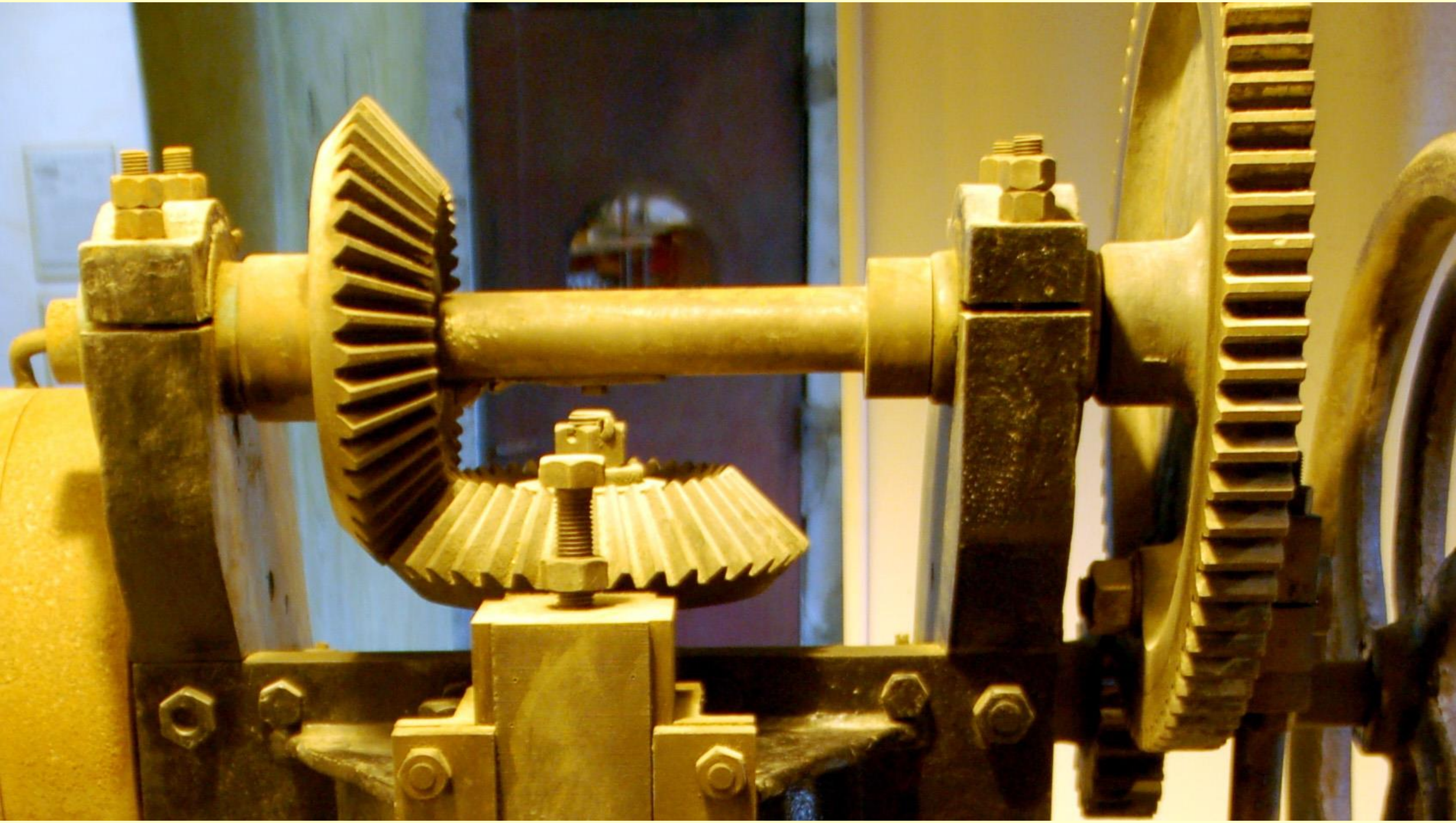
Engrenages et développantes de cercle

Ginette Cuisinier

Marie-France Guissard

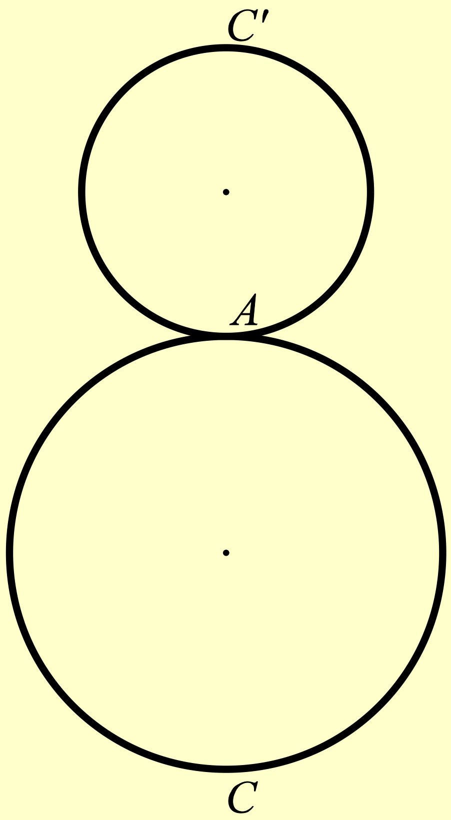
GEM

CREM



Transmission du mouvement

Cylindres de friction



Engrenage

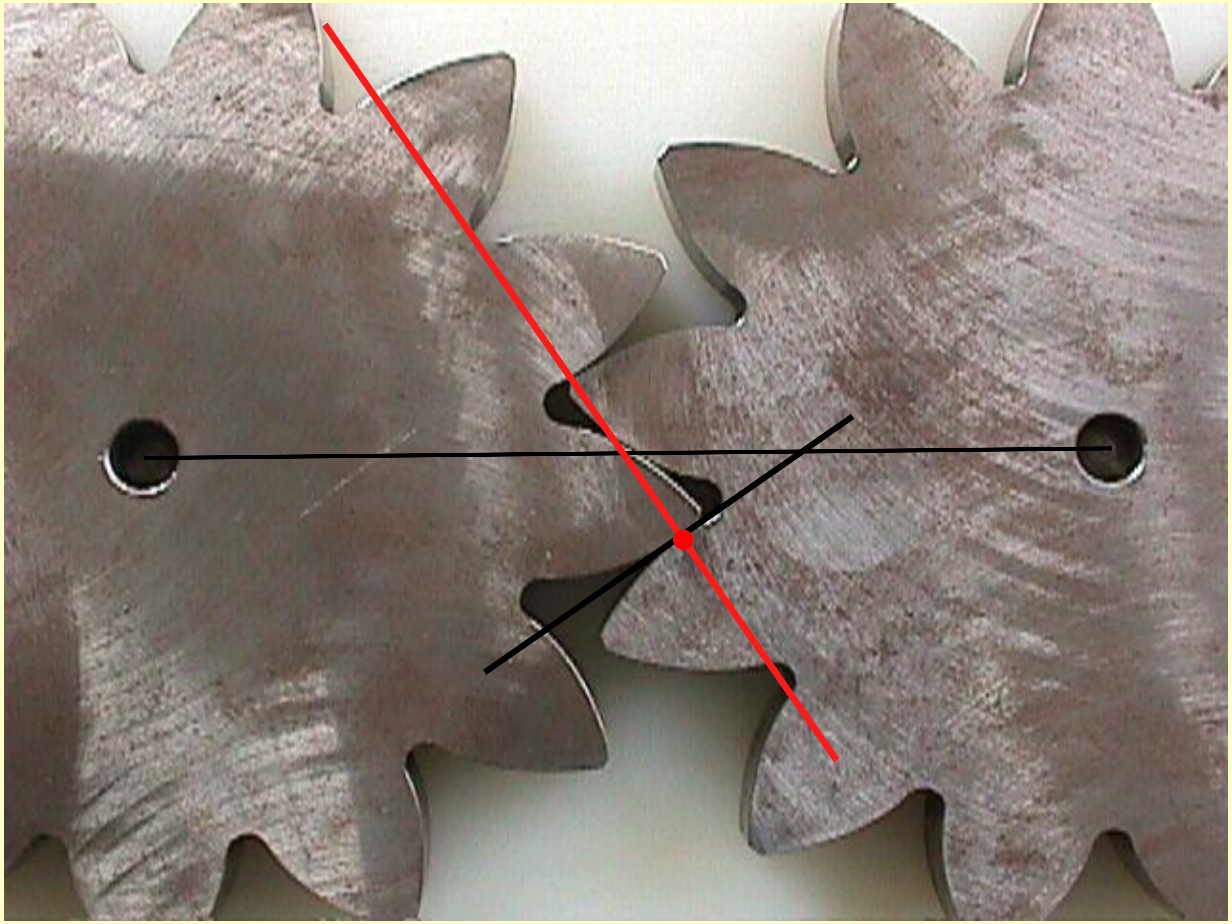
Nd = N'd'   N/N'= d'/d

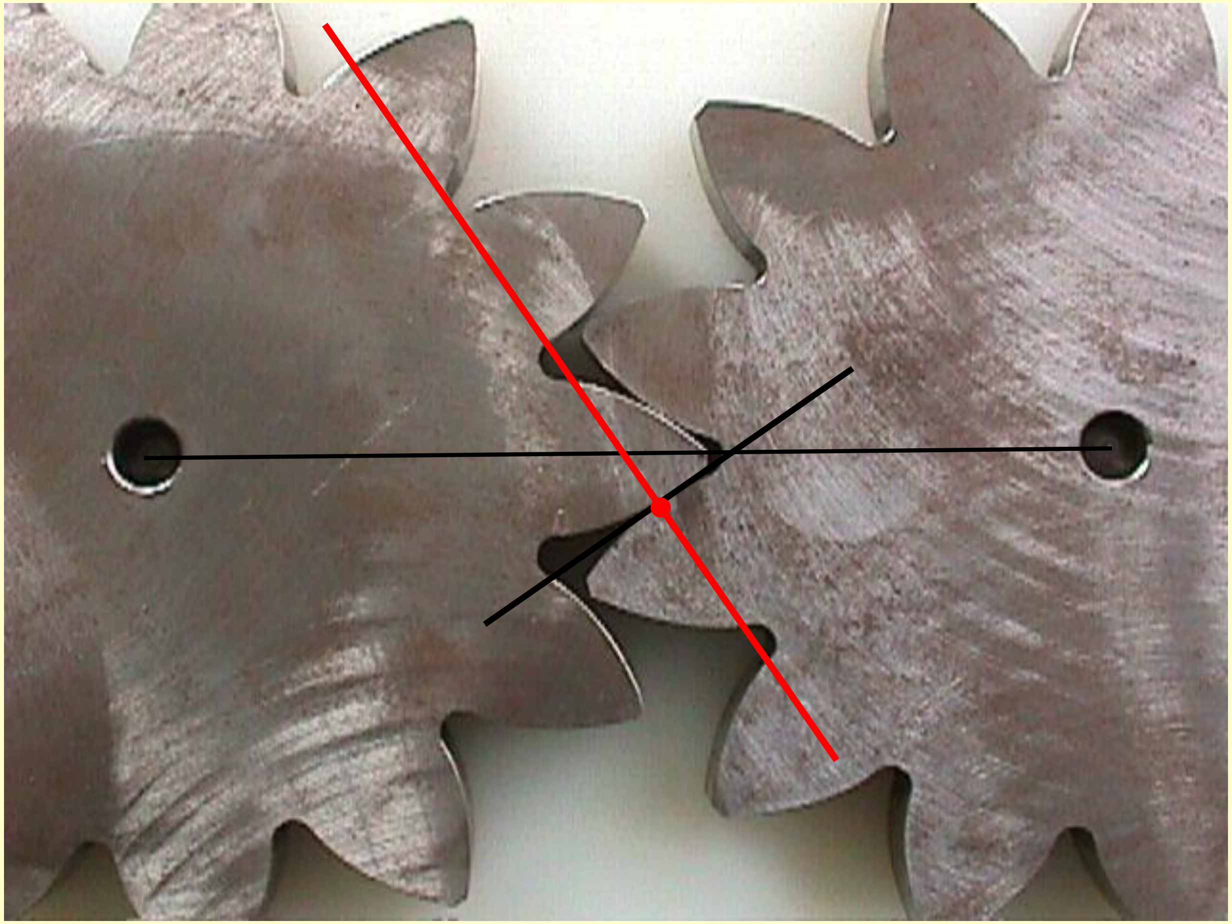
Activité 1

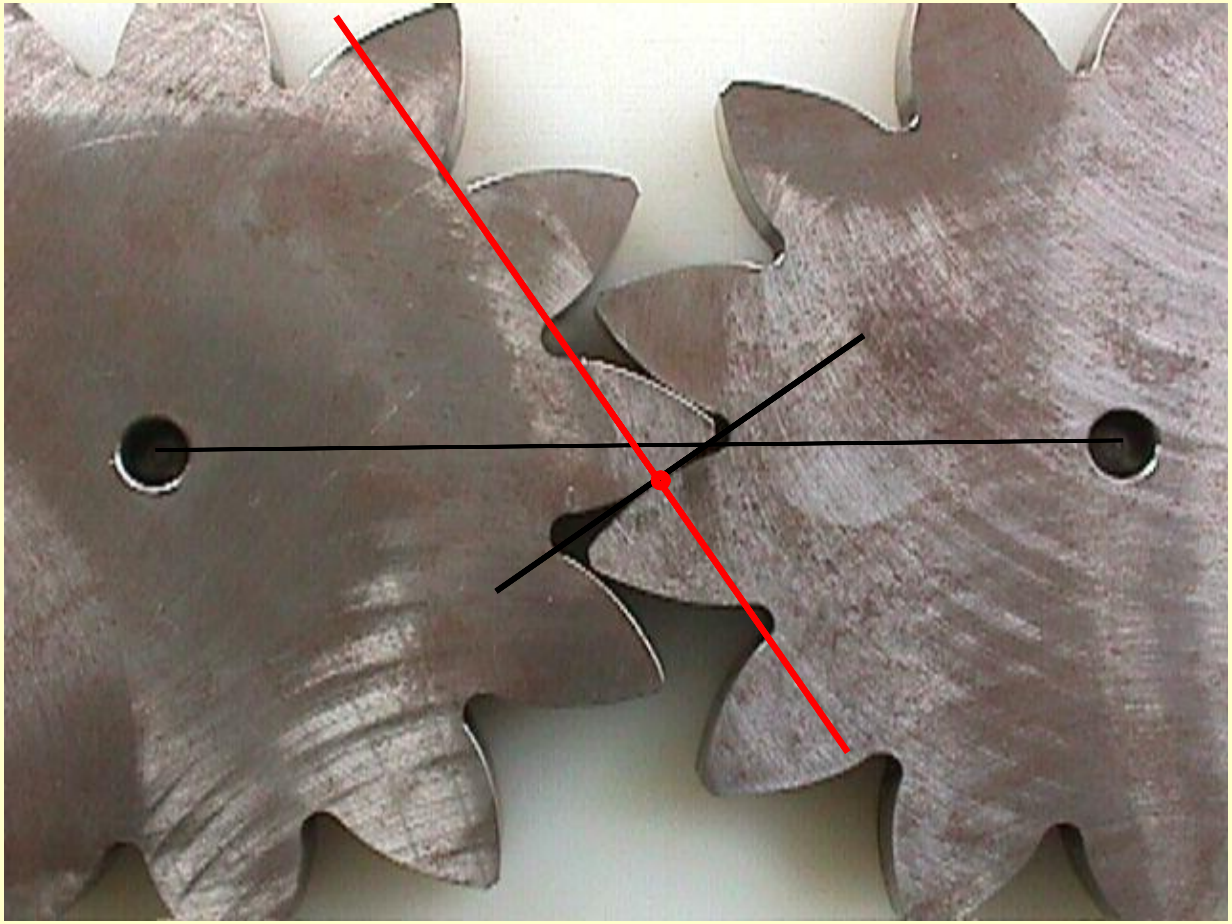
Faisons tourner la roue de droite comme l'indique la flèche. Sa rotation entraîne