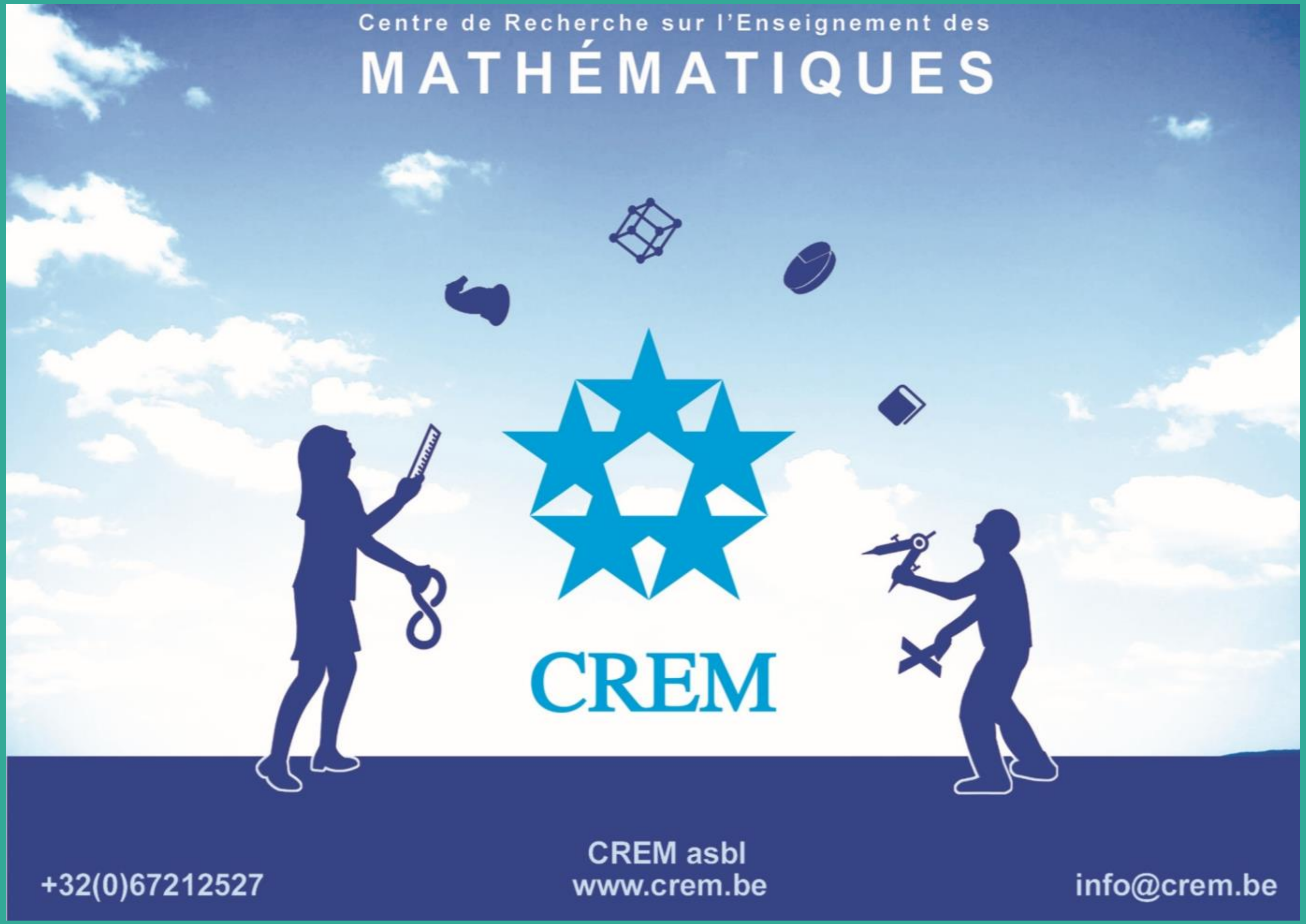
Analyse logique de la langue mathématique dans une perspective didactique

Bao DANG

CREM

- Recherche menée au CREM dans le cadre du projet LogLang

- En collaboration avec Vincent Degauquier et Samuël Di Emidio



Au programme :

1. La logique dans les mathématiques
2. Opacité de la langue mathématique
3. Synthèse
4. Ateliers thématiques

1
La logique dans les mathématiques

Question :

Dans quelles circonstances **mobilise-t-on** ou **a-t-on besoin** de la **logique** en mathématiques ?

