**Ancrer l'apprentissage des mathématiques dans la vie quotidienne par des pratiques pédagogiques incluant le jeu, les réalisations artistiques et les manipulations**

Marie-France GUISSARD et Pauline LAMBRECHT

**Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques**

# 1 Introduction

## 1.1 Les travaux de recherche du CREM

Depuis sa création en 1992, le CREM, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, s'est attaché à identifier les difficultés d'apprentissage liées aux mathématiques et à développer des outils permettant aux enseignants de remédier à ces difficultés [1]. Dans la majorité de ses ouvrages, la philosophie a consisté à dégager des fils conducteurs de la formation mathématique depuis l'enfance jusqu'à l'âge adulte. Les premières recherches ont été consacrées à l'apprentissage de la géométrie ([2] et [3]), puis à la linéarité [4].

La recherche suivante [5] s'est donné pour objectif de porter une réflexion sur ce qui pourrait constituer une culture mathématique de base et de promouvoir des pratiques pédagogiques s'appuyant sur la vie quotidienne, l'histoire, l'art et le jeu.

C'est dans cette même perspective de donner du sens aux activités proposées que le CREM vient de terminer une recherche visant à favoriser l'introduction de certains concepts mathématiques par des séquences d'apprentissage intégrant des manipulations effectuées par les élèves [6].

C'est de ces deux dernières recherches que sont extraites les activités qui illustrent le propos de cette conférence.

## 1.2 Motivations

On constate très souvent que la culture mathématique échappe, de nos jours, à de nombreux adultes, même très cultivés dans d'autres domaines et/ou ayant un niveau d'études supérieures. Combien de fois n'entend-on pas des réflexions du type « Oh, moi les maths, je n'y ai jamais rien compris… », parfois émises avec une certaine fierté ? La réticence à aborder un texte illustré de graphiques, les erreurs d'interprétation dans les problèmes de pourcentages voire l'ignorance du principe fondamental de la numération de position sont autant d'exemples du rejet et de la méconnaissance des mathématiques de base. L'incompréhension augmente encore s'il est question d'analyser des représentations géométriques ou d'utiliser quelques rudiments de symbolisme algébrique. Parmi les causes probables de cet échec dans l'éducation mathématique, on peut sans doute relever d'une part, le choix inapproprié de certaines matières enseignées, mais surtout la manière de présenter celles-ci aux élèves.

Les mathématiques ont pour vocation de résoudre des problèmes. Elles nécessitent la mise en œuvre de processus d'abstraction et de raisonnements analytiques qui dicteront les opérations à effectuer ; c'est en général l'interprétation des résultats qui fournit alors la solution.

Très souvent, dans l'enseignement, l'accent est mis sur les processus opératoires, alors que ceux-ci constituent la phase la moins « humaine » de la résolution des problèmes. En effet, dans notre société moderne, c'est la partie dévolue aux machines. Presque toujours, on impose l'apprentissage d'algorithmes de calcul, sans dire à quelles occasions ces méthodes ont été mises au point, sans justifier leur pertinence ni exhiber des classes de problèmes qu'elles permettent de résoudre. De plus, sous prétexte d'exercer les élèves à utiliser ces algorithmes, on leur soumet des listes de calculs à effectuer hors de tout contexte. Ces pratiques conduisent inévitablement à faire percevoir les mathématiques comme un ensemble de procédures vides de sens, fournissant des réponses vides de sens à des questions vides de sens.

Pour notre part, nous tentons de donner du sens aux mathématiques en proposant des activités susceptibles de rendre un certain plaisir d'apprendre aux élèves démotivés par l'aspect théorique et abstrait des mathématiques. Dans cet exposé, nous illustrerons ce propos par des exemples en lien avec la vie quotidienne, incluant des récréations mathématiques, des réalisations artistiques et des manipulations. Notre but est de promouvoir de telles pratiques pédagogiques encore peu répandues dans l'enseignement des mathématiques en Fédération Wallonie-Bruxelles.

Notre espoir est que les professeurs trouvent, dans les résultats de nos travaux, des outils qui leur permettent de garantir une formation mathématique authentique, d'éveiller l'intérêt des élèves et de construire avec eux des savoirs réellement utiles dans leur vie de citoyen, dans leurs études ultérieures et dans leur vie professionnelle.

## 1.3 Méthodologie des recherches

Suivant les habitudes du CREM, les activités sont d'abord rédigées et documentées, en partenariat avec des enseignants du terrain. Elles sont ensuite expérimentées dans les classes de l'enseignement fondamental et secondaire et réajustées en fonction des observations et des réactions des acteurs : élèves et enseignants.

L'originalité de la méthodologie sur laquelle s'appuie notre recherche réside dans le débat permanent entre enseignants de tous les niveaux : instituteurs, régents, licenciés, docteurs. Chacun des membres du groupe de recherche présente sa production, ciblée sur la tranche d'âge pour laquelle il est le plus compétent, et l'ensemble du groupe participe à la discussion. Il s'agit ainsi d'un travail qui a une portée longitudinale.

La recherche a également pour but de produire des documents destinés aux enseignants. Dans la tradition du CREM, ces documents directement utilisables dans les classes fournissent les informations nécessaires pour aborder les différents thèmes, décrivent des séquences d'apprentissage, donnent la liste du matériel nécessaire pour mener à bien les activités, contiennent des fiches de travail pour les élèves et partagent des échos de classes dans lesquelles les activités ont été testées.

