

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

Résolution d'équations et déduction naturelle

Vincent Degauquier

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

28 août 2018

Sommaire

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

- 1 Introduction
- 2 Résolution d'équations
- 3 Déduction naturelle
- 4 Mécanismes logico-déductifs
- 5 Conclusion

Introduction

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

De nombreux élèves rencontrent des difficultés quant à la maîtrise des mécanismes logico-déductifs inhérents à l'activité mathématique. Par ailleurs, ces mécanismes se situent bien souvent en filigrane de l'activité mathématique ; ce qui les rend difficilement identifiables.

Propos

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

Notre exposé a pour objectif de mettre en exergue quelques-uns des mécanismes déductifs propositionnels qui peuvent intervenir dans le cadre de la résolution d'équations. En outre, nous montrerons que ces mécanismes sont variés et relèvent de différents niveaux de complexité.

Méthode

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

Pour ce faire, nous analyserons trois résolutions d'équations à la lumière de la déduction naturelle. Aussi, nous proposerons une traduction de ces résolutions d'équations s'appuyant sur le formalisme de la déduction naturelle.

Résolution d'équations

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

La *résolution d'une équation* dont la seule variable est α consiste à identifier, parmi les valeurs assignables à α , celles qui rendent l'équation vraie.

En pratique, résoudre une telle équation revient généralement à déterminer une expression logico-arithmétique qui lui est équivalente et qui permet d'en identifier aisément les solutions.

Illustration

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

La résolution de l'équation $x^2 + 5x + 6 = 0$ peut s'effectuer en montrant, par le calcul du discriminant, l'équivalence suivante.

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad x = -2 \text{ ou } x = -3$$

Résolution d'équations

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

Trois extraits de résolutions d'équations sont ici considérés.

- La résolution de l'équation $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 4x + 3} = 0$
- La résolution de l'équation $|x - 2| = 5$
- La résolution de l'équation $\frac{(x - 3)^2}{x - 3} = 0$

Résolution d'équations

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

Nous marquerons de couleurs différentes les éléments textuels de ces résolutions suivant qu'ils indiquent :

- la présence d'une articulation logique
- la présence d'un mécanisme logico-déductif

Résolution de l'équation $\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

$$\mathcal{H}_1 \quad \frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0 \text{ si et seulement si } x^2 - 8x + 15 = 0 \text{ et } x^2 - 4x + 3 \neq 0.$$

$$\mathcal{H}_2 \quad x^2 - 8x + 15 = 0 \text{ si et seulement si } x = 3 \text{ ou } x = 5.$$

$$\mathcal{H}_3 \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ si et seulement si } x = 3 \text{ ou } x = 1.$$

$$\mathcal{C} \quad \text{Si } \frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0, \text{ alors } x = 5.$$

Quid des mécanismes déductifs qui autorisent le passage de $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ à \mathcal{C} ?

Résolution de l'équation $\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$

Soit $\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$.

Par \mathcal{H}_1 , il s'ensuit que $x^2 - 8x + 15 = 0$ et $x^2 - 4x + 3 \neq 0$.

Par \mathcal{H}_2 , nous en déduisons que $x = 3$ ou $x = 5$.

Par \mathcal{H}_3 , nous en déduisons que $x \neq 3$ et $x \neq 1$.

De ce qui précède, il suit que $x = 5$.

En conséquence, si $\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$, alors $x = 5$.

Résolution de l'équation $\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

Soit $\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$.

Par \mathcal{H}_1 , il s'ensuit que $x^2 - 8x + 15 = 0$ et $x^2 - 4x + 3 \neq 0$.

Par \mathcal{H}_2 , nous en déduisons que $x = 3$ ou $x = 5$.

Par \mathcal{H}_3 , nous en déduisons que $x \neq 3$ et $x \neq 1$.

De ce qui précède, il suit que $x = 5$.

En conséquence, si $\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$, alors $x = 5$.

— Articulation logique

— Mécanisme logico-déductif

Résolution de l'équation $|x - 2| = 5$

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

\mathcal{H}_1 Si $0 \leq x - 2$, alors $|x - 2| = x - 2$.