On a (au moins) besoin de logique pour :

Lire, écrire et comprendre les énoncés

Raisonner

Exemple 1 : égalité

Pourquoi $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{22}{15}$?

Raisonnement possible :

On sait que $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ et que $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$.

Donc $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15}$.

Or, $\frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15}$.

Donc $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{22}{15}$.

Ingrédients pour lire, écrire et comprendre

égalité

« donc »

Ingrédients pour raisonner

Substitution pour les termes égaux

Si A=B et B=C, alors A=C.

Exemple 2 : conditions d'existence

Quelles sont les conditions d'existence de l'expression suivante et pourquoi ?

$$\frac{(x+2)}{(x-3)(x-1)}$$

Raisonnement possible :

Si $x = 3$, alors $(x-3)(x-1) = 0$,
et si $x = 1$, alors $(x-3)(x-1) = 0$.
Donc si $x = 3$ ou $x = 1$, alors $(x-3)(x-1) = 0$.
Or, il faut que $(x-3)(x-1) \neq 0$.
C.-à-d. qu'il faut que l'on n'ait pas que $(x-3)(x-1) = 0$.
Donc il faut que l'on n'ait pas que $x = 3$ ou $x = 1$.
Donc il faut que $x \neq 3$ et $x \neq 1$.

Ingrédients pour lire, écrire et comprendre

« si… alors »

« ne… pas »/« $\neq$ »

« ou »

« et »

« donc »

Ingrédients pour raisonner

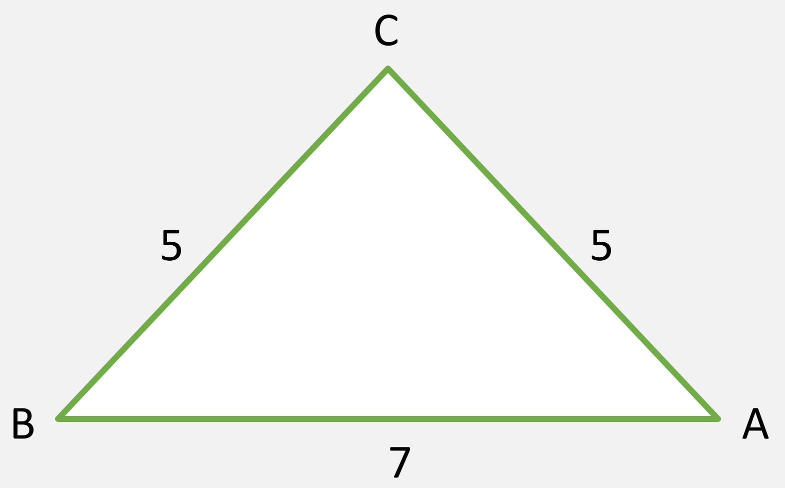
non(A ou B)
équivaut à :
non A et non B

Si j'ai que :
$A \Rightarrow B$ et non B
alors je peux en déduire que :
non A

Exemple 3 : théorème de Pythagore

« Pour tout triangle ABC rectangle en C, $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$ »

Question :



Le théorème de Pythagore permet-il de dire si ABC est rectangle en C ?

Reformulation :

« Quel que soit le triangle ABC,

s'il est rectangle en C, **alors** $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$ »

La réciproque :

« Quel que soit le triangle ABC,

si $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$ **alors** il est rectangle en C »

La contraposée (équivalente au théorème) :

« Quel que soit le triangle ABC,

si $|AB|^2\neq|AC|^2+|BC|^2$ **alors** il **n'**est **pas** rectangle en C »

Ingrédients pour lire, écrire et comprendre

« quel que soit »

« si… alors »

« ne… pas »/« ≠ »

Ingrédients pour raisonner

Réciproque d’une implication

Contraposée d’une implication

Équivalence entre une implication et sa contraposée

Non-équivalence entre une implication et sa réciproque

Exemple 4 : limite d’une suite

« Une suite converge vers un réel L **ssi**
pour tout intervalle ouvert centré en L,
il existe un terme de la suite tel que
tous les suivants lui appartiennent. »

Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $x_n \in \mathbb{R}$.
Soit L un nombre réel.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L **ssi**

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists i \in \mathbb{N} \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \left(i \leq j \Rightarrow x_j \in \left]L-\varepsilon\,;L+\varepsilon\right[\right)$$

Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $x_n = \frac{1}{n}$

$$\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\rangle$$

Cette suite converge-t-elle vers 0 ?

Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $x_n = \begin{cases} 1 \text{ si } \exists k \in \mathbb{N} \;\; n = 10^k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$$\langle 0,\underset{\substack{\uparrow \\ x_1}}{1},0,0,0,0,0,0,0,0,\underset{\substack{\uparrow \\ x_{10}}}{1}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ x_{100}}}{1}, \dots \rangle$$

Cette suite converge-t-elle vers 0 ?

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \exists j \in \mathbb{N} \quad \left(i \leq j \;\text{ et }\; x_j \notin \left]0 - \frac{1}{2}\,;0 + \frac{1}{2}\right[\right)$$

Ingrédients pour lire, écrire et comprendre

« pour tout »/« $\forall$ »

« il existe »/« $\exists$ »

« si… alors »/« $\Rightarrow$ »

« si et seulement si »

« ne… pas »/« $\notin$ »

« et »

Ingrédients pour raisonner

Ordre des quantificateurs

Négation des quantificateurs

Négation de l'implication

Conclusion :

On a (au moins) besoin de logique pour :

Lire, écrire et comprendre les énoncés

Raisonner

Petite typologie des ingrédients logiques

A Connecteurs logiques	B Types de symboles non logiques
C Règles d'inférence & lois logiques	D Types d'énoncés

A Connecteurs logiques

Opérations permettant de former de nouveaux énoncés à partir d'énoncés donnés.

Soient deux énoncés $\boxed{x=5}$ et $\boxed{x \text{ est pair}}$.

Négation	$x \neq 5$	x n'est pas pair
Conjonction	$x=5$ et x est pair	
Disjonction	$x=5$ ou x est pair	
Implication	Si $x=5$ alors x est pair	
Équivalence	$x=5$ ssi x est pair	

Quantification universelle	
$\forall x : x=5$	$\forall x :$ x est pair

Quantification existentielle	
$\exists x : x=5$	$\exists x :$ x est pair

B Types de symboles non logiques

Symboles d'objets

Constantes
0, 1, 2, 3, π, e, …

Variables
a, b, c, x, y, z, t, …
(dont inconnues, paramètres, nombres génériques, …)

Symboles de fonctions

Variables fonctionnelles
f, g, h, …

Constantes fonctionnelles
$+, -, \times, \div, {}^2, \sqrt{}$, sin, cos, …

Symboles relationnels
$=, <, \geq, \in, \subseteq$, …

Arité

Unaires

Binaires

Ternaires

…

(Contexte des exemples donnés : algèbre et analyse élémentaire)

C Règles d'inférence

« Règles » permettant d'inférer un énoncé à partir d'un ou de plusieurs énoncés déjà donnés.

Modus ponens

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$

Modus tollens

$$\frac{A \to B \qquad \text{non } B}{\text{non } A}$$

Lois de de Morgan

$$\frac{\text{non}(A \text{ ou } B)}{(\text{non } A) \text{ et } (\text{non } B)}$$

$$\frac{\text{non}(A \text{ et } B)}{(\text{non } A) \text{ ou } (\text{non } B)}$$

Réfutation par contre-exemple

$$\frac{\exists x\,(\text{non } P(x))}{\text{non}(\forall x\, P(x))}$$

Et bien d'autres

…

D Types d'énoncés

Différentes composantes d'un texte mathématique.

Composantes fondamentales :

DÉFINITIONS AXIOMES THÉORÈMES DÉMONSTRATIONS

Composantes additionnelles, aux significations parfois floues, variables selon les auteurs :

propositions remarques faits énoncés
hypothèses thèses propriétés …

Le type d’un énoncé détermine son rôle dans le corpus mathématique.