## 2 Les récréations mathématiques

Les récréations mathématiques sont présentes dans les écrits de nombreuses civilisations depuis plus de 4 000 ans. Le *papyrus Rhind*, certaines tablettes d'argile cuite sumériennes contiennent des énoncés dont on ne peut nier le rôle ludique. Ces problèmes se sont transmis de génération en génération et cette tradition n'a jamais été abandonnée. On trouve des défis mathématiques chez ARCHIMÈDE, DIOPHANTE, ALCUIN, FIBONACCI, PACIOLI, BACHET DE MÉZIRIAC, FERMAT, EULER, HAMILTON, … jusqu'à nos *Olympiades mathématiques* actuelles.

Décoder un message ou découvrir quelque chose de caché est un puissant ressort psychologique, particulièrement chez les enfants. Il en est de même de récréations mathématiques présentées sous forme de tours de magie dont il faut rechercher l'explication. Les exemples présentés ici permettent d'apprendre à formaliser un énoncé et montrent la puissance du symbolisme algébrique.

### 2.1 Retrouver le nombre pensé

On demande à chaque élève de penser un nombre et d'effectuer les différents calculs énoncés par l'enseignant en respectant la consigne suivante.

> Choisis un nombre. Multiplie-le par 8. Ajoute 10 au produit obtenu. Divise cette somme par 2. Ajoute 7 au quotient. Divise cette somme par 4. Et enfin, retranche 3.
>
> Je parie que chacun d'entre vous a obtenu comme résultat final le nombre qu'il avait choisi au départ !

L'objectif est d'expliquer ce phénomène.

Le raisonnement se fera en plusieurs phases. Après avoir illustré le problème par quelques exemples numériques, on effectue partiellement les calculs de manière à ce que le nombre de départ reste apparent dans les expressions successives. Enfin, on remplace ce dernier par une lettre de manière à généraliser l'explication.

Première étape : quelques exemples numériques proposés par les élèves sont écrits au tableau.

$$\boxed{15} \xrightarrow{\times 8} \boxed{120} \xrightarrow{+10} \boxed{130} \xrightarrow{:2} \boxed{65} \xrightarrow{+7} \boxed{72} \xrightarrow{:4} \boxed{18} \xrightarrow{-3} \boxed{15}$$

$$\boxed{37} \xrightarrow{\times 8} \boxed{296} \xrightarrow{+10} \boxed{306} \xrightarrow{:2} \boxed{153} \xrightarrow{+7} \boxed{160} \xrightarrow{:4} \boxed{40} \xrightarrow{-3} \boxed{37}$$

$$\boxed{-8} \xrightarrow{\times 8} \boxed{-64} \xrightarrow{+10} \boxed{-54} \xrightarrow{:2} \boxed{-27} \xrightarrow{+7} \boxed{-20} \xrightarrow{:4} \boxed{-5} \xrightarrow{-3} \boxed{-8}$$

Deuxième étape : chaque phase de calcul est réécrite en faisant apparaître clairement le nombre de départ, ce qui met en relief la suite des opérations. L'enseignant écrit ce nombre en couleur. Dans la présentation ci-dessous, il est noté en gras.

$$\boxed{\mathbf{15}} \xrightarrow{\times 8} \boxed{\mathbf{15}\times 8} \xrightarrow{+10} \boxed{(\mathbf{15}\times 8)+10} \xrightarrow{:2} \boxed{(\mathbf{15}\times 4)+5}$$

$$\xrightarrow{+7} \boxed{(\mathbf{15}\times 4)+12} \xrightarrow{:4} \boxed{\mathbf{15}+3} \xrightarrow{-3} \boxed{\mathbf{15}}$$

Nous ne proposons qu'un exemple numérique. Dans les classes, l'enseignant procèdera de la sorte à plusieurs reprises de manière à clarifier le phénomène ; l'étape suivante en sera facilitée.

Troisième étape : la formalisation est nécessaire pour comprendre la constance du résultat. Pour ce faire, le canevas établi précédemment est conservé.

$$\boxed{\boldsymbol{a}} \xrightarrow{\times 8} \boxed{8\boldsymbol{a}} \xrightarrow{+10} \boxed{8\boldsymbol{a}+10} \xrightarrow{:2} \boxed{4\boldsymbol{a}+5} \xrightarrow{+7} \boxed{4\boldsymbol{a}+12} \xrightarrow{:4} \boxed{\boldsymbol{a}+3} \xrightarrow{-3} \boxed{\boldsymbol{a}}$$

Ce développement algébrique illustre de manière claire qu'après les différents calculs, le résultat final est le nombre choisi.

Une fois que les élèves ont compris le principe, ils proposent de rendre le tour plus intéressant. Selon eux : « C'est nul que le prof ne doive pas calculer et pas réfléchir pour retrouver le nombre choisi ». Ils veulent ajouter une manipulation que l'enseignant aura à effectuer une fois qu'ils lui donneront leurs résultats. Modifier le tour en ce sens peut se faire avec les élèves, certains ont d'ailleurs immédiatement fait des propositions. Un exemple cité a été de ne pas terminer par −3 mais par −8. De la sorte, l'enseignant doit ajouter 5 au résultat qui lui sera donné pour trouver le nombre initial.