la roue de gauche. Les 6 figures représentent 6 positions très proches du système.

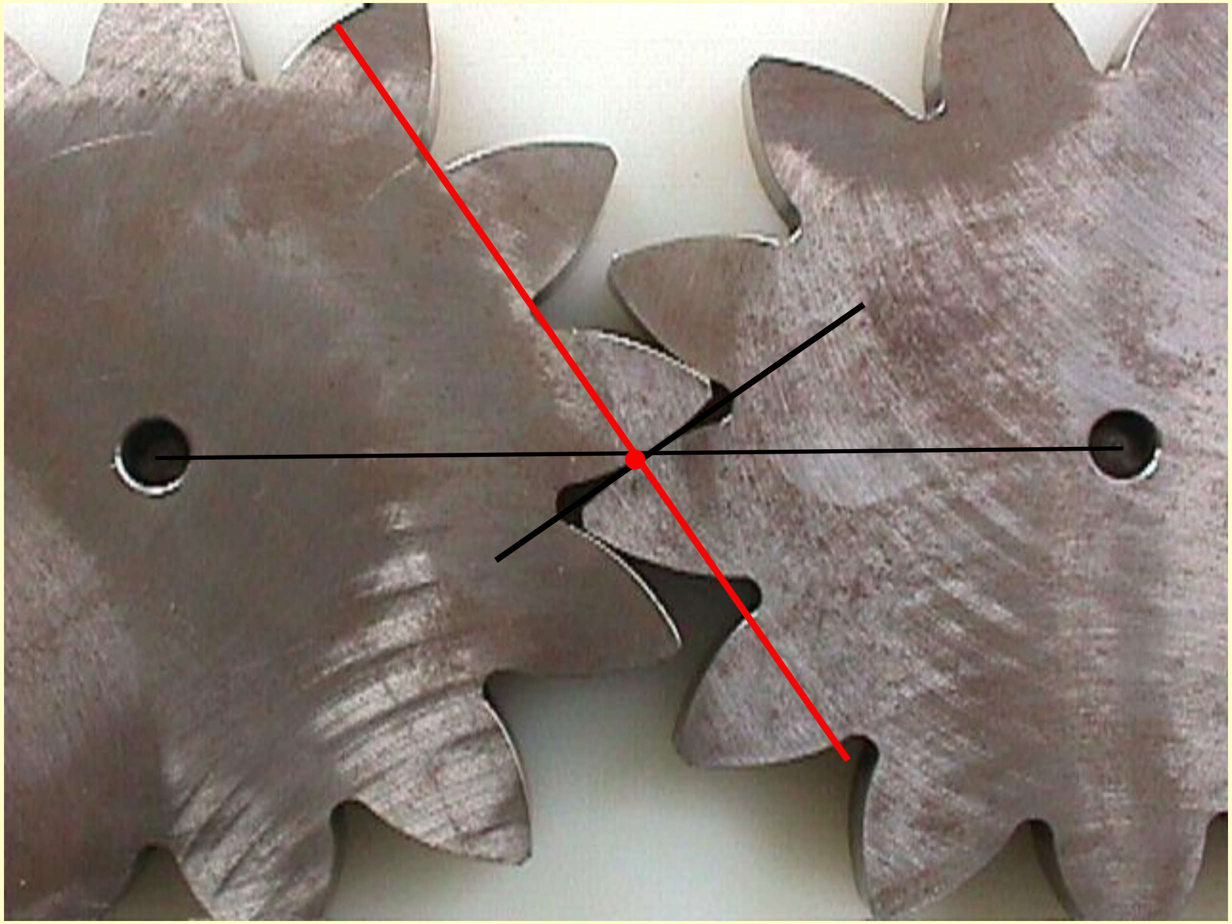
Intéressons-nous au contact des profils MN and $M'N'$.
Sur chaque figure, repérons le point de contact des deux profils et traçons à vue la tangente commune.
Construisons ensuite la perpendiculaire à cette tangente, qui est donc normale aux deux courbes.

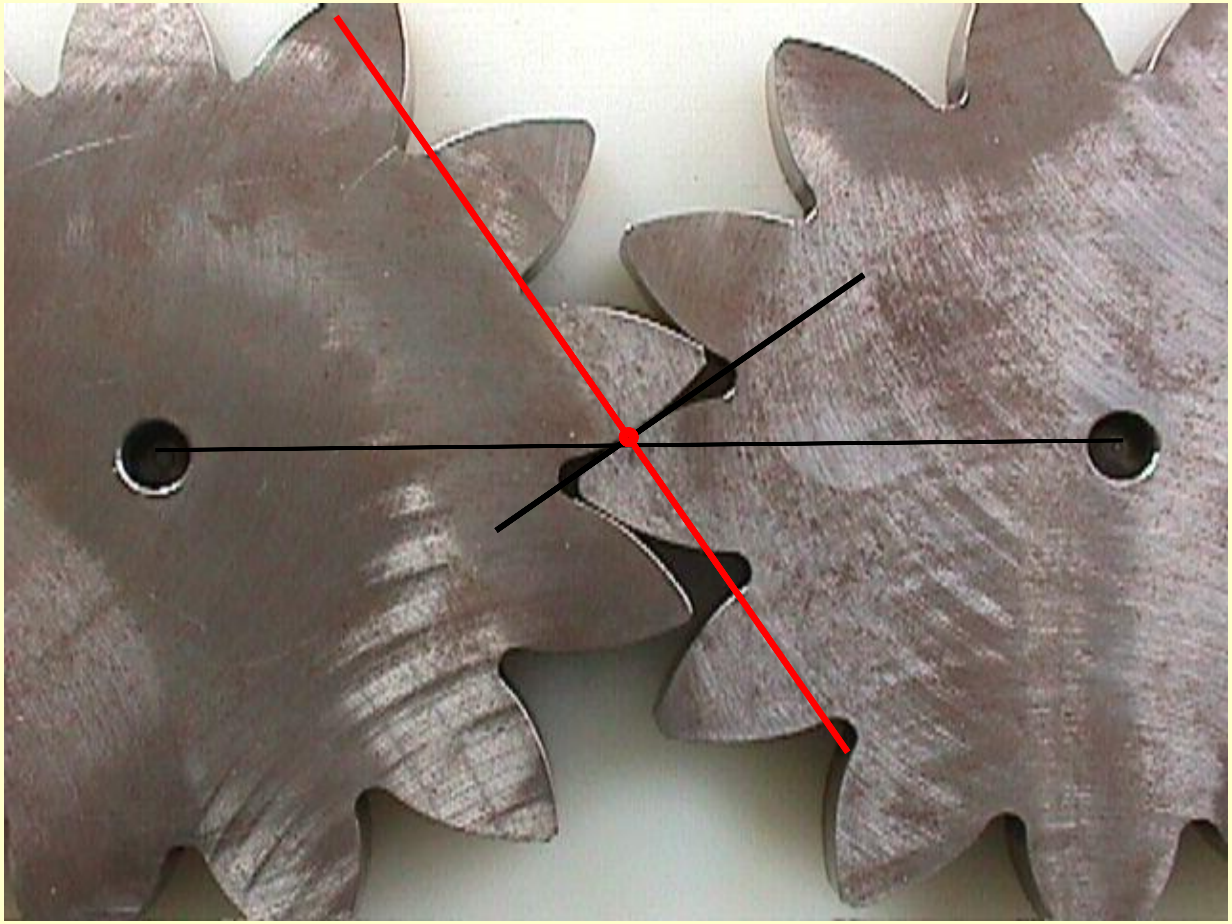
Comment évolue cette normale lorsque la roue tourne?