\mathcal{H}_2 Si $x - 2 < 0$, alors $|x - 2| = -(x - 2)$.

\mathcal{H}_3 Si $|x - 2| = 5$ et $|x - 2| = x - 2$, alors $x = 7$.

\mathcal{H}_4 Si $|x - 2| = 5$ et $|x - 2| = -(x - 2)$, alors $x = -3$.

\mathcal{C} Si $|x - 2| = 5$, alors $x = 7$ ou $x = -3$.

Quid des mécanismes déductifs qui autorisent le passage de $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4$ à \mathcal{C} ?

Résolution de l'équation $|x - 2| = 5$

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

Soit $|x - 2| = 5$.

Deux cas seulement sont possibles, $0 \leq x - 2$ ou $x - 2 < 0$.

Supposons que $0 \leq x - 2$. De \mathcal{H}_1 , il suit que $|x - 2| = x - 2$.
Par \mathcal{H}_3 , nous en déduisons que $x = 7$.

Supposons que $x - 2 < 0$. De \mathcal{H}_2 , il suit que $|x - 2| = -(x - 2)$.
Par \mathcal{H}_4 , nous en déduisons que $x = -3$.

En conséquence, si $|x - 2| = 5$, alors $x = 7$ ou $x = -3$.

Résolution de l'équation $|x - 2| = 5$

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

Soit $|x - 2| = 5$.

Deux cas seulement sont possibles, $0 \leq x - 2$ ou $x - 2 < 0$.

Supposons que $0 \leq x - 2$. De \mathcal{H}_1 , il suit que $|x - 2| = x - 2$.

Par \mathcal{H}_3 , nous en déduisons que $x = 7$.

Supposons que $x - 2 < 0$. De \mathcal{H}_2 , il suit que $|x - 2| = -(x - 2)$.

Par \mathcal{H}_4 , nous en déduisons que $x = -3$.

En conséquence, si $|x - 2| = 5$, alors $x = 7$ ou $x = -3$.

— Articulation logique

— Mécanisme logico-déductif

Résolution de l'équation $\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

$$\mathcal{H}_1 \quad \frac{(x-3)^2}{x-3} = 0 \text{ si et seulement si } (x-3)^2 = 0 \text{ et } x-3 \neq 0.$$

$$\mathcal{H}_2 \quad x-3 = 0 \text{ si et seulement si } x = 3.$$

$$\mathcal{H}_3 \quad (x-3)^2 = 0 \text{ si et seulement si } x = 3.$$

$$\mathcal{C} \quad \frac{(x-3)^2}{x-3} \neq 0.$$

Quid des mécanismes déductifs qui autorisent le passage de \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_3 à \mathcal{C} ?

Résolution de l'équation $\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$

Soit $\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$.

Par \mathcal{H}_1 , il s'ensuit que $(x-3)^2 = 0$ et $x-3 \neq 0$.

Par \mathcal{H}_2 , nous en déduisons que $x \neq 3$.

Par \mathcal{H}_3 , nous en déduisons que $x = 3$.

Ce qui est absurde.

En conséquence, $\frac{(x-3)^2}{x-3} \neq 0$.

Résolution de l'équation $\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

Soit $\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$.

Par \mathcal{H}_1 , il s'ensuit que $(x-3)^2 = 0$ et $x-3 \neq 0$.

Par \mathcal{H}_2 , nous en déduisons que $x \neq 3$.

Par \mathcal{H}_3 , nous en déduisons que $x = 3$.

Ce qui est absurde.

En conséquence, $\frac{(x-3)^2}{x-3} \neq 0$.

— Articulation logique

— Mécanisme logico-déductif

Résolution d'équations

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

Afin de préciser l'enchaînement des mécanismes déductifs propositionnels qui sont à l'œuvre dans ces résolutions d'équations, nous ferons appel au formalisme de la déduction naturelle.