## 2.2 Deviner le domino

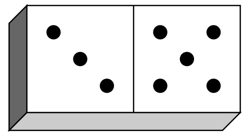
Un ensemble de dominos est étalé sur la table. Les élèves en choisissent un que l'enseignant va deviner. Pour ce faire, il demande aux élèves d'effectuer les calculs suivants.

| |
|---|
| Multiplie le nombre de gauche par 5. Ajoute 7 au résultat obtenu. Multiplie le résultat par 2. Retranche 14. Ajoute le nombre de droite du domino. |

Le résultat obtenu par les élèves est un nombre à deux chiffres. Le chiffre des dizaines correspond au nombre de gauche du domino et le chiffre des unités au nombre de droite du domino. L'élève donne le résultat obtenu au bout de la procédure proposée par l'enseignant et ce dernier retrouve sans mal le domino choisi. Il répète l'expérience à plusieurs reprises.

L'objectif de cette activité est d'amener les élèves à expliquer le phénomène. Ils auront vite fait de remarquer que les deux chiffres du nombre qu'ils obtiennent désignent les points du domino. Il reste maintenant à comprendre pourquoi il en est ainsi.

On commence par écrire les calculs qui ont été faits mentalement et on les présente comme ci-dessous.



$$\boxed{3} \xrightarrow{\times 5} \boxed{15} \xrightarrow{+7} \boxed{22} \xrightarrow{\times 2} \boxed{44} \xrightarrow{-14} \boxed{30} \xrightarrow{+5} \boxed{35}$$

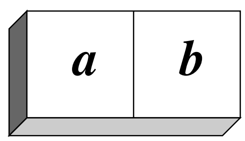
Si l'élève est de l'autre côté du domino, sa gauche et sa droite sont inversées et son résultat est 53, nombre qui désigne le même domino.

La deuxième étape vers la compréhension du phénomène consiste à développer quelques exemples en effectuant partiellement les calculs de manière à conserver tout au long du déroulement les deux nombres du domino, comme pour le domino choisi.

$$\boxed{\mathbf{3}} \xrightarrow{\times 5} \boxed{\mathbf{3} \times 5} \xrightarrow{+7} \boxed{(\mathbf{3} \times 5) + 7} \xrightarrow{\times 2} \boxed{(\mathbf{3} \times 10) + 14} \xrightarrow{-14} \boxed{\mathbf{3} \times 10} \xrightarrow{+\mathbf{5}} \boxed{\mathbf{3} \times 10 + \mathbf{5}}$$

Une difficulté est apparue au moment de multiplier par 2 une somme dont un des termes est un produit.

La dernière étape consiste à généraliser les observations faites jusqu'ici sur des exemples numériques. Pour ce faire, nous inventons un « domino algébrique ».




$$\boxed{\boldsymbol{a}} \xrightarrow{\times 5} \boxed{5\boldsymbol{a}} \xrightarrow{+7} \boxed{5\boldsymbol{a}+7} \xrightarrow{\times 2} \boxed{10\boldsymbol{a}+14} \xrightarrow{-14} \boxed{10\boldsymbol{a}} \xrightarrow{+b} \boxed{10\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}$$

Une fois la procédure de calcul décortiquée et formalisée, l'explication du phénomène apparaît clairement. Il reste cependant à interpréter l'écriture $10a + b$ comme l'écriture qui produit le nombre dont les chiffres sont *a* et *b* (dans cet ordre, avec *a* et *b* compris entre 0 et 6).

## 3 Les réalisations artistiques

Les réalisations artistiques de nature géométrique, dont on retrouve des exemples dans toutes les civilisations et à toutes les époques, peuvent servir de support à l'apprentissage de la géométrie. On peut exploiter les peintures murales dans l'art africain, les zelliges de l'art hispano-musulman, mais aussi les pavages qui décorent les cuisines et les salles de bain, les frises qui ornent la vaisselle et le linge de maison…

Par des activités alliant le côté créatif à l'analyse des structures mathématiques, nous croyons qu'il est possible de stimuler le besoin de comprendre par le désir de créer. Un tel apprentissage développe l'intuition et aiguise le sens de l'observation, tout en procurant à la fois une satisfaction intellectuelle et un plaisir esthétique. La géométrie, qui a souvent été cantonnée à l'enseignement du raisonnement logique et de la méthode hypothético déductive, retrouve ainsi son attrait visuel et l'un de ses rôles fondamentaux, l'organisation et la structuration de l'espace.

Pour certains élèves, la motivation à la pratique d'activités géométriques peut être directement liée au travail en atelier. L'apprentissage peut encore être enrichi par l'utilisation de logiciels de dessin. C'est l'occasion d'un premier contact avec le DAO (dessin assisté par ordinateur), un des nombreux domaines où mathématiques, techniques et arts se rencontrent.

Les décors géométriques, tels que peintures murales, pavages, frises, … et les assemblages de polygones constituent le matériel de base des activités géométriques proposées.

## 3.1 Les peintures murales africaines

En Afrique australe, certaines peintures murales appelées *litema* sont composées par juxtaposition d'un certain nombre de motifs identiques placés dans des orientations variées (figures 1 et 2).