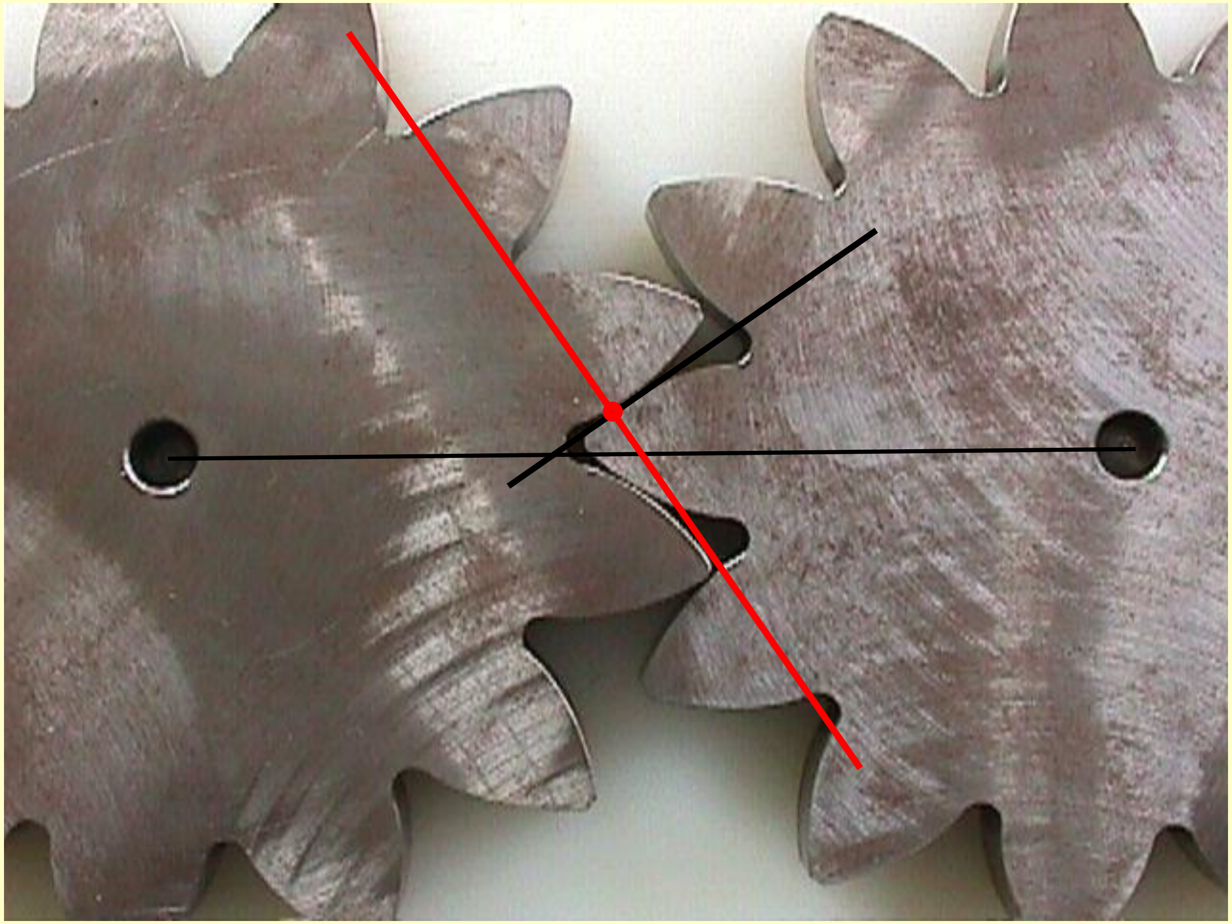












Observation

La normale aux deux courbes est fixe.

Autrement dit, pendant tout le mouvement des roues, le point de contact des deux roues se déplace sur une droite fixe qui est la normale aux profils des deux dents.

D'autre part, nous savons que les profils des dents sont des développantes de cercle.

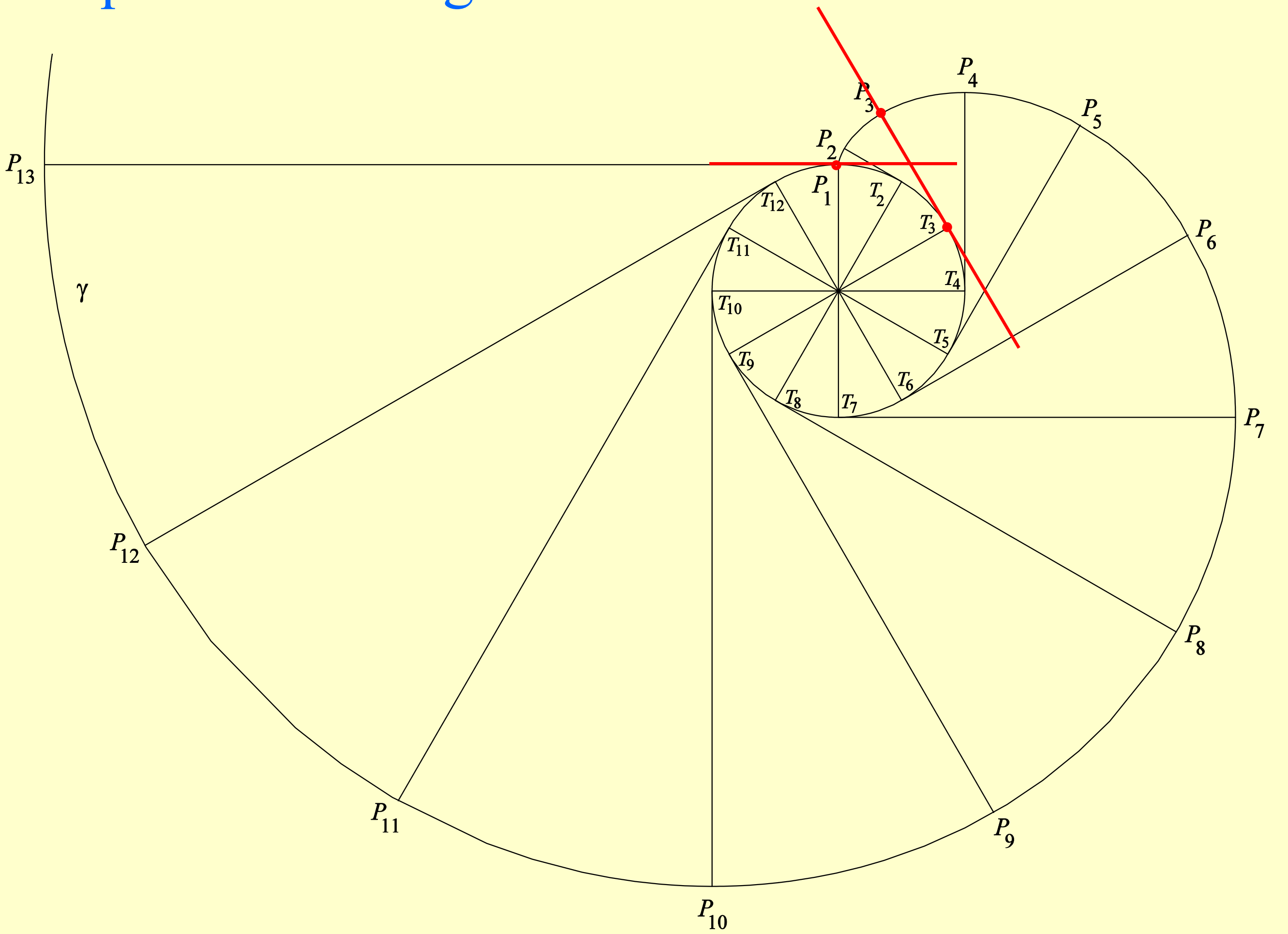
Développante de cercle

La développante de cercle est la courbe décrite par l’extrémité d’un fil enroulé autour d’un cercle de base lorsqu’on déroule ce fil en le maintenant bien tendu.

Illustration

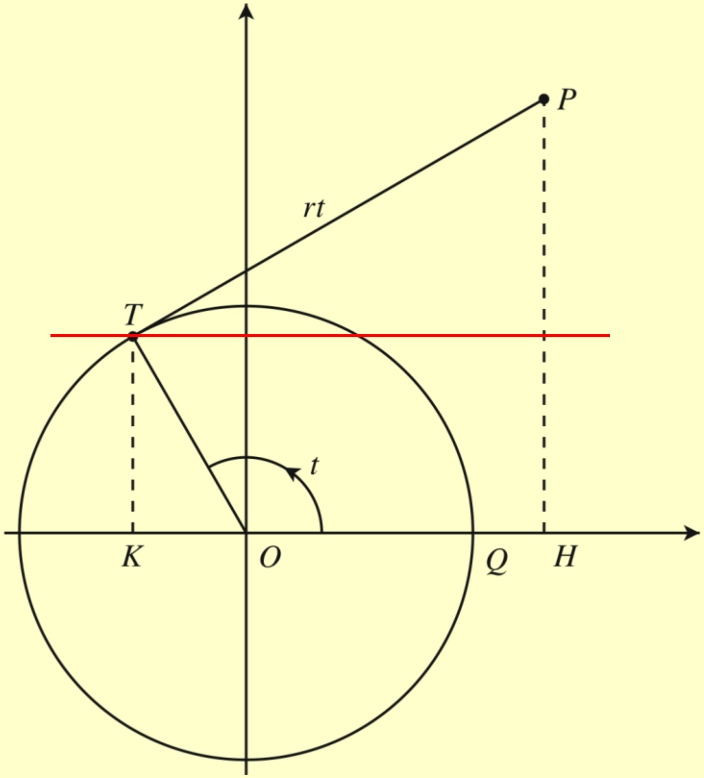
Développante de cercle

La développante de cercle est la courbe décrite par un point P d'une droite qui roule sans glisser sur un cercle.



Voici le début d'une développante de cercle dont le point de départ est P_1.

Équation de la développante



$$|TP| = \text{longueur Arc } TQ = rt$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TP}$$

$$\overrightarrow{OT} = r\cos t.\overrightarrow{e_x} + r\sin t.\overrightarrow{e_y}$$

$$\overrightarrow{TP} = rt\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right).\overrightarrow{e_x} + rt\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right).\overrightarrow{e_y}$$

$$= rt\sin t.\overrightarrow{e_x} - rt\cos t.\overrightarrow{e_y}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos t + rt\sin t \\ y = r\sin t - rt\cos t \end{cases}}$$

Activité 2

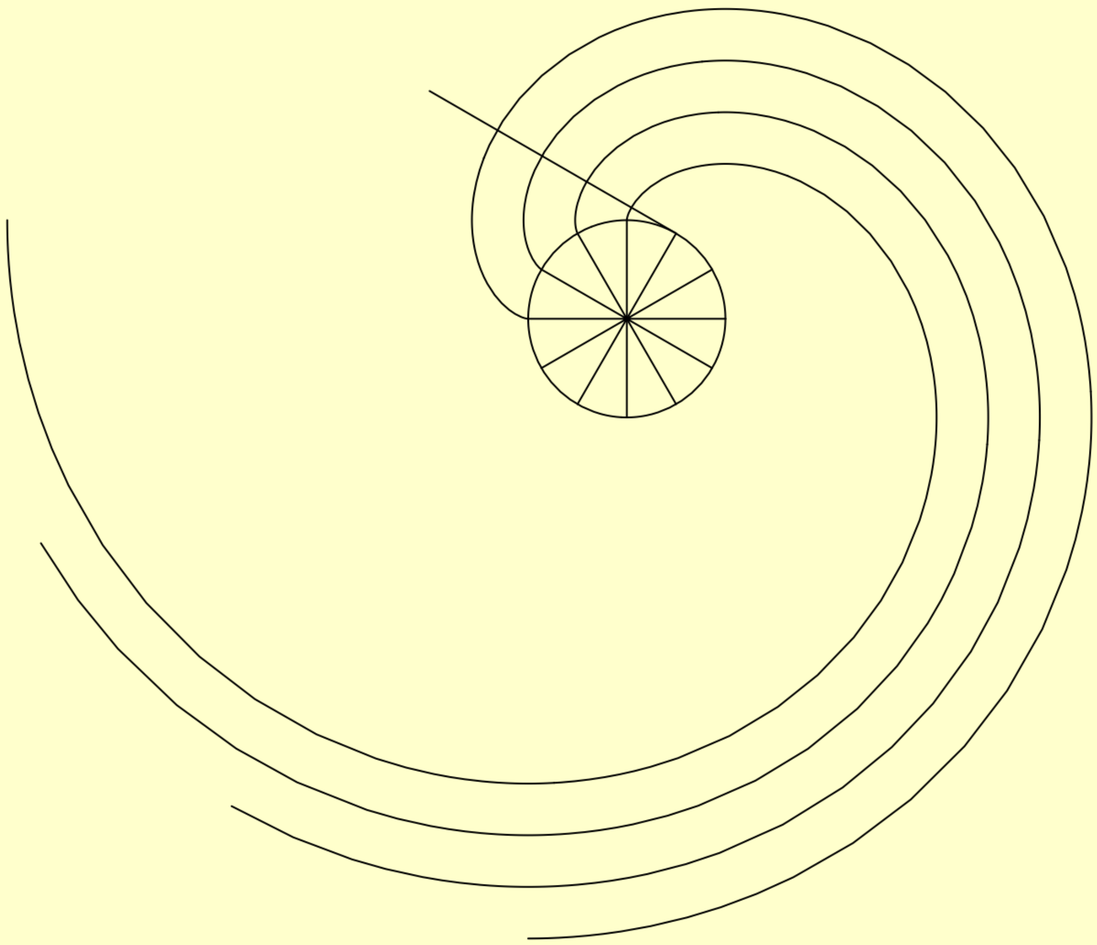
Vous disposez de deux exemplaires d’une figure représentant un cercle et sa développante, l’un sur papier et l’autre sur transparent. Sur le papier est tracée une demi tangente.

Superposez les deux développantes, fixez les deux centres à l’aide d ’une épingle. Faites tourner le transparent autour du centre.

Qu’observez-vous?
Évaluez l’angle formé par la demi tangente et la développante dans ses différentes positions.