Déduction naturelle

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

La formalisation du raisonnement logique, telle qu'elle a été développée en particulier par Frege, Russell et Hilbert, est relativement fort éloignée du mode de raisonnement qui est utilisé en réalité dans les démonstrations mathématiques. On vise de la sorte à obtenir certains avantages formels appréciables. J'ai voulu d'abord construire un formalisme qui soit le plus près possible du raisonnement réel. C'est ainsi que j'ai obtenu un « Calcul de la déduction naturelle » [...].

G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schließen* (1934)

Langage propositionnel

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

Un *langage (propositionnel)* \mathcal{L} est composé d'un ensemble non vide de symboles propositionnels p_n (où $n \in \mathbb{N}$) ainsi que des symboles logiques \perp , \neg , \wedge , \vee et \rightarrow . Les formules d'un langage \mathcal{L} sont définies inductivement de la façon suivante.

$$A ::= p \mid \perp \mid \neg A \mid (A \wedge A) \mid (A \vee A) \mid (A \rightarrow A)$$

Raisonnement propositionnel

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

Un *raisonnement (propositionnel)* est un couple $\langle \Gamma, C \rangle$ où Γ est un ensemble fini de formules d'un langage et C est une formule de ce langage. Le raisonnement $\langle \Gamma, C \rangle$ est noté $\Gamma \vdash C$.

Un raisonnement $\Gamma \vdash C$ est *correct* s'il existe une déduction dont la conclusion est C et dont l'ensemble des hypothèses est Γ .

Déduction, hypothèse et conclusion

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

Le concept de *déduction* ainsi que ceux d'hypothèse et de conclusion sont conjointement définis de façon inductive.

Règle d'introduction de la conjonction (\wedge_I)

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ B \end{array}}{(A \wedge B)} \wedge_I$$

Règles d'élimination de la conjonction (\wedge_{ED} et \wedge_{EG})

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (A \wedge B) \end{array}}{A} \wedge_{ED}$$

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (A \wedge B) \end{array}}{B} \wedge_{EG}$$

Règle d'introduction de l'implication (\rightarrow_I)

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ B \end{array}}{(A \rightarrow B)} \rightarrow_I$$

Règle d'élimination de l'implication (\rightarrow_E)

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (A \rightarrow B) \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array}}{B} \rightarrow_E$$

Règles d'introduction de la disjonction (\vee_{ID} et \vee_{IG})

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

$$\frac{\vdots}{A} \vee_{ID} \frac{A}{(A \vee B)}$$

$$\frac{\vdots}{B} \vee_{IG} \frac{B}{(A \vee B)}$$

Règle d'élimination de la disjonction ($\vee E$)

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (A \vee B) \end{array} \quad \begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B] \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \vee E$$

Règle d'introduction de la négation ($\neg I$)

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A} \neg I$$

Règle d'élimination de la négation ($\neg E$)

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \neg A \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array}}{\perp} \neg E$$

Règle de l'absurde intuitionniste (\perp_i)

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

$$\frac{\vdots}{A} \perp_i$$

Règle de l'absurde classique (\perp_c)

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

$[\neg A]$

\vdots

$\frac{\perp}{A} \perp_c$

Tableau récapitulatif des règles

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

	Introduction	Élimination
Conjonction	\wedge_I	$\wedge_{E_D} \quad \wedge_{E_G}$
Implication	\rightarrow_I	\rightarrow_E
Disjonction	$\vee_{I_D} \quad \vee_{I_G}$	\vee_E
Négation	\neg_I	\neg_E
Absurde intuitionniste	\perp_i	
Absurde classique	\perp_c	

Illustration

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

$(p_1 \rightarrow p_3), (p_2 \rightarrow p_3) \vdash ((p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3)$ est-il correct ?

$$\frac{\frac{[(p_1 \vee p_2)]}{\frac{\frac{(p_1 \rightarrow p_3) \quad [p_1]}{p_3} \rightarrow_E \quad \frac{(p_2 \rightarrow p_3) \quad [p_2]}{p_3} \rightarrow_E}{p_3} \vee_E}}{((p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3)} \rightarrow_I$$

Mécanismes logico-déductifs

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

Afin d'identifier de façon précise et systématique les mécanismes logico-déductifs présents dans les résolutions d'équations abordées antérieurement, une traduction s'appuyant sur le formalisme de la déduction naturelle en est proposée.