2
Opacité de la langue mathématique

La langue mathématique est logiquement opaque

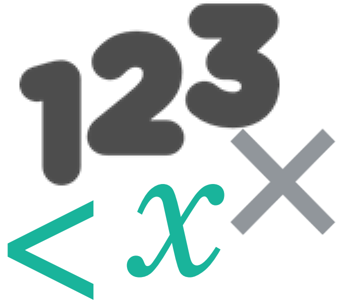
1. Qu’est-ce que la langue mathématique ?
2. Opacité liée aux connecteurs logiques
3. Opacité liée aux symboles non logiques

La langue mathématique est logiquement opaque

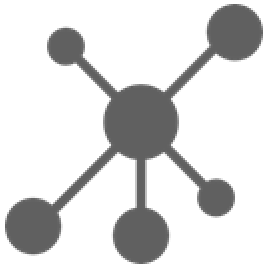
1. Qu’est-ce que la langue mathématique ?
2. Opacité liée aux connecteurs logiques
3. Opacité liée aux symboles non logiques

Qu’est-ce que la langue mathématique ?

Langue
française



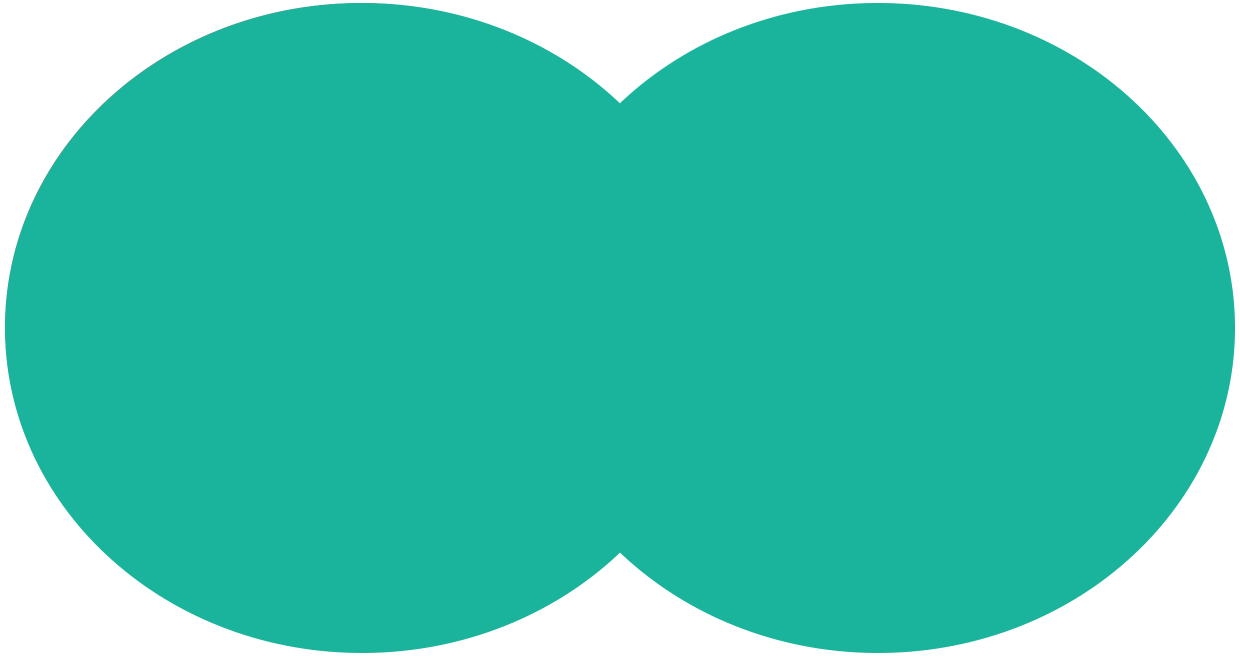
Alphabet



Syntaxe

Source des difficultés

Langue naturelle



Langue symbolique

« Les multiples de 9 et de 12 sont multiples de 3. »

« Les multiples de 9 et de 12 sont multiples de 3. »

A. « Les multiples de 9 sont multiples de 3 et les multiples de 12 sont multiples de 3. »

B. « Les multiples communs à 9 et à 12 sont multiples de 3. »

« Les multiples de 3 et de 4 sont multiples de 12. »