Illustration de l’activité 2 avec Cabri

Une autre illustration



Démonstration analytique de la propriété

Cercle

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = -r\sin t \\ y'(t) = r\cos t \end{cases}$$

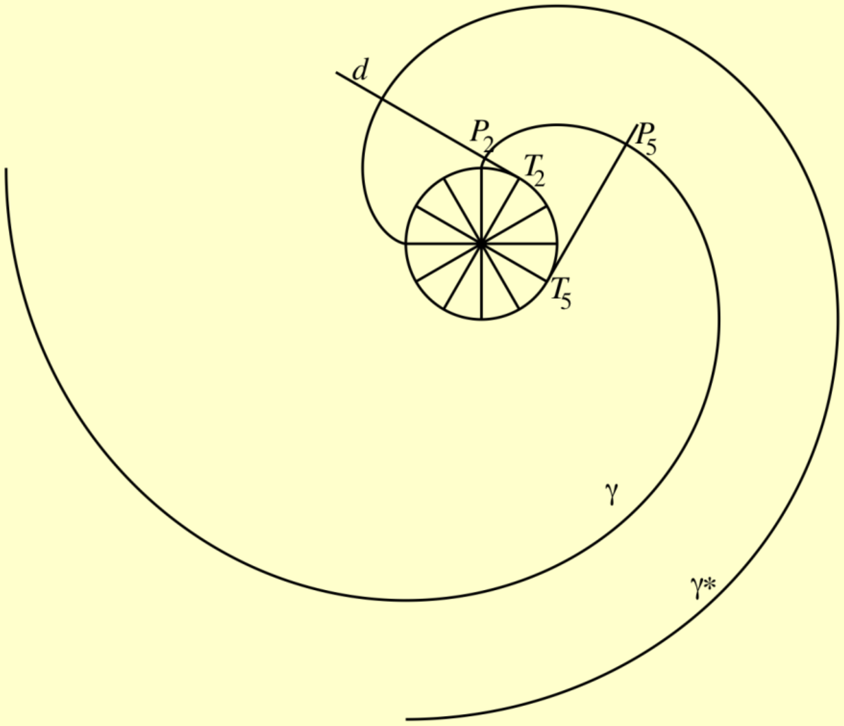
Développante

$$\begin{cases} x = r\cos t + rt\sin t \\ y = r\sin t - rt\cos t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = rt\cos t \\ y'(t) = rt\sin t \end{cases}$$

$$(-r\sin t\, e_1 + r\cos t\, e_2).(rt\cos t\, e_1 + rt\sin t\, e_2) =$$
$$-r\sin t \,.\, rt\cos t + r\cos t \,.\, rt\sin t = 0$$

Propriété de la développante de cercle



En chacun de ses points,
une développante de cercle est perpendiculaire à une tangente au cercle de base

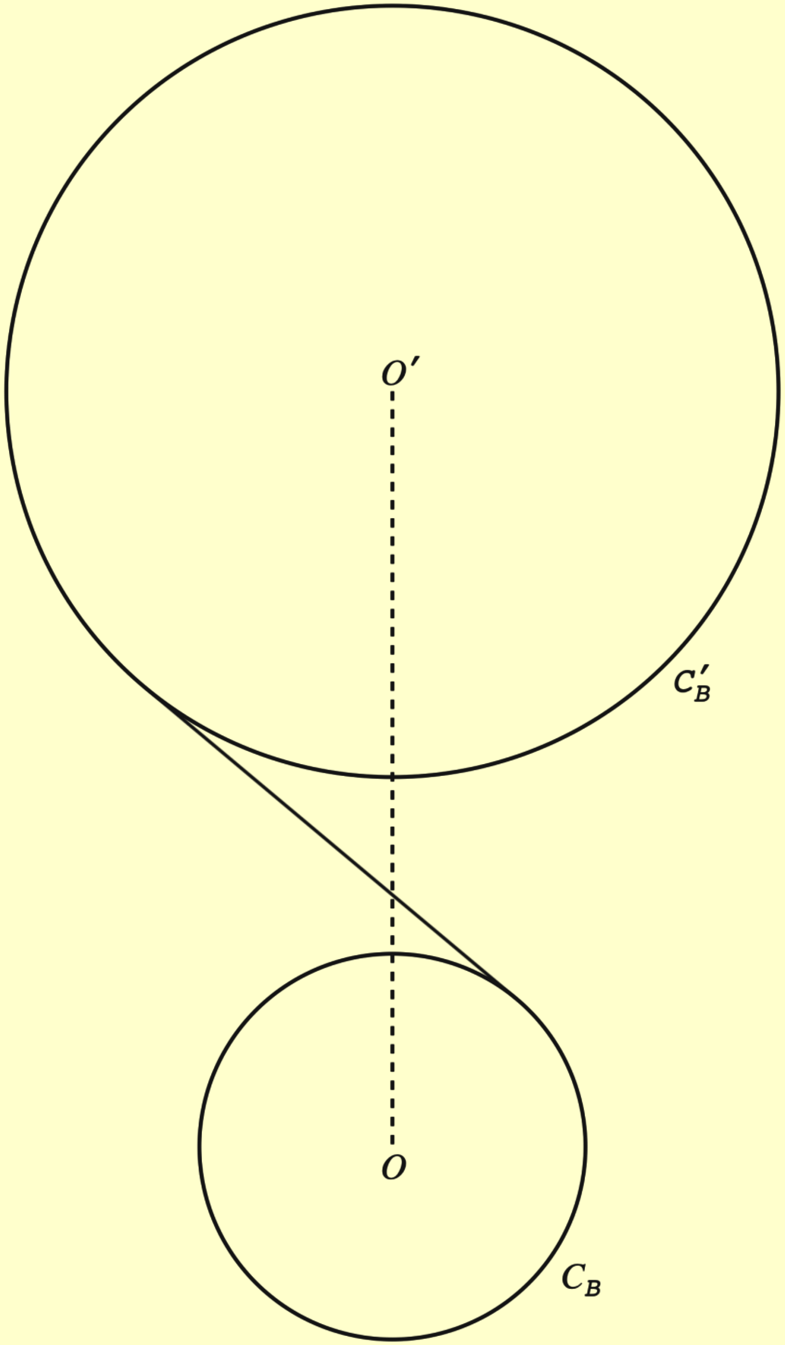
Activité 3

Les cercles C_B and C'_B ont pour rayons, respectivement, 3 cm et 6 cm. À partir de ces cercles, on veut construire deux développantes en contact, ayant une normale commune.

1) En quel point de OO' doit se trouver le point de contact de ces deux développantes?

2) Construis ce point de contact et calcule sa position.

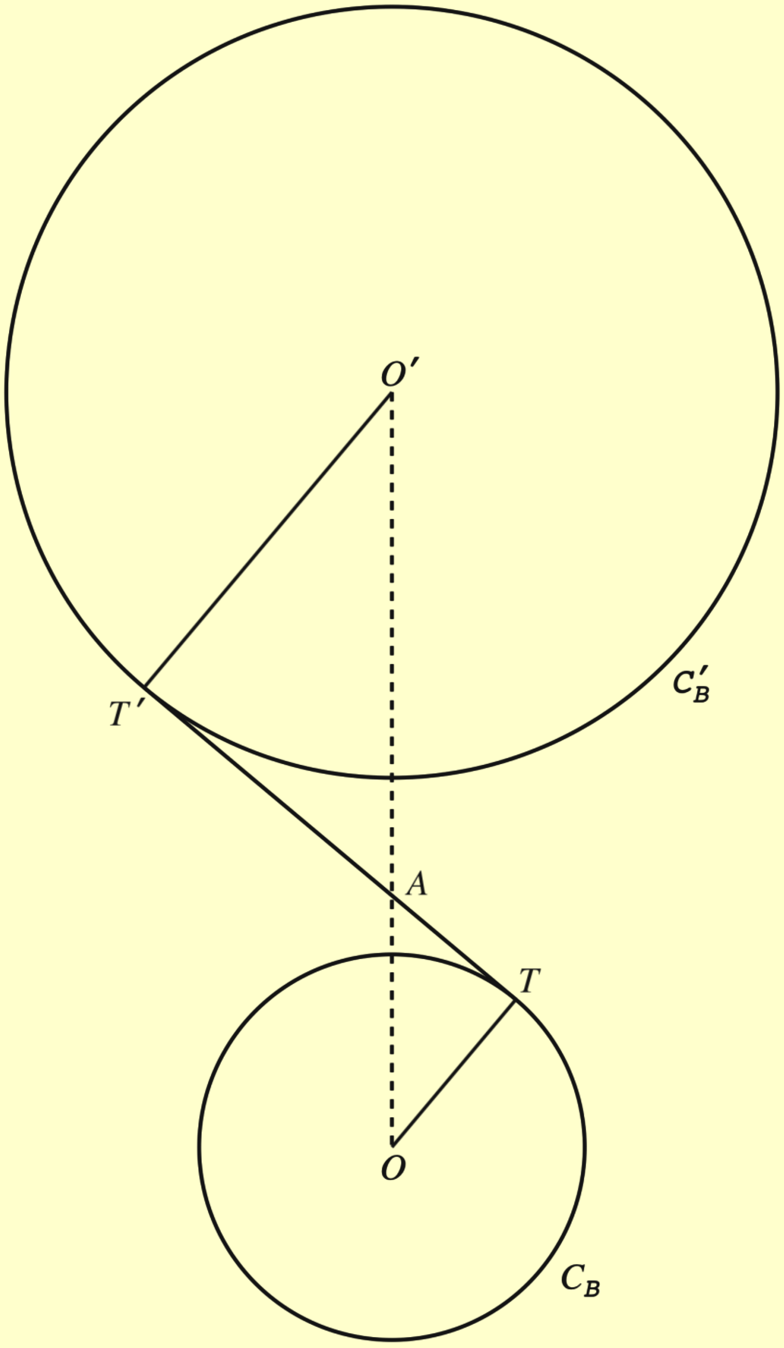
3) Ébauche le schéma des deux développantes.



En chacun de ses points, une développante de cercle est perpendiculaire à une tangente à son cercle de base.

Pour qu'une droite soit perpendiculaire aux développantes de deux cercles, elle doit être une tangente commune aux deux cercles.

Les points de contact des développantes de deux cercles sont sur une tangente commune aux deux cercles.

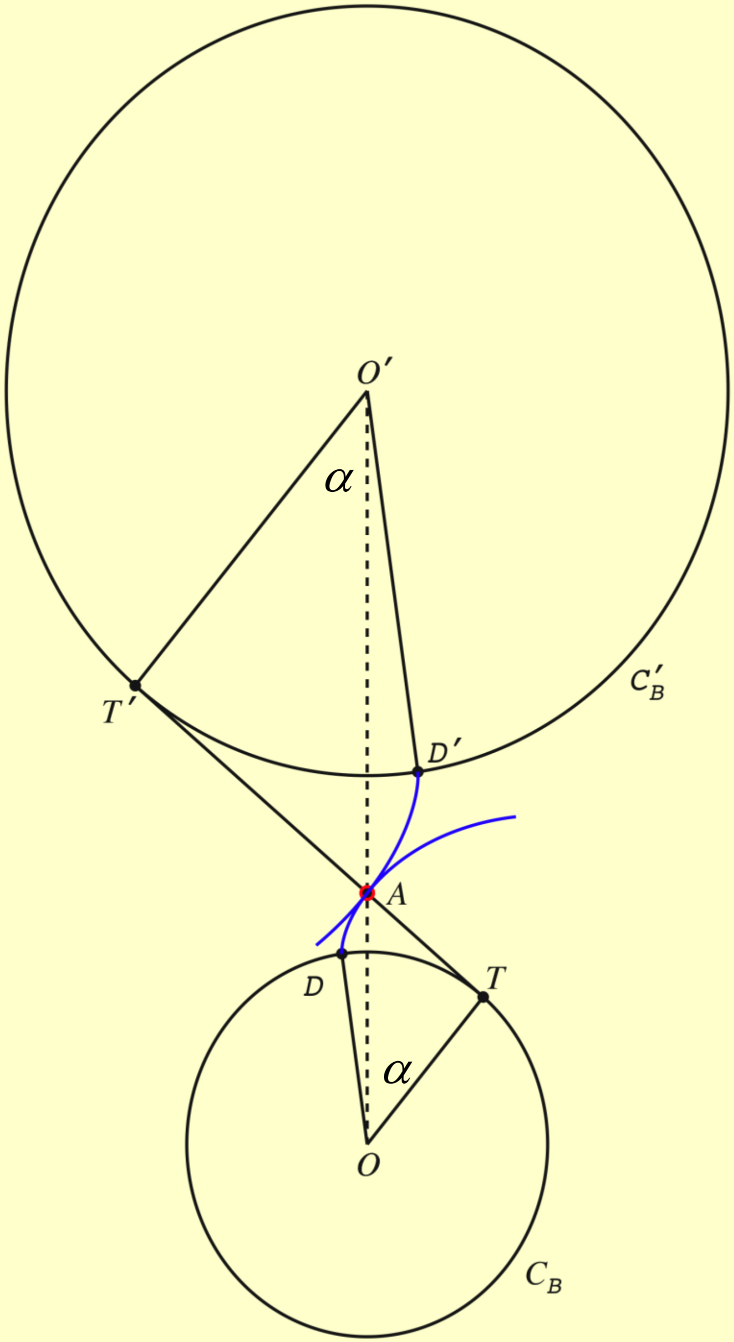


Position du point de contact sur *OO'*

Les triangles *OAT* et *O'AT'* sont semblables.