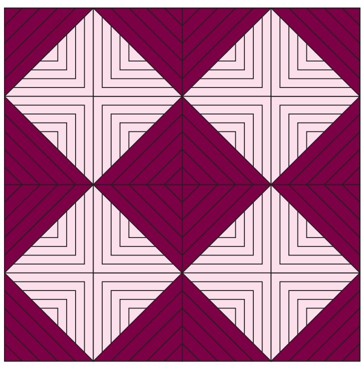


*Fig. 1*

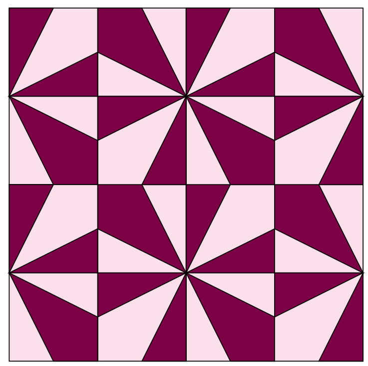


*Fig. 2*

On propose aux élèves du primaire (à partir de huit ans) de réaliser dans le même esprit des puzzles sur une grille carrée composées de seize cases, à partir des pièces de la figure 3. Il y en a de deux types symétriques l'un de l'autre. Les enfants reçoivent seize pièces de chaque type, ils ne doivent donc pas les utiliser toutes. La seule consigne est de réaliser quelque chose de joli.

Au départ, une grande majorité des élèves étalent, sur leur banc, l'ensemble des 32 pièces. Alors que la plupart remarquent que, parmi les pièces données, il y en a de deux types – pour les enfants, l'élément qui varie d'une pièce à l'autre est la place du demi-disque lorsque la flèche est orientée dans le même sens (figure 4) –, aucun élève ne prend cependant le temps de les classer en deux « paquets » distincts.

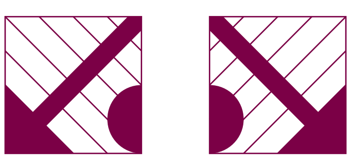


*Fig. 3*

*Fig. 4*

Les élèves sont attentifs aux éléments prégnants de la pièce de départ, à savoir la flèche et le demi-disque. Les mouvements qu'ils réalisent au cours de la constitution du puzzle sont donc influencés par ces deux éléments qu'ils cherchent à associer de diverses façons pour constituer des dessins qui les satisfassent sur le plan esthétique.

Voici ci-dessous deux puzzles réalisés par les enfants, qui montrent des réalisations parfaitement symétriques pour l'ensemble du puzzle, avec deux axes de symétrie (figure 5) ou seulement un axe vertical (figure 6). D'autres puzzles présentent quelques irrégularités, mais d'une manière générale les enfants s'attachent à réaliser une composition très symétrique.

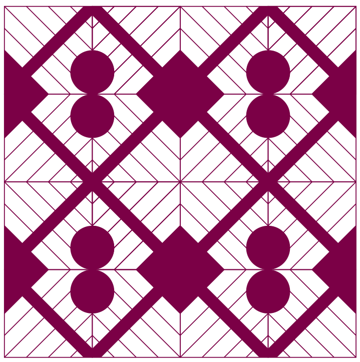


*Fig. 5*

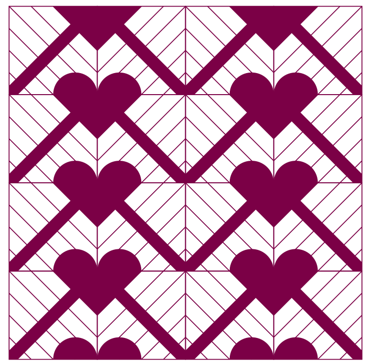


*Fig. 6*

L'étape suivante consiste à essayer de comprendre comment il se fait qu'on obtienne une telle variété de résultats, en partant de pièces pourtant identiques. À la demande de l'enseignant, les enfants observent attentivement chaque puzzle, puis regroupent ceux qui se ressemblent. Il est évident que les critères de ressemblance peuvent être très variés, se rapportant tantôt à ce que le puzzle représente, tantôt à la position des pièces. Néanmoins, grâce à ce classement et aux explications qu'ils en donnent, certains enfants vont pouvoir mettre, spontanément, des mots sur les différents mouvements accomplis avec les pièces pour composer le puzzle. Le travail se poursuit par la mise en place du vocabulaire adéquat, la recherche d'axes de symétries, …

## 3.2 Les pavages

Les pavages sont très présents dans la vie de tous les jours : les carrelages de cuisine, les trottoirs, les allées de garage, les murs de briques, … sont autant de motifs qui nous semblent banals et que nous ne prenons plus le temps de regarder. Pourtant, ils sont élaborés avec rigueur et régularité.

L'étude des pavages, dès le début du secondaire, donne l'occasion d'aborder les constructions élémentaires et bon nombre de concepts mathématiques, tels que les angles, les symétries et les rotations. Elle constitue une bonne activité mathématique qui va nous mener à une analyse approfondie des pavages réguliers et semi-réguliers en passant par des considérations sur les mesures des angles.

**Pavages réguliers**

Après avoir observé et analysé quelques pavages dans le but de clarifier le concept, on distribue aux élèves des enveloppes contenant une série de polygones réguliers de côtés de même longueur. On leur demande d'amorcer avec ces pièces un pavage du plan de telle sorte que deux polygones qui se touchent aient en commun soit un sommet, soit un côté complet. Cette première phase permet aux élèves de se familiariser avec le matériel, de s'approprier le vocabulaire et de prendre conscience qu'il faut au moins trois polygones en en nœud et que la somme des angles doit valoir 360°.