« Les multiples de 3 et de 4 sont multiples de 12. »

A. « Les multiples de 3 sont multiples de 12 et les multiples de 4 sont multiples de 12. »

B. « Les multiples communs à 3 et à 4 sont multiples de 12. »

« Les multiples de 9 et de 12 sont multiples de 3. »

« Les multiples de 3 et de 4 sont multiples de 12. »

« Les multiples de 9 et de 12 sont multiples de 3. »

A. multiples de chacun ✓

B. multiples communs ✓

« Les multiples de 3 et de 4 sont multiples de 12. »

A. multiples de chacun ✗

B. multiples communs ✓

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

A. Vrai

B. Faux

C. Ça dépend

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{5} = \frac{a+b}{8}$$

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{5}=\frac{a+b}{8}$$

A. Vrai

B. Faux

C. Ça dépend

$$3a+7=12$$

$3a+7=12$

A. Vrai

B. Faux

C. Ça dépend

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Vrai $\forall a$ et $\forall b$

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{5}=\frac{a+b}{8}$$

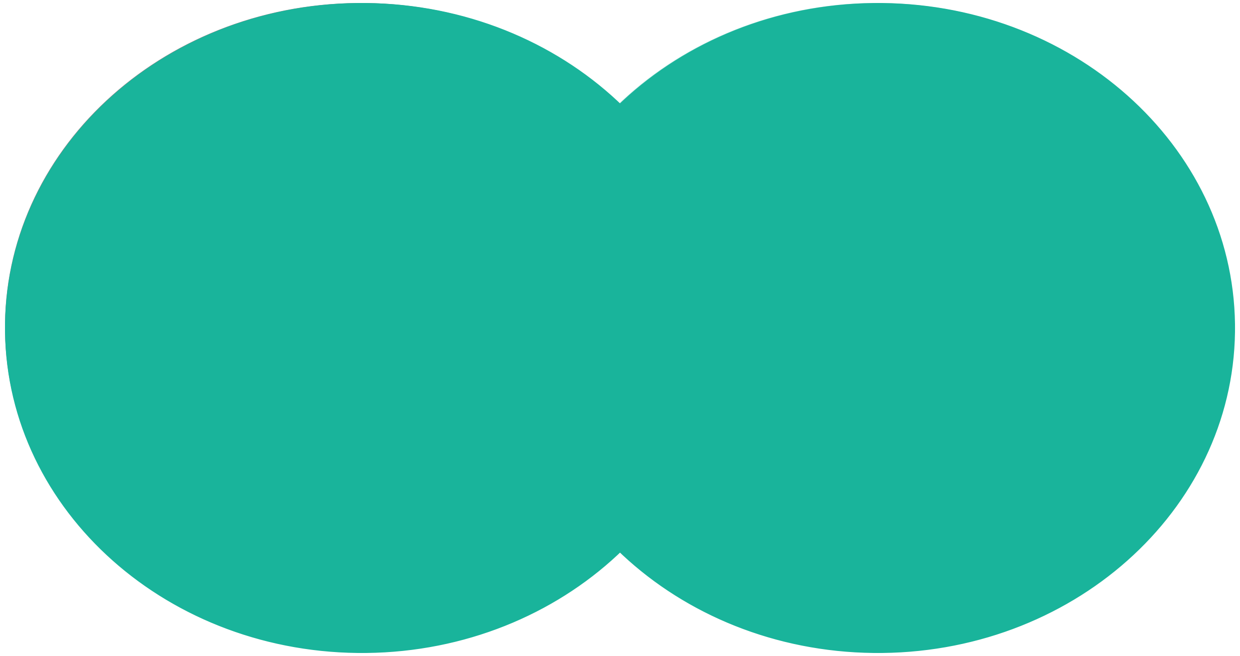
$3a+7=12$

Vrai pour certaines valeurs de a et de b

$a=-9, b=25$

Source des difficultés

Langue naturelle



Langue symbolique

La langue mathématique est logiquement opaque

1. Qu'est-ce que la langue mathématique ?
2. **Opacité liée aux connecteurs logiques**
3. Opacité liée aux symboles non logiques

Opacité liée aux connecteurs logiques

Préciser la signification des **connecteurs logiques** et montrer les difficultés à les déceler.