$$\frac{O'A}{OA} = 2$$

Calcul du point de départ

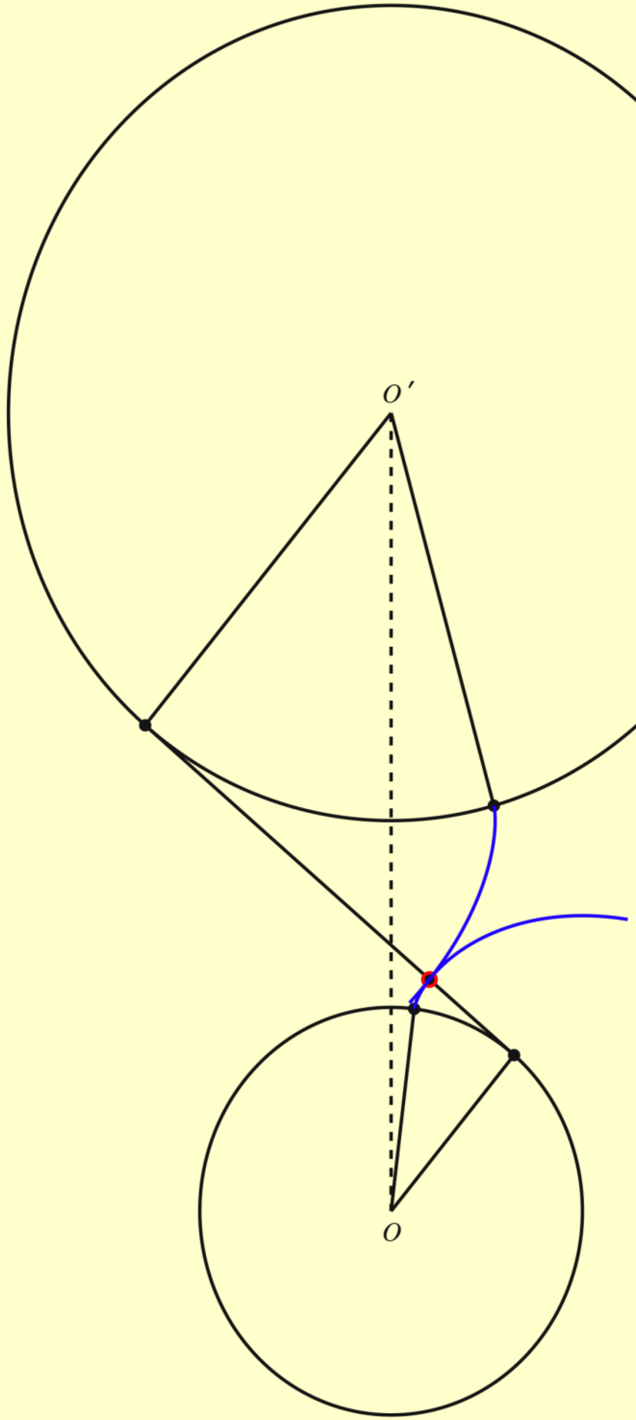


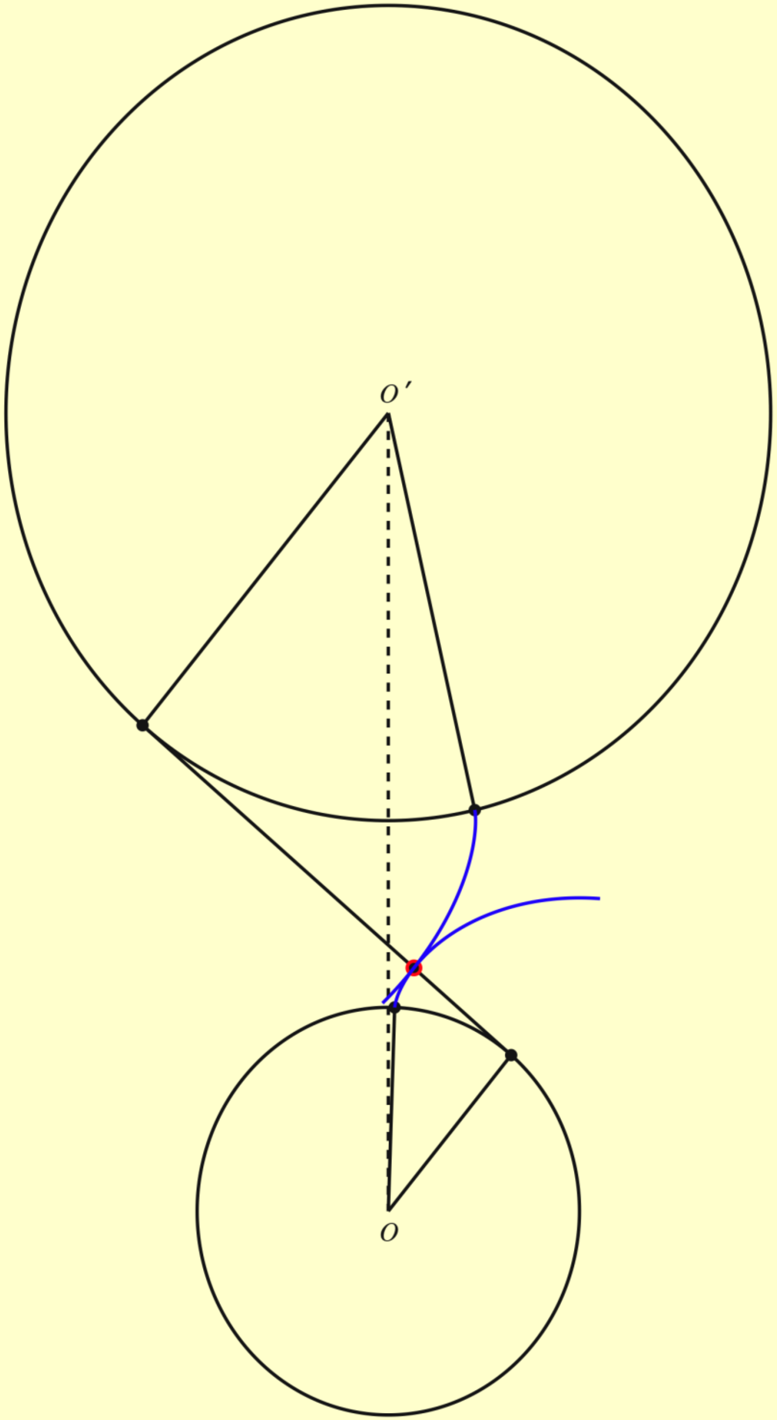
Arc *TD* = $|TA| = |OT|\operatorname{tg}\alpha$

Angle *TOD* (en rad) = $\operatorname{tg}\alpha$

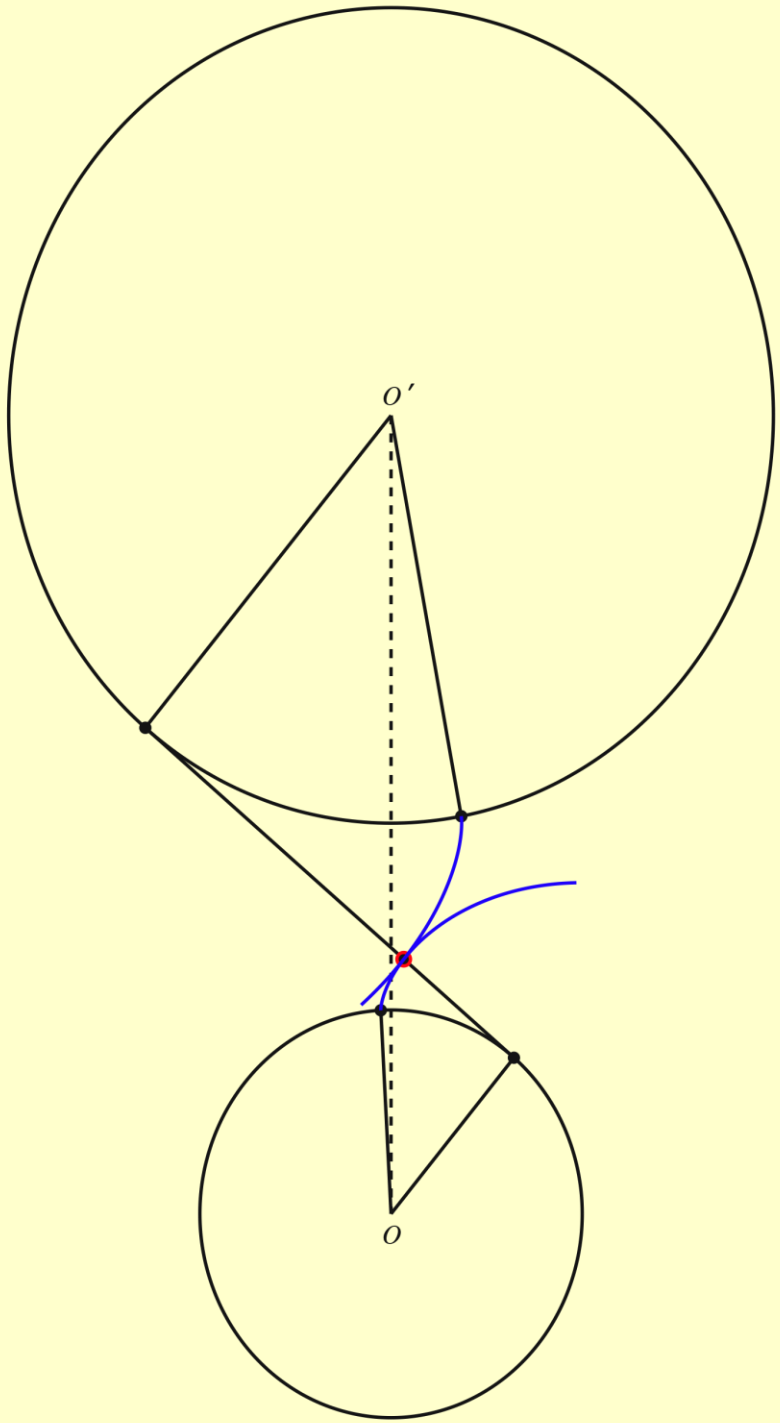
Angle *AOD* (en rad) = $\operatorname{tg}\alpha - \alpha$