On leur demande ensuite de paver le plan uniquement à l'aide de polygones réguliers identiques pour faire émerger les trois seuls pavages réalisables de cette manière (figures 7 à 9), à l'aide

de triangles équilatéraux,

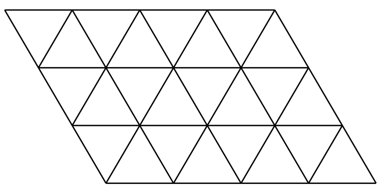


*Fig. 7*

de carrés,

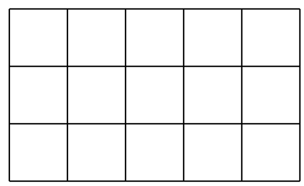


*Fig. 8*

ou d'hexagones réguliers.

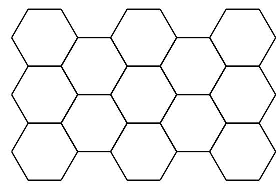


*Fig. 9*

Les élèves doivent expliquer pourquoi ils n'ont pu trouver que ces trois pavages réguliers, ce qui les amène à une réflexion sur les angles des polygones.

Pourquoi n'est-il pas possible de paver le plan avec d'autres polygones réguliers d'une seule sorte ? Il est impossible de paver le plan avec des pentagones car si on en met trois, il y a une lacune comme le montre la figure 10, et si on en met quatre, ils se superposent, comme à la figure 11. Par l'illustration de la figure 12, le professeur peut facilement montrer aux élèves que la valeur de l'angle intérieur d'un polygone ne cesse d'augmenter avec le nombre de ses côtés. La justification est donc bien finie lorsqu'on a vu que trois fois la valeur de l'angle d'un heptagone dépasse 360°.

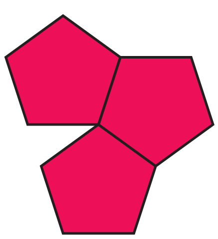


*Fig. 10*

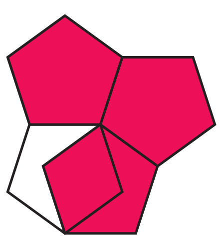


*Fig. 11*

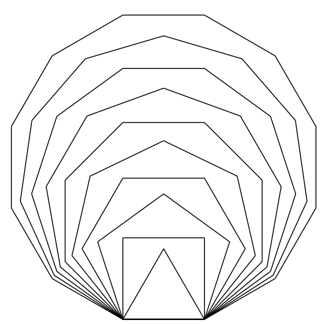


*Fig. 12*

Il y a donc trois pavages réguliers dont nous avons montré l'existence ; on peut considérer que cette démarche correspond à une démonstration intuitive largement suffisante pour des élèves de treize ans.

L'élaboration d'une formule donnant de manière générale l'angle d'un polygone régulier à $n$ côtés permet de poursuivre par un travail sur les pavages semi-réguliers.

**Pavages semi-réguliers**

En utilisant le matériel, en tenant compte des mesures des angles des polygones et en organisant le travail dans un tableau examinant de manière systématique les différents assemblages de polygones autour d'un nœud, il est possible de découvrir les onze pavages semi-réguliers. Voici par exemple un pavage composé d'octogones et de carrés (figure 13).

*Fig. 13*

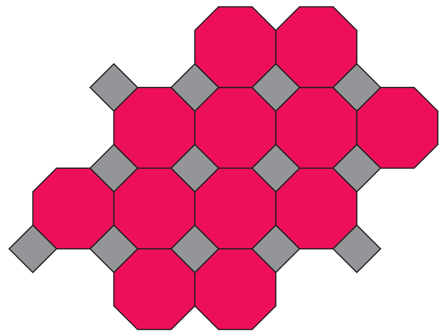


*Fig. 14*

Notons que l'ensemble de l'activité peut être exécutée avec le logiciel Apprenti Géomètre[1] comme le montre la figure 14, plutôt qu'avec des polygones en carton.

## 4 Les manipulations (*Math & Manips*)

Nous appelons *Math & Manip* une séquence d'apprentissage qui intègre des manipulations effectuées par les élèves. Nous espérons provoquer chez certains d'entre eux de la curiosité par des manipulations dont les résultats semblent en contradiction avec leurs connaissances antérieures. Notre but est de développer un intérêt pour aller plus loin dans leur apprentissage des mathématiques. La *Math & Manip* doit amener les élèves à se poser des questions et tâcher de trouver un modèle qui correspond mieux à la réalité de la situation.

Dans les classes maternelles et primaires, les enseignants sont habitués à faire manipuler les élèves. Toutefois, certaines manipulations sont, plus que d'autres, susceptibles d'installer des concepts mathématiques fondamentaux. Nous nous efforçons de proposer des activités où la nécessité de la manipulation est réellement motivée par le contexte, et où l'expérimentation fournit la réponse à une question pertinente. Notre but est de mettre en évidence pour les enseignants les compétences qui sont développées par chacune de nos *Math & Manips*, ainsi que les notions qu'elles installent, mais aussi de montrer en quoi elles contribuent à une meilleure compréhension de notions parfois abstraites. Les *Math & Manips* s'inscrivent dans un contexte plus général de construction des savoirs par l'élève, elles visent à construire de nombreux concepts dans le domaine des grandeurs, font percevoir la nécessité de certains outils, comme la notion d'étalon conventionnel et les systèmes de mesure. Elles ne remplacent pas tous les exercices traditionnels mais leur donnent du sens.

