qui permet d'entrer dans la résolution peut aussi être abandonnée en cours de route au profit de la procédure qui suit
 - comptabiliser les nombres de 1 à 260 qui s'écrivent avec :
 - 1 chiffre : 9 (de 1 à 9)
 - 2 chiffres : 90 (de 10 à 99, c'est-à-dire 99 - 9)
 - 3 chiffres : 161 (de 100 à 260 c'est-à-dire 260 - 99)Calculer le nombre de chiffres utilisés : $9 + (90 \times 2) + (161 \times 3) = 9 + 180 + 483 = 672$
- Ou : Comptabiliser par chiffres des unités : 260 ; par chiffres des dizaines : $260 - 9 = 251$ et par chiffres des centaines $260 - 99 = 161$, ce qui revient à $260 + 251 + 161 = 672$

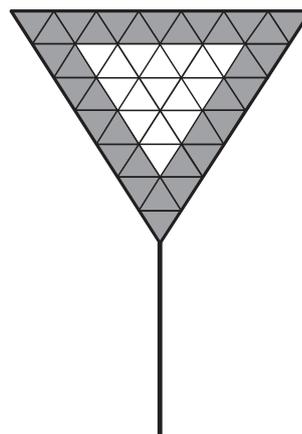
Attribution des points

- 4 Réponse correcte (672) avec explications claires (par exemple, à partir de la liste complète des nombres avec dénombrement des chiffres, ou calculs par plages de nombres à un chiffre, deux chiffres ou trois chiffres)

14. DROLE DE PANNEAU ! (Cat. 7, 8, 9)

Ce panneau triangulaire est formé de petits triangles équilatéraux, tous isométriques.

16 d'entre eux forment un triangle intérieur et les 33 autres constituent la bordure extérieure à ce triangle.



Est-il possible de fabriquer un autre panneau triangulaire, de taille différente mais, pour lequel la bordure extérieure, toujours de même largeur, aurait le même nombre de petits triangles que la partie intérieure ?

Expliquez votre démarche et justifiez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Arithmétique : opérations dans l'ensemble des nombres entiers
- Algèbre : recherche de fonctions, égalité de fonctions, éventuellement résolution d'équation

Analyse de la tâche

- Comprendre ce qu'on entend par « bordure » et « triangle intérieur » en vérifiant les données : 16 et 33 triangles.
- Dessiner d'autres figures, constater, au passage, que la mesure du côté du triangle intérieur vaut toujours 3 de moins que celle du triangle extérieur.
- Relever les dimensions et aires correspondantes des deux triangles et de la bordure, par exemple :

mesure du côté

du triangle extérieur : 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

mesure du côté

du triangle intérieur : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

aire du grand triangle : 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144

aire du triangle

intérieur (I): 0 1 4 9 16 25 36 49 64 81

aire de la bordure (B): 9 15 21 27 33 39 45 51 57 63

et éventuellement ajouter une ligne pour la différence entre l'aire de la bordure et celle du triangle intérieur :

différence B – I 9 14 17 18 17 14 9 2 -7 -21

- L'observation des dernières lignes mène à la conclusion qui s'impose : il n'y a pas de valeur qui permette d'obtenir un panneau répondant à la condition fixée. C'est pour un triangle intérieur de côté 7 que I et B sont les plus proches (49 et 51), au-delà, c'est I qui l'emporte (fonction « élever au carré ») sur B (fonction « multiplier par 6 et ajouter 9 »).

Ou : par un raisonnement algébrique, montrer que, si les aires I et B étaient égales, du fait que les aires des triangles exprimées en petits triangles sont des carrés, on aurait une équation du type $2n^2 = m^2$, ou $m = n\sqrt{2}$. On serait alors en présence d'une contradiction puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel et m et n devraient être des nombres naturels. Ce raisonnement permet d'affirmer qu'il n'y a pas de solution, même pour des bordures plus larges.

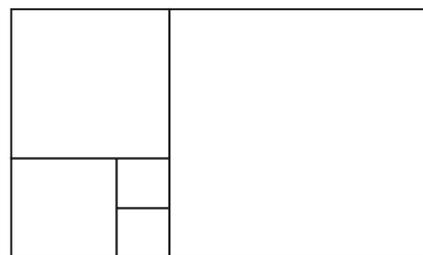
Attribution des points

4 Réponse correcte (impossible) avec une des justifications ci-dessus ou une autre, rigoureuse et détaillée

16. LES CARRÉS D'ALEX ET FRANÇOIS (Cat. 7, 8, 9, 10)

Alex et François considèrent la figure suivante représentant un grand rectangle formé de 5 carrés. Alex affirme que s'il connaît le périmètre du rectangle, il peut calculer son aire et il donne un exemple avec un périmètre de 130 cm.

François prétend qu'il peut calculer le périmètre du rectangle à partir de son aire et il donne un exemple avec une aire de 1440 cm².



Quelle est l'aire calculée par Alex et quel est le périmètre obtenu par François.

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Géométrie : rectangle et carré.
- Grandeurs et mesures : mesures de périmètres et aires.

Analyse de la tâche

- Observer que le rectangle est formé de 5 carrés : deux petits carrés dont les côtés peuvent être pris comme unité de longueur, un carré de côté double, un carré de côté triple et un grand carré de côté 5 unités.
- Remarquer que le rectangle a pour périmètre $2 \times (5 + 8) = 26$ (en unités) et qu'il contient $2 + 4 + 9 + 25 = 40$ carrés unité.
- Puisque le périmètre d'Alex vaut 130 cm, il a pris $130/26 = 5$ (en cm) pour côté d'un carré unité qui a donc une aire de 25 (en cm²) et dans l'exemple d'Alex, le rectangle a une aire de $25 \times 40 = 1000$ (en cm²).
- Puisque l'aire de François vaut 1440 (en cm²), il a pris dans son exemple $1440/40 = 36$ (en cm²) pour aire d'un carré unité et 6 cm comme unité de longueur. Le périmètre du rectangle qu'il doit donner est donc $26 \times 6 = 156$ cm.

Attribution des points

4 Les deux réponses (1000 cm² et 156 cm) justifiées

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Ticino