Angle *A'O'D'* (en rad) = $\operatorname{tg}\alpha - \alpha$

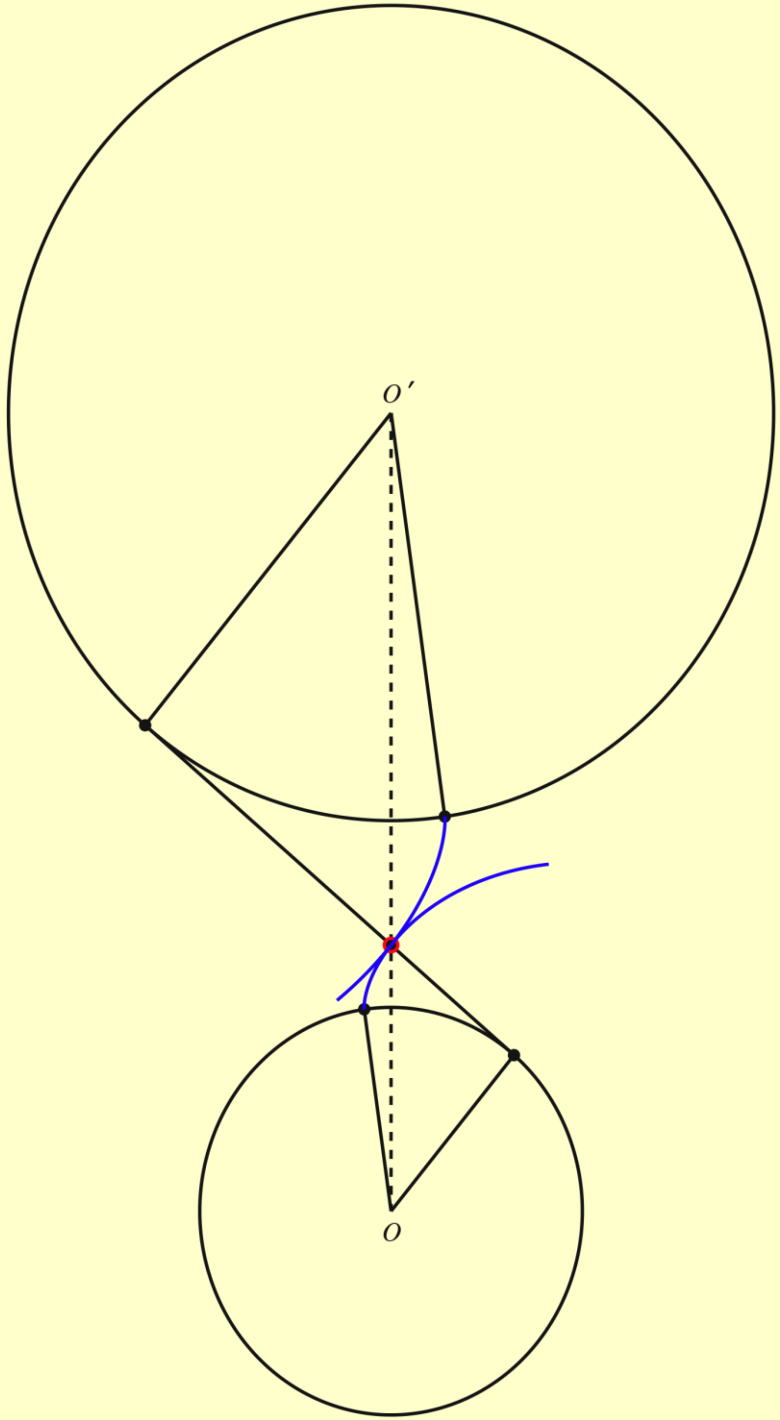

O'
O

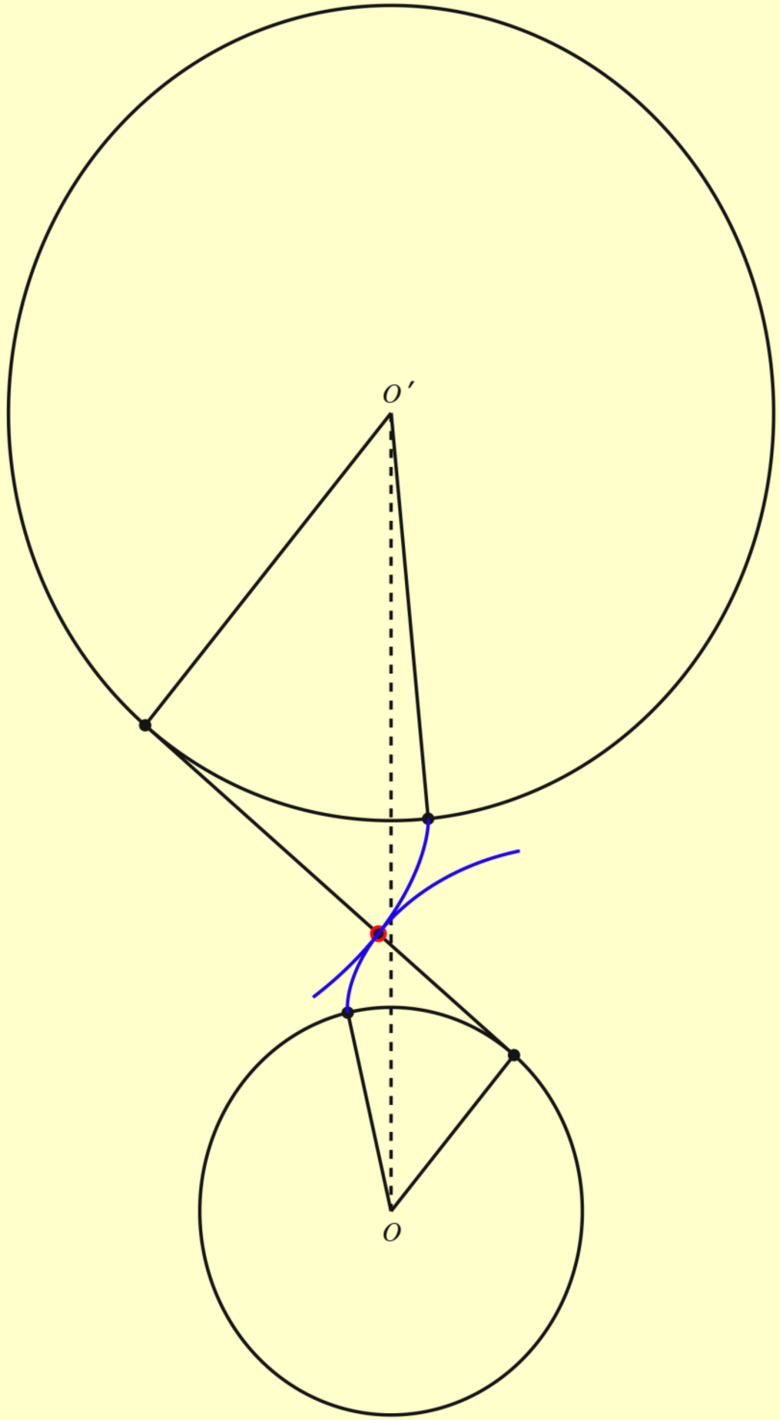


O'
O

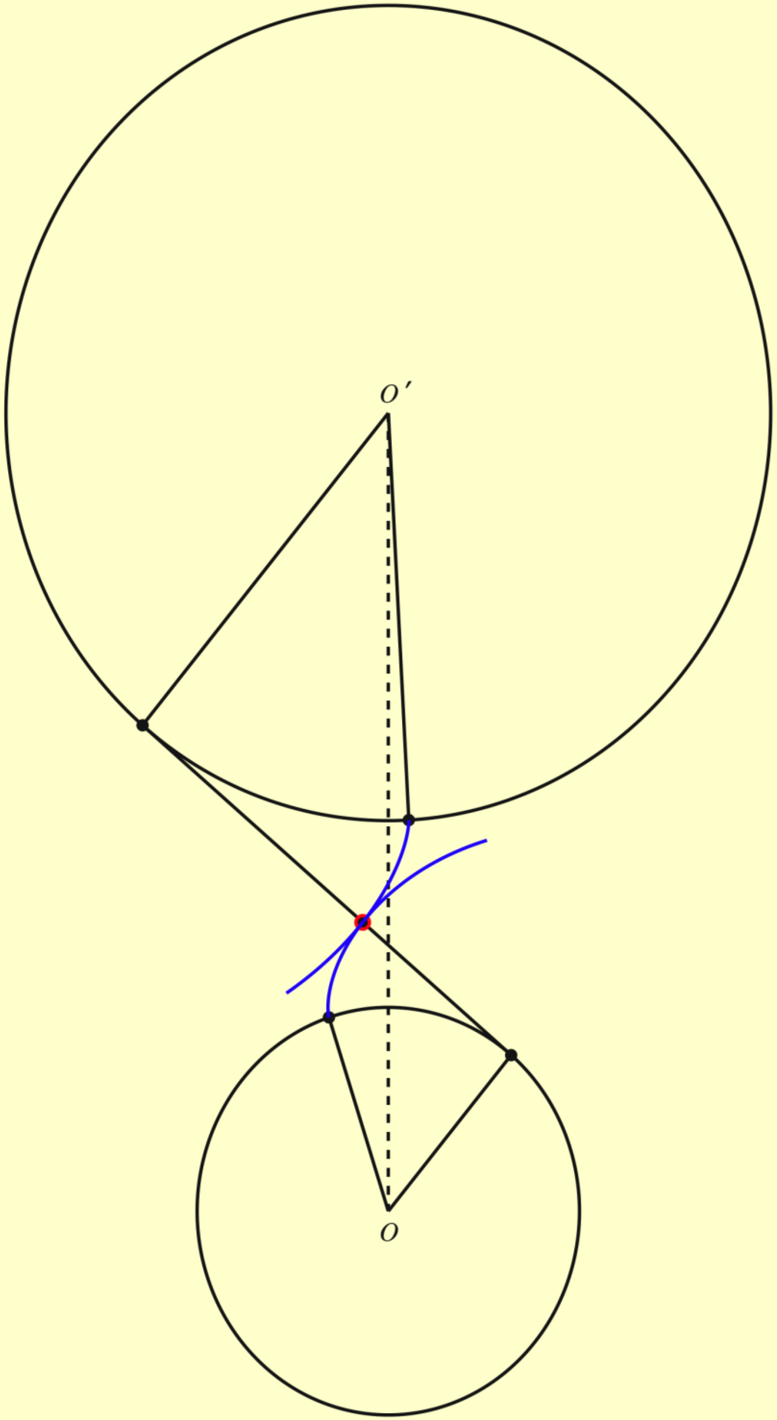


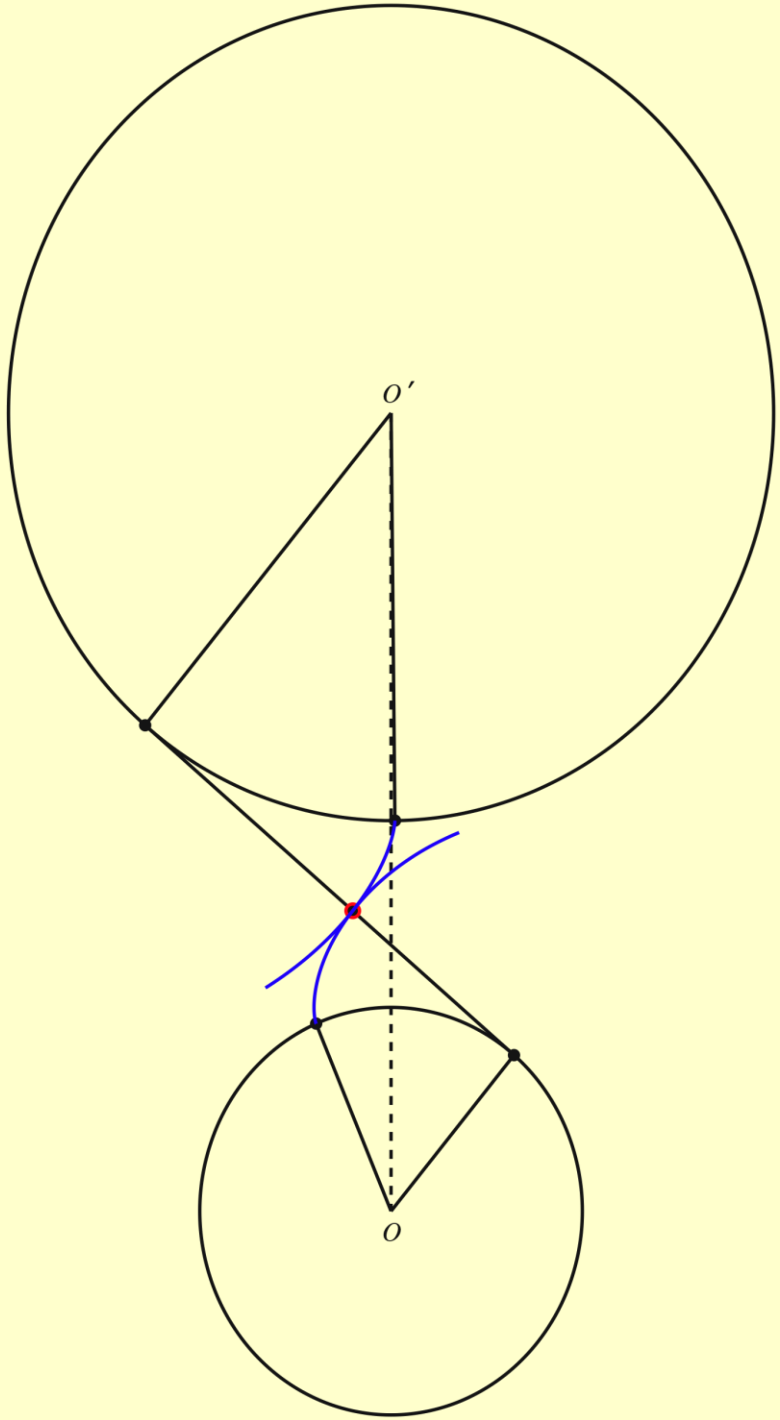
O'
O


O'
O

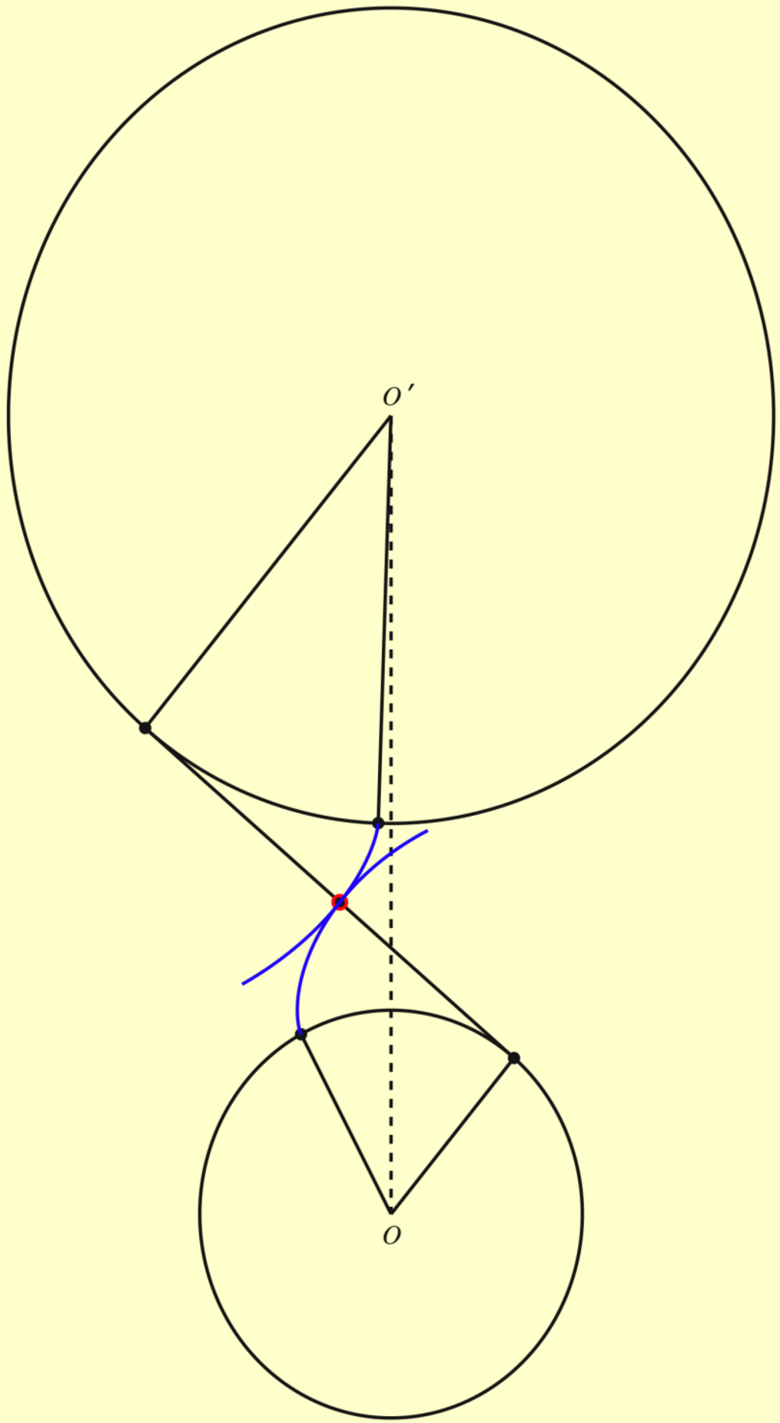


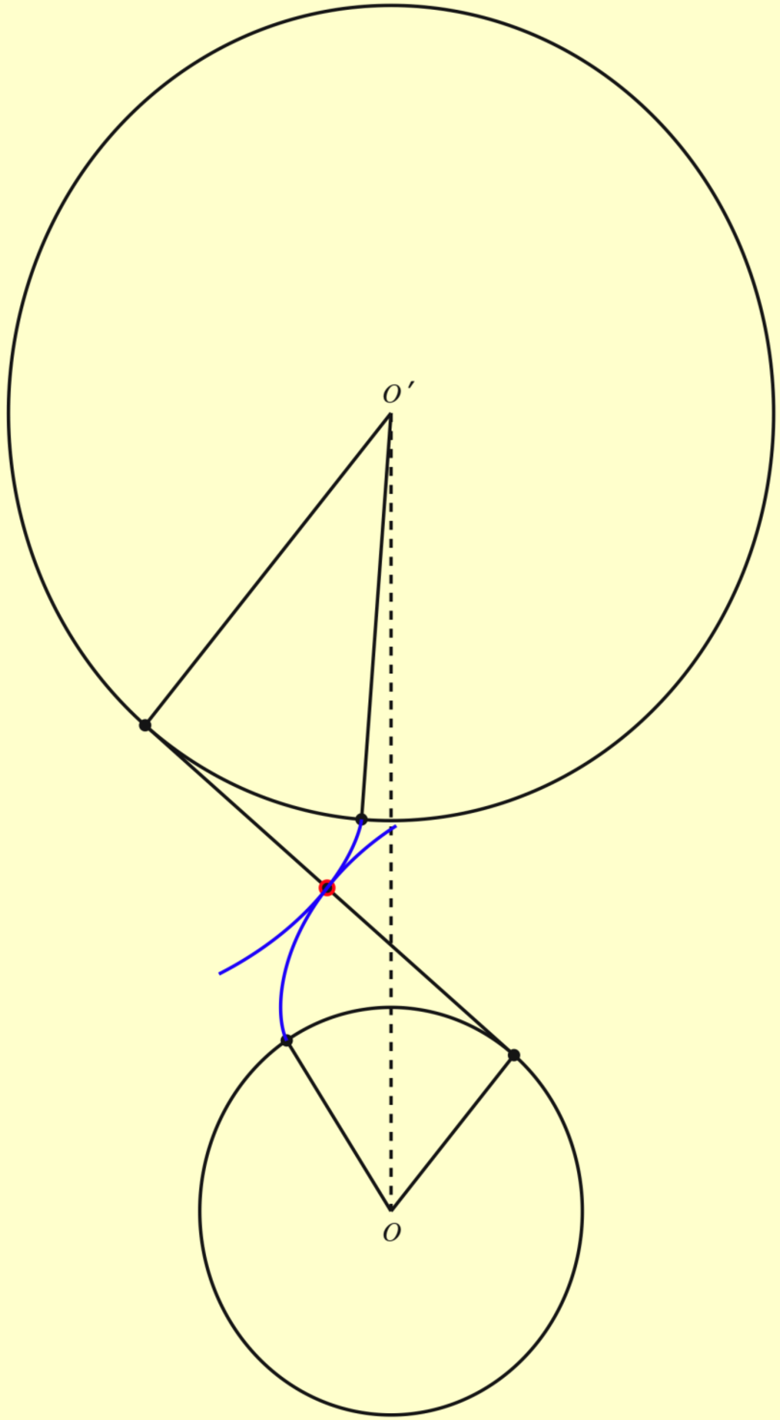
O'
O

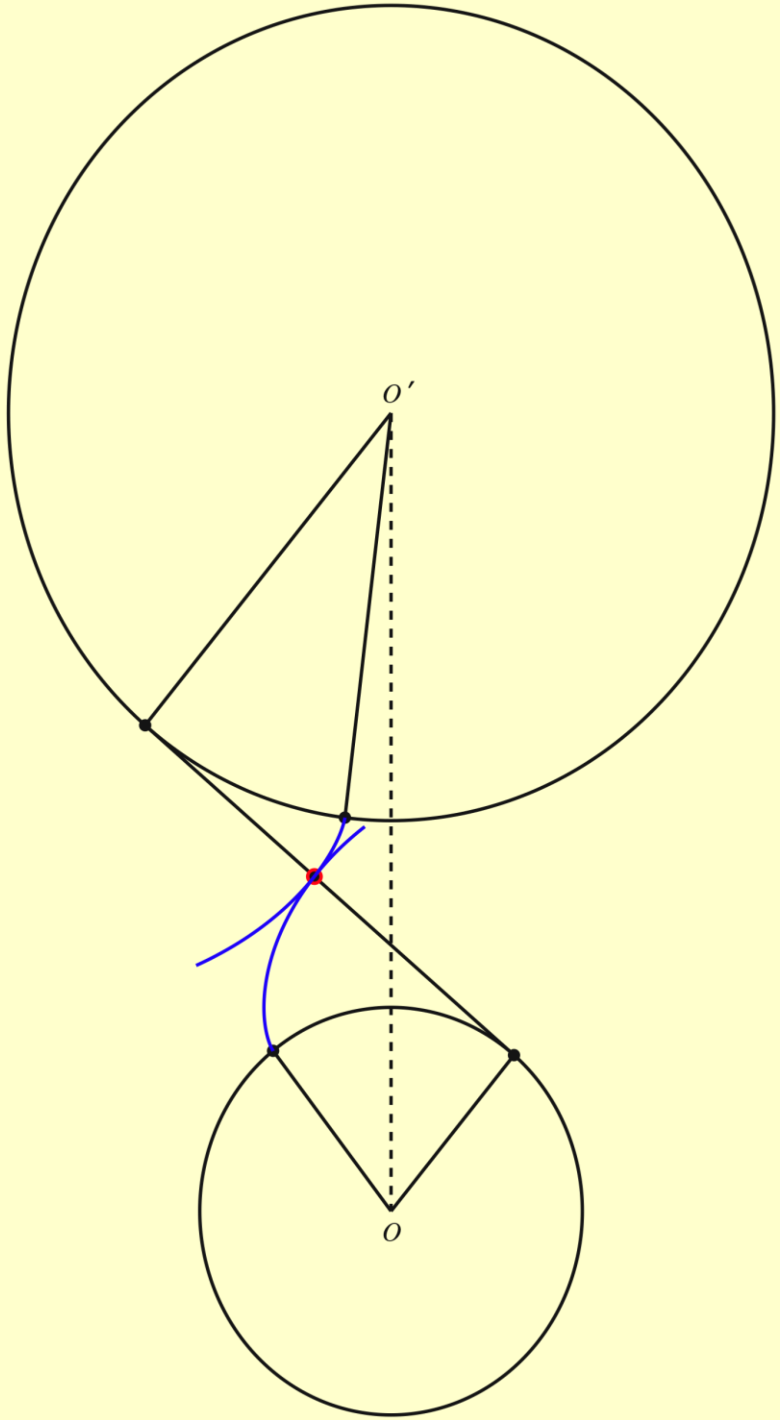

O′
O

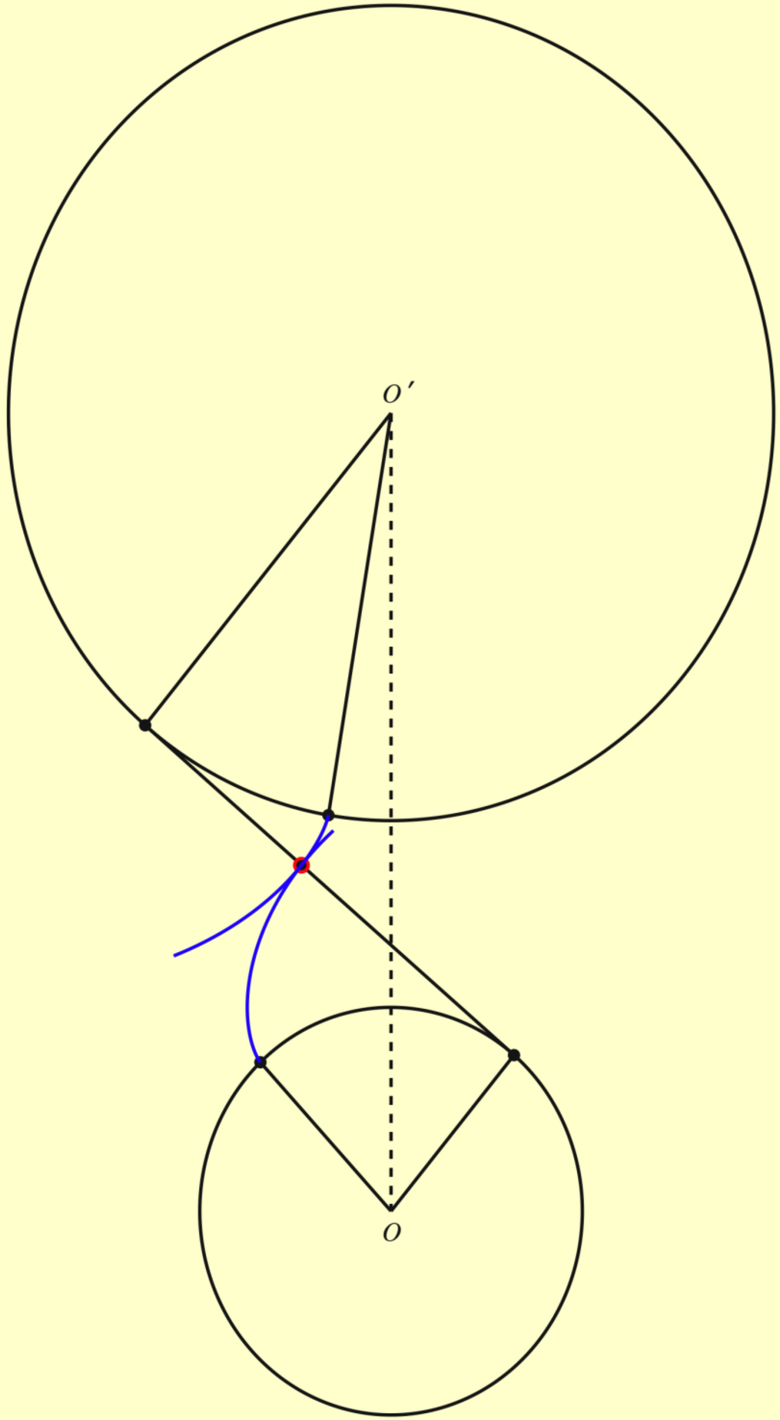