Traduction de la résolution de $\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \mathcal{H}_2 \\
 \frac{(p_2 \leftrightarrow (p_4 \vee p_5))}{(p_2 \rightarrow (p_4 \vee p_5))} \wedge_{ED} \\
 (p_4 \vee p_5)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \mathcal{H}_1 \\
 \frac{\frac{(p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))}{(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))} \wedge_{ED} \quad [p_1] \rightarrow_E}{(p_2 \wedge \neg p_3)} \wedge_{ED} \\
 p_2 \rightarrow_E \\
 p_5 \rightarrow_I \\
 (p_1 \rightarrow p_5)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \mathcal{H}_3 \\
 \frac{\frac{(p_3 \leftrightarrow (p_4 \vee p_6))}{((p_4 \vee p_6) \rightarrow p_3)} \wedge_{EC} \quad \frac{\frac{(p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))}{(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))} \wedge_{ED} \quad [p_1] \rightarrow_E}{(p_2 \wedge \neg p_3)} \wedge_{EC}}{\neg p_3} \wedge_{EC} \\
 \frac{\neg(p_4 \vee p_6)}{(\neg p_4 \wedge \neg p_6)} \text{DM} \\
 \neg p_4 \text{SD}
 \end{array}
 \end{array}$$

Traduction de la résolution de $\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

$$\frac{\frac{\frac{\mathcal{H}_2}{(p_3 \leftrightarrow p_4)} \wedge_{EG} \quad \frac{\frac{\mathcal{H}_1}{(p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))} \wedge_{ED} \quad [p_1] \rightarrow_E}{(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))} \rightarrow_E}{(p_2 \wedge \neg p_3)} \wedge_{EG} \quad \neg p_3 \quad \text{MT}}{\neg p_4} \quad \perp \quad \neg_I$$

$$\frac{\frac{\mathcal{H}_3}{(p_2 \leftrightarrow p_4)} \wedge_{ED} \quad \frac{\frac{\mathcal{H}_1}{(p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))} \wedge_{ED} \quad [p_1] \rightarrow_E}{(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))} \rightarrow_E}{(p_2 \rightarrow p_4)} \wedge_{ED} \quad \frac{(p_2 \wedge \neg p_3)}{p_2} \rightarrow_E}{p_4} \quad \neg_E$$

Pluralité des mécanismes logico-déductifs

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

À la lumière des traductions proposées, il apparaît que les résolutions d'équations que nous avons examinées font intervenir un large éventail de mécanismes déductifs.

Première observation

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

Les mécanismes déductifs identifiés dans les résolutions d'équations couvrent la totalité des règles d'introduction et d'élimination des symboles logiques de la déduction naturelle.

Mécanismes associés aux règles de la conjonction

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

	\wedge_I	\wedge_{ED}	\wedge_{EG}
$\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$	×	✓	✓
$ x-2 = 5$	✓	×	×
$\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$	×	✓	✓

Mécanismes associés aux règles de l'implication

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

	$\rightarrow I$	$\rightarrow E$
$\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$	✓	✓
$ x - 2 = 5$	✓	✓
$\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$	×	✓

Mécanismes associés aux règles de la disjonction

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

	$\forall ID$	$\forall IG$	$\forall E$
$\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$	×	×	×
$ x - 2 = 5$	✓	✓	✓
$\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$	×	×	×

Mécanismes associés aux règles de la négation

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

	$\neg I$	$\neg E$
$\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$	×	×
$ x - 2 = 5$	×	×
$\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$	✓	✓

Deuxième observation

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

Les mécanismes déductifs identifiés dans les résolutions d'équations ne couvrent ni la règle de l'absurde intuitionniste ni la règle de l'absurde classique.