[1] Le logiciel Apprenti Géomètre est téléchargeable gratuitement sur le site du CREM.

La transition de l'enseignement primaire vers l'école secondaire est problématique à de nombreux niveaux. En mathématiques, on observe un glissement des mathématiques concrètes issues du monde sensible vers une formalisation de plus en plus importante. Pour beaucoup d'élèves, ce cap est très difficile à franchir.

Notre projet vise à réintroduire dans les classes du secondaire un espace où les liens entre le concret et les modèles mathématiques émergent des manipulations physiques réalisées par les élèves et où ces modèles deviennent une nécessité pour traiter les problèmes posés plutôt qu'une donnée pré-existante.

Dans les *Math & Manips*, nous proposons des activités qui donnent du sens aux concepts qu'elles introduisent et aux outils qu'elles nécessitent.

## 4.1 Empreintes

Avant de commencer cette activité, consacrée à l'école maternelle, l'enseignant explique ce qu'est une empreinte. Il peut en faire la démonstration en enduisant de peinture une face plane d'une boîte et en l'appliquant sur une feuille de papier. Par la suite, il montre qu'on peut obtenir le même effet en contournant cette face de la boîte et en coloriant l'intérieur de la ligne ainsi tracée. Ce sont les surfaces ainsi obtenues que nous appelons « empreintes » dans cette activité.

Nous travaillons uniquement avec les empreintes de faces planes, l'objet ne peut ainsi ni glisser ni rouler lorsqu'on trace le contour d'une face. Par exemple, les seules empreintes d'un cylindre prises en considération seront des disques.

**Empreintes libres**

L'enseignant dépose les boîtes en vrac sur la table, afin qu'elles ne soient pas toutes présentées dans une position habituelle. Il choisit une boîte et réalise sur une feuille l'empreinte d'une de ses faces en la contournant à l'aide d'un feutre et en coloriant l'intérieur de son tracé. Il insiste sur le fait que l'empreinte d'une face correspond à toute la surface colorée et non à son contour. L'enseignant distribue quelques feuilles et un feutre à chaque élève et demande de choisir une boîte et de dessiner son empreinte.

Les élèves devraient dessiner plusieurs empreintes en plaçant leur boîte de différentes manières sur leur feuille. Par exemple, une boîte en forme de prisme droit à bases triangulaires peut donner des empreintes triangulaires et des empreintes rectangulaires.

Si un élève dessine deux empreintes identiques, c'est l'occasion de faire remarquer que les faces correspondantes de la boîte sont identiques. Cette première manipulation a pour but de familiariser l'élève avec la notion d'empreinte et non de trouver toutes les empreintes possibles d'une même boîte.

**Association**

L'enseignant place sur la table de grandes feuilles sur lesquelles sont dessinées les empreintes de toutes les faces des boîtes présentées aux élèves. Il demande de choisir une boîte et de retrouver ses différentes empreintes. La démarche inverse est travaillée ensuite. Il s'agit alors de montrer la face d'une boîte qui correspond à une empreinte désignée par l'enseignant. Dans chacun des cas, l'élève vérifie son choix en déposant la face de la boîte sur l'empreinte (figure 15).

*Fig. 15*

Si l'échantillon de boîtes le permet, l'enseignant peut faire trouver aux élèves deux boîtes ayant une face qui donne la même empreinte. Ces deux faces sont alors identiques, on peut les « coller » l'une contre l'autre.

**Ressemblance**

L'enseignant dispose sur la table les différentes boîtes, des gommettes et quatre formes de couleur représentant un carré, un triangle, un rectangle et un disque. Les enfants ont pour consigne de choisir une boîte, montrer une de ses faces et, si possible, identifier cette face à l'une des figures géométriques proposées. Il applique alors une gommette de même couleur que la figure sur la face indiquée. S'il montre une face plane qui ne correspond à aucune figure de référence, il ne met pas de gommette et explique pourquoi.

De ce fait, l'élève apprend à observer la forme d'une figure indépendamment de ses mesures, et indépendamment du solide. Deux faces avec des gommettes de même couleur sont associées à une même figure, mais ne sont pas pour autant superposables.

Notons que si les empreintes dessinées sur papier par l'enseignant ne sont pas coloriées, elles sont perçues par les élèves comme un contour et non une surface et donc plus difficilement associées à une face.

## 4.2 Les étalons

Cette *Math & Manip* est destinée principalement à des élèves du primaire. Elle propose en effet de découvrir les étalons conventionnels de capacité en partant de comparaisons directes et indirectes avec des étalons familiers.

L'enjeu principal de cette suite d'activités est d'amener les élèves à prendre conscience de la nécessité de s'accorder sur un étalon.

**Comparaison directe**

La première phase de cette *Math & Manip* est de proposer aux élèves deux récipients et de leur demander d'identifier celui qui a la plus grande capacité.

Après une discussion pendant laquelle les élèves émettent leur avis (le plus grand car le plus large, le plus grand car le plus haut, impression que l'un est plus grand, etc.), l'enseignant leur demande de vérifier ce qu'ils affirment en transvasant par exemple le contenu de l'un dans l'autre. Le résultat de la manipulation (eau qui déborde, reste d'eau dans un des récipients, etc.) permet de déterminer quel récipient a la plus grande capacité.