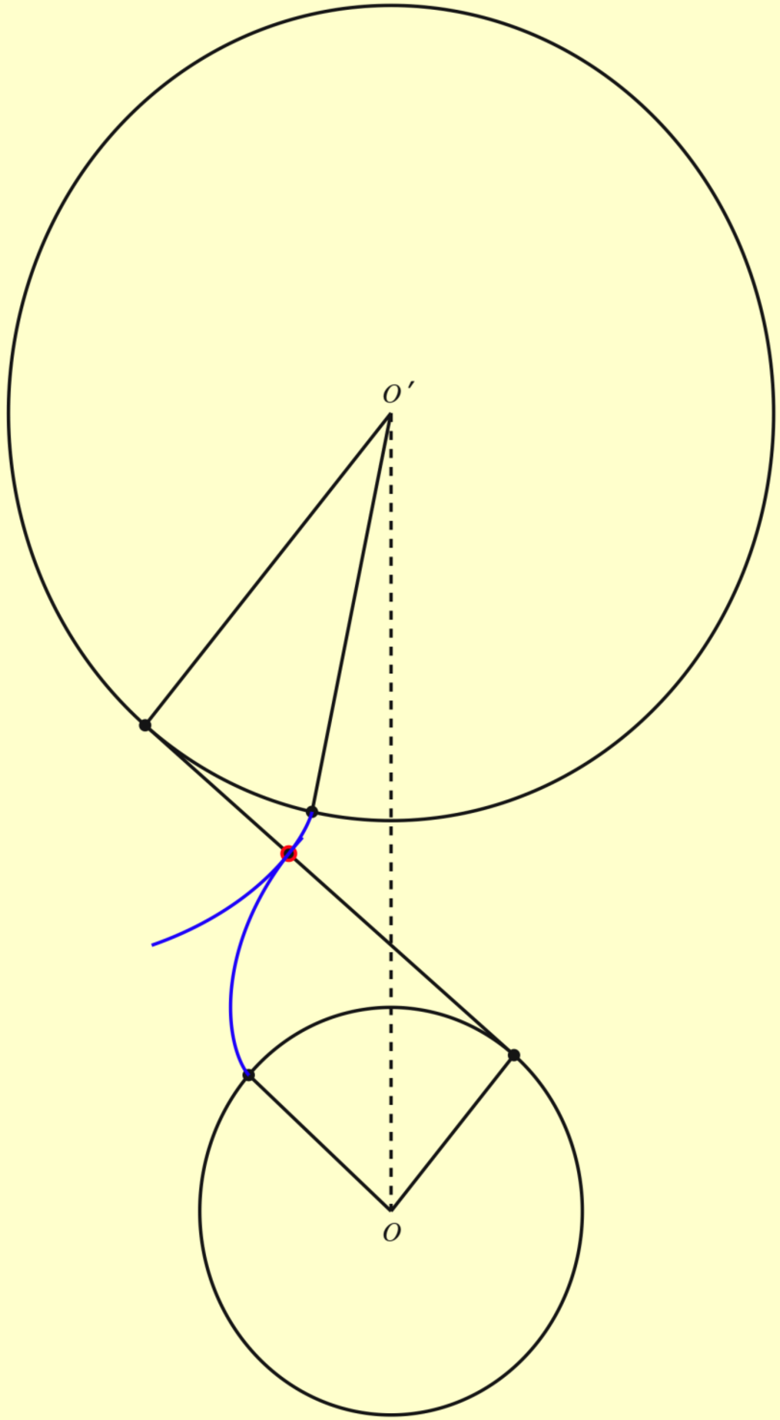
O′
O


O′
O


O′
O


O′
O

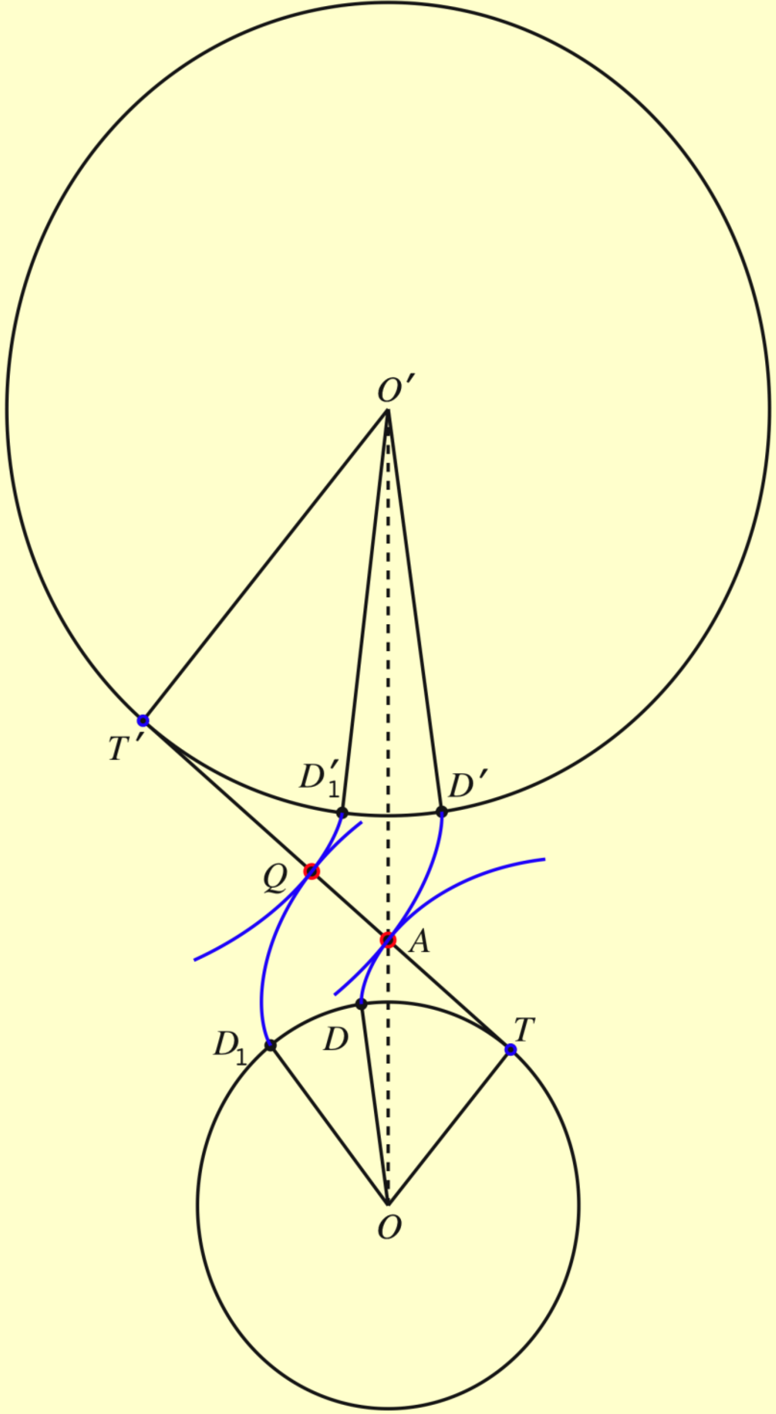

O′
O


O′
O

Activité 4

Faisons tourner la petite roue dans le sens trigonométrique d'un angle β, pas trop grand.

La grande roue suit le mouvement.
De quel angle tourne-t-elle?



La petite roue tourne d'un angle β.

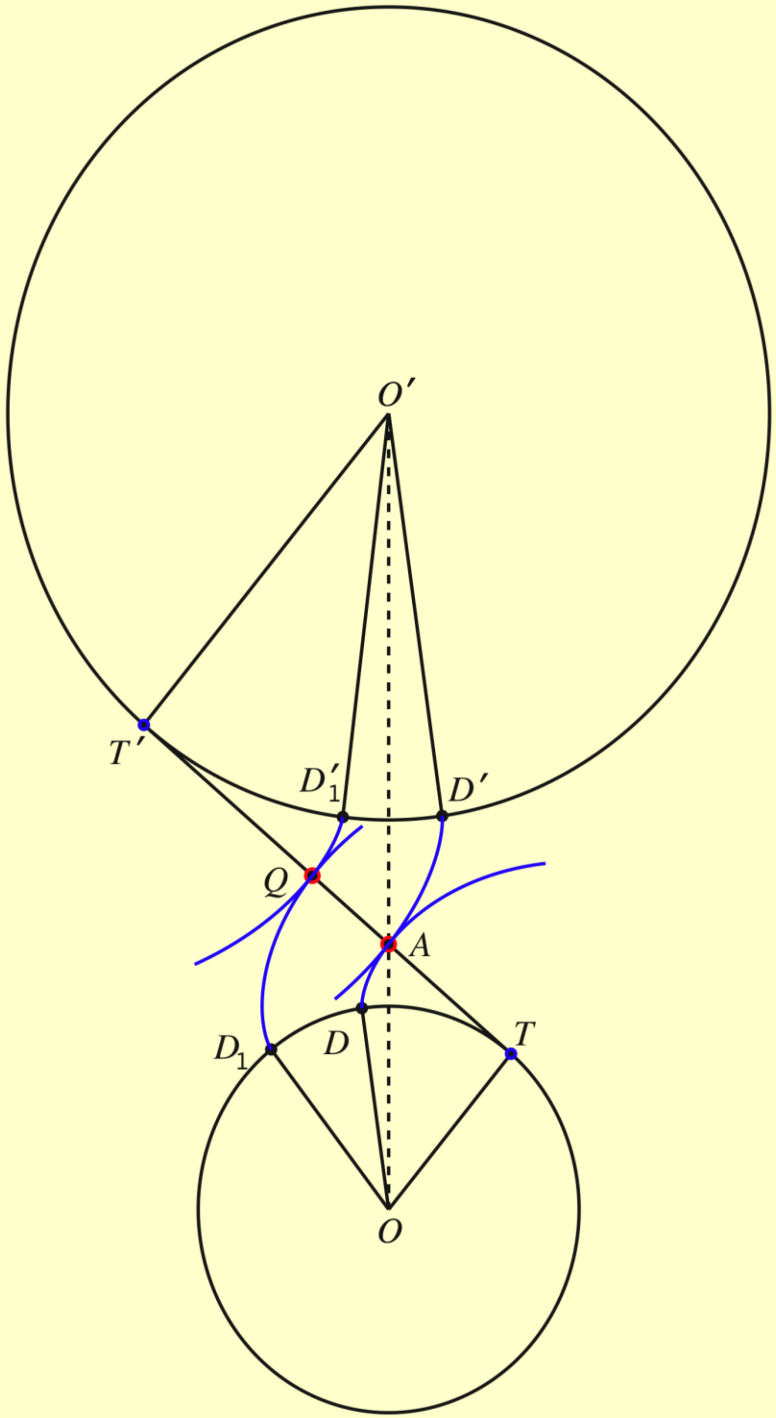
Le point D se déplace en D_1.

Le point de contact se déplace de A en Q.

Le point D' se déplace en D'_1.

Les longueurs de l'arc DD_1,
du segment AQ,
et de l'arc $D'D'_1$
sont égales.

La grande roue tourne d'un angle $\beta/2$.



Quand la petite roue tourne d'un angle β ,

la grande roue de rayon double tourne d'un angle égal à $\beta/2$.

Le mouvement relatif des deux roues est le même que celui de deux cylindres de friction, tangents en A, tournant sans glissement.

Merci pour votre attention