Mécanismes associés aux règles de l'absurde

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

	\perp_i	\perp_c
$\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$	×	×
$ x - 2 = 5$	×	×
$\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$	×	×

Troisième observation

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

Certains des mécanismes déductifs identifiés dans les résolutions d'équations ne correspondent à aucune règle du formalisme de la déduction naturelle.

Mécanismes associés à des raisonnements

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

	DM	MT	SD	TE
$\frac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = 0$	✓	✓	✓	×
$ x - 2 = 5$	×	×	×	✓
$\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0$	×	✓	×	×

Complexité des mécanismes logico-déductifs

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

Les mécanismes déductifs qui ne correspondent à aucune règle autorisée par le formalisme de la déduction naturelle peuvent être conçus comme un recours à une forme de raisonnement dont la correction est considérée comme établie.

L'une des lois de De Morgan (DM)

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

La forme de raisonnement $\neg(A \vee B) \vdash (\neg A \wedge \neg B)$ est correct.

$$\frac{\frac{\frac{\neg(A \vee B)}{\perp} \neg I}{\neg A} \wedge I}{(\neg A \wedge \neg B)} \quad \frac{\frac{\frac{\neg(A \vee B)}{\perp} \neg I}{\neg B} \wedge I}{(\neg A \wedge \neg B)} \quad \frac{\frac{\frac{[A]}{(A \vee B)} \vee I_D}{\neg(A \vee B)} \neg E}{\perp} \neg I}{\neg A} \neg I \quad \frac{\frac{\frac{[B]}{(A \vee B)} \vee I_G}{\neg(A \vee B)} \neg E}{\perp} \neg I}{\neg B} \neg I$$

Le *modus tollens* (MT)

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

La forme de raisonnement $(A \rightarrow B), \neg B \vdash \neg A$ est correct.

$$\frac{\neg B \quad \frac{(A \rightarrow B) \quad [A]}{B} \rightarrow_E}{\perp} \neg E \quad \frac{\perp}{\neg A} \neg I$$

Le syllogisme disjonctif (SD)

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

La forme de raisonnement $(A \vee B), \neg A \vdash B$ est correct.

$$\frac{(A \vee B) \quad \frac{\frac{\neg A \quad [A]}{\perp} \neg E \quad \frac{\perp}{B} \perp_i}{[B]} \vee E}{B}$$

Le principe du tiers exclu (TE)

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

La forme de raisonnement $\vdash (A \vee \neg A)$ est correct.

$$\frac{\frac{\frac{\perp}{\neg A} \neg I}{[\neg(A \vee \neg A)]} \neg E \quad \frac{\frac{[A]}{(A \vee \neg A)} \vee I_D}{\neg E}}{\frac{\perp}{\neg A} \neg I} \neg E \quad \frac{\frac{\frac{[\neg A]}{(A \vee \neg A)} \vee I_G}{\neg E}}{\frac{\perp}{A} \perp_c} \neg E}{\frac{\perp}{(A \vee \neg A)} \perp_c} \perp_c$$

Classification des mécanismes logico-déductifs

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

- ▷ Mécanismes déductifs simples
 - Règles sans déchargement d'hypothèse
 - le *modus ponens* (\rightarrow_E)
 - Règles avec déchargement d'hypothèse
 - la disjonction de cas (\vee_E)
 - le raisonnement par l'absurde (\neg_I)
- ▷ Mécanismes déductifs complexes
 - les lois de De Morgan (DM)
 - le *modus tollens* (MT)
 - le syllogisme disjonctif (SD)

Conclusion

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion

Nous avons identifié, au travers du formalisme de la déduction naturelle, un ensemble de mécanismes déductifs propositionnels pouvant intervenir dans le cadre de la résolution d'équations.

En outre, nous avons dégagé une classification de ces mécanismes qui permet de rendre compte à la fois de leur pluralité et de leurs différents niveaux de complexité.

Résolution
d'équations et
déduction
naturelle

Vincent
Degauquier

Introduction

Résolution
d'équations

Déduction
naturelle

Mécanismes
logico-
déductifs

Conclusion