**Comparaison indirecte (étalons familiers)**

Pour poursuivre l'activité, l'enseignant divise la classe en deux groupes et raconte l'histoire suivante :

> *Vous êtes deux équipes d'archéologues. Avant de partir en expédition, vous faites vos malles ensemble et vous emportez exactement le même matériel de travail. Une équipe part sur un site de fouilles en Grèce, une autre en Égypte. Au cours des fouilles, vos deux équipes se donnent des nouvelles. Il se fait qu'elles ont trouvé toutes les deux une amphore. L'une et l'autre estiment qu'elles ont découvert l'amphore de plus grande capacité. Malheureusement, ces amphores sont trop fragiles pour être transportées de sorte qu'il n'est pas possible de les comparer directement. Vous pouvez utiliser le matériel de votre malle et échanger des informations écrites. Vous êtes également en contact avec un expert belge auquel vous devez envoyer un rapport mentionnant les capacités de vos amphores et les résultats de la comparaison.*

En découvrant le contenu – identique pour les deux groupes – de la valisette, les élèves sont confrontés au choix d'un étalon approprié à la mesure de la capacité de leur amphore. Le matériel est effectivement composé d'objets petits et grands servant à la mesure de capacité mais également d'objets inadaptés à une telle mesure (règle, corde, compas, …).

Une fois l'étalon choisi dans chacun des groupes, les élèves commencent à mesurer la capacité de leur amphore à partir de l'étalon familier choisi et s'échangent des messages à propos de leurs résultats.

Si les équipes ont convenu au préalable d'un étalon commun à utiliser, le travail est presque terminé pour eux. Si par contre les groupes ne se sont pas consultés par message avant d'effectuer leur mesure, ils risquent de remettre un rapport donnant des mesures prises avec des étalons différents, démarche que l'expert contestera. Les élèves devront alors remettre en question leur raisonnement jusqu'à se rendre compte que l'utilisation d'un étalon commun est nécessaire pour comparer leurs amphores.

### Étalons conventionnels

Après avoir vécu la nécessité de choisir un étalon commun pour comparer les capacités de récipients, les élèves peuvent aller plus loin dans leur apprentissage. L'enseignant poursuit alors l'histoire avec le passage suivant :

> *Une autre amphore a été découverte en Turquie. L'équipe présente sur place a mesuré la capacité de cette amphore avec son propre matériel, différent du vôtre. L'amphore contient 33 verres. À nouveau, sa fragilité ne permet pas qu'elle soit transportée. Comment comparer cette amphore à celles dont vous disposez déjà ?*

Le verre utilisé comme étalon en Turquie ne faisant pas partie de leur matériel, les élèves se retrouvent dans un premier temps dans l'incapacité de comparer leurs amphores avec celle qui vient d'être découverte… Il faut décider d'un étalon commun universel.

Une discussion commence entre l'enseignant et les élèves et débouche progressivement sur l'étalon de mesure de capacité actuel : le litre ou l'un de ses sous-multiples.

D'autres activités sont proposées ensuite pour continuer l'étude des étalons conventionnels. Par exemple : grouper des récipients qui paraissent avoir même capacité, vérifier à partir d'un pot mesureur qu'ils ont même capacité, mettre en évidence des représentants du litre, rassembler des récipients de même capacité mais qui sont étiquetés avec des sous-multiples du litre différents (figure 16).


*Fig. 16*

## 4.3 Le volume du cône

Cette activité pour le secondaire supérieur débute par une courte manipulation avec des verres coniques et la graduation d'un cône transparent qu'on remplit progressivement de liquide. Elle s'attache ensuite à étudier les fonctions qui lient le volume d'un cône et sa hauteur, avec pour objectif final l'introduction de la fonction de référence $= ax^3$ . Au-delà de ce travail sur les fonctions, la *Math & Manip* vise à familiariser les élèves avec la méthode expérimentale et le processus de modélisation.

### Le verre à moitié vide, ou à moitié plein

Une première approche du problème consiste à se demander jusqu'à quelle hauteur il faut verser du liquide dans un verre conique pour le remplir à la moitié de son volume. Les estimations préalables sont souvent bien en-dessous de la réalité. L'expérience réalisée avec les verres présentés à la figure 17, différents par la taille ou la forme, montre que le rapport entre la hauteur du liquide et la hauteur du verre semble constant et vaut à peu près 0,69.

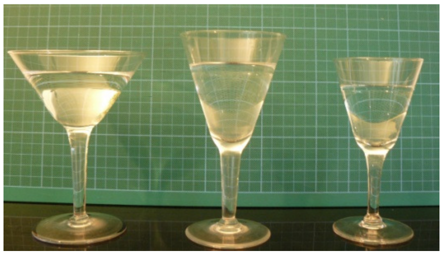


*Fig. 17*

On peut se demander si ce rapport sera toujours le même pour tous les récipients coniques et s'interroger sur sa signification. Cette question est laissée provisoirement en suspens, la suite de l'activité permettra de lui apporter une réponse précise. L'étonnement provoqué par cette première expérience pose le problème de la graduation du cône : on se rend compte qu'une graduation indiquant des quantités égales de liquide ne correspond pas à des écarts réguliers de hauteur. Cette observation nous engage à réaliser une autre expérience pour préciser l'allure de cette graduation et mieux comprendre le phénomène.

**Le volume en fonction de la hauteur**

L'objectif de l'activité est d'établir le lien fonctionnel entre les valeurs des volumes versés et des hauteurs atteintes par le liquide dans le récipient. Elle se déroulera en trois phases :

- une phase expérimentale qui consiste à graduer le cône, puis à reporter sur un graphique les « points expérimentaux » ;
- un calcul théorique visant à établir la formule donnant le volume du cône en fonction de la hauteur, ou l'inverse ;
- une confrontation des résultats.

***Graduation du cône***

La graduation d'un récipient s'effectue naturellement sur la paroi. Premier étonnement : après avoir versé 5 ml nous constatons que le liquide atteint déjà presque le quart de la hauteur du récipient. À ce moment, nous avons l'impression que le cône sera très vite rempli et que l'étalon de 5 ml est trop grand. Nous continuons en versant 5 ml à la fois et nous nous apercevons que le liquide monte de moins en moins vite. À partir de 50 ml versés, les différences de hauteurs devenant petites, nous décidons de verser 10 ml à la fois, puis 20 ml (figure 18). En réalité ce cône peut contenir à peu près un quart de litre.

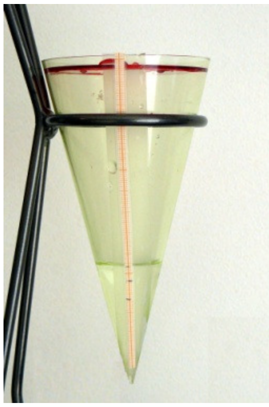


*Fig. 18*

*Graphique et modèle théorique*

Le tableau de valeurs expérimentales demandé doit établir une correspondance entre le volume et la hauteur du liquide versé. Les longueurs mesurées sur la génératrice doivent donc être transformées en hauteurs. Pour atteindre cet objectif, on peut procéder par graphique ou par calcul.

On demande aux élèves de représenter sur un graphique les points expérimentaux liant le volume de liquide à la hauteur.

À partir de la formule du volume du cône connue à la fin de l'école primaire, et en utilisant les caractéristiques du cône de l'expérience, on obtient la fonction théorique du type $y = ax^3$ qui exprime le volume en fonction de la hauteur. Le graphique de la figure 19 montre à la fois les points expérimentaux et la courbe théorique, ce qui permet la comparaison.

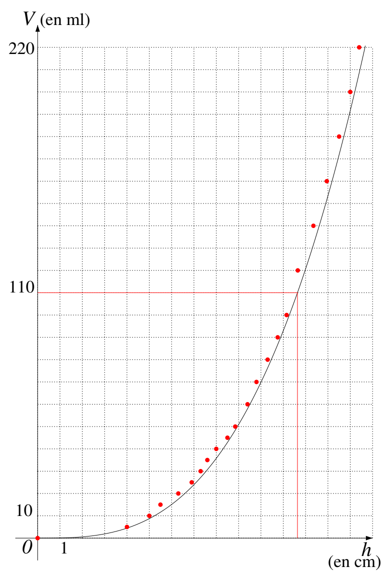



*Fig. 19*

## Et le cône à moitié rempli ?

Ce graphique fait voir également que le cône sera à moitié rempli lorsque le liquide aura atteint à peu près 80 % de la hauteur. Le modèle permet de calculer la valeur théorique de ce rapport et de comprendre qu'elle est indépendante de la forme du cône. Une discussion avec les élèves leur fait prendre conscience que la valeur théorique de 79 % correspondant à $1/\sqrt[3]{2}$ fournit la réponse au problème pour un cône parfait, qui n'existe que dans la tête du mathématicien, et qu'elle n'est pas meilleure qu'une réponse expérimentale pour un verre conique par exemple. Ils perçoivent bien que la réponse permet de réaliser l'expérience et qu'elle est d'autant plus appropriée que l'objet étudié est proche d'un cône parfait.

## 5 Pour en savoir plus

Les activités présentées dans ces actes n'ont été que très brièvement décrites. Pour prendre connaissance des textes complets, nous vous invitons à consulter les documents relatifs aux recherches ([6] et [7]) dont ces séquences d'apprentissages sont extraites. Ils sont téléchargeables gratuitement sur le site du CREM (www.crem.be). Pour tout renseignement complémentaire, vous pouvez prendre contact avec nous via l'adresse suivante info@crem.be.

## Bibliographie

[1] CREM, 1995. *Les Mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques*. N. ROUCHE coordinateur, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

[2] CREM, 2001a. *Formes et Mouvements.* L. LISMONT, et N. ROUCHE coordinateurs, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

[3] CREM, 2001b. *Construire et représenter, un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à dix-huit ans.* L. LISMONT, et N. ROUCHE coordinateurs, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

[4] CREM, 2002. *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur.* N. ROUCHE coordinateur, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

[5] CREM, 2004. *Pour une culture mathématique accessible à tous, Élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes.* M. BALLIEU et M.-F. GUISSARD coordinateurs, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

[6] CREM, 2013. *Rapport de recherche Math & Manips, des manipulations pour favoriser la construction des apprentissages.* V. HENRY et M.-F. GUISSARD coordinatrices, http://www.crem.be/#/publications/30