	Langue logique	Langue française
Négation	$\neg$	ne… pas
Conjonction	$\wedge$	et
Disjonction	$\vee$	ou
Implication	$\rightarrow$	si… alors
Équivalence	$\leftrightarrow$	si et seulement si
Quant. universel	$\forall$	tout
Quant. existentiel	$\exists$	au moins un

NÉGATION : Signification logique

$\neg A$ est vrai ssi A est faux

NÉGATION : Décalage entre « ¬ » et « ne… pas »

Quelle est la négation de :

« Certains textes de Leibniz sont écrits en français. »

A. « Certains textes de Leibniz ne sont pas écrits en français. »
B. « Aucun texte de Leibniz n'est écrit en français. »

¬

NÉGATION : Décalage entre « ¬ » et « ne… pas »

Quelle est la négation de :

« Certains textes de Leibniz sont écrits en français. »

A. « Certains textes de Leibniz ne sont pas écrits en français. »

✓ B. « Aucun texte de Leibniz n’est écrit en français. »

NÉGATION : Décalage entre « ¬ » et « ne… pas »

Quelle est la négation de :

« Tous les textes de Leibniz sont écrits en français. »

A. « Tous les textes de Leibniz ne sont pas écrits en français. »
B. « Aucun texte de Leibniz n'est écrit en français. »

NÉGATION : Décalage entre « ¬ » et « ne… pas »

Quelle est la négation de :

« Tous les textes de Leibniz sont écrits en français. »

✓ A. « Tous les textes de Leibniz ne sont pas écrits en français. »
B. « Aucun texte de Leibniz n’est écrit en français. »

$\wedge$

CONJONCTION : Signification logique

$(A \wedge B)$ est vrai ssi A est vrai et B est vrai

∧

CONJONCTION : Décalage entre « ∧ » et « et »

Les phrases suivantes sont-elles synonymes ?

« Gottfried est tombé et s’est brisé le crâne. »

« Gottfried s’est brisé le crâne et est tombé. »

Le « et » courant n’est pas toujours commutatif, contrairement au « et » logique.

$\wedge$

CONJONCTION : Usage implicite

$a \leq x \leq b$ signifie $(a \leq x) \wedge (x \leq b)$

$\vee$

DISJONCTION : Signification logique

$(A \vee B)$ est vrai ssi A est vrai ou B est vrai (ou les deux)

V

DISJONCTION : Décalage entre « $\vee$ » et « ou »

« Le menu comprend un café ou un dessert. »

Le « ou » courant est souvent exclusif, contrairement au « ou » logique.

IMPLICATION : Signification logique

$(A \rightarrow B)$ est vrai ssi A est faux ou B est vrai (ou les deux)

IMPLICATION : Décalage entre « → » et « si… alors »

Les affirmations sont-elles réfutées si…

« Si tu termines ta soupe, tu auras un dessert. »
➧ Gottfried ne termine pas sa soupe et a un dessert.

« Si tu ne termines pas ta soupe, tu n'auras pas de dessert. »
➧ Gottfried termine sa soupe et n'a pas de dessert.

Le « si… alors… » courant correspond souvent à l'équivalence logique, et non à l'implication.

QUANT. UNIVERSEL : Signification logique

$\forall \alpha \;\; A(\alpha)$ est vrai ssi

$A(\alpha)$ est vrai pour toute valeur de α

QUANT. UNIVERSEL : Décalage entre « ∀ » et « tout »

La première phrase implique-t-elle la seconde ?

« Tous les spectateurs ont apprécié la pièce. »

« Au moins un spectateur a apprécié la pièce. »

Oui dans la vie courante, non en logique.

QUANT. UNIVERSEL : Usage implicite

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

signifie $\forall a \forall b \ \ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

« Un carré est un losange. »

signifie « Tout carré est un losange. »

$\exists$

QUANT. EXISTENTIEL : Signification logique

$\exists\alpha \;\; A(\alpha)$ est vrai ssi

$A(\alpha)$ est vrai pour au moins une valeur de α

∃

QUANT. EXISTENTIEL :
Décalage entre « ∃ » et « certains/quelques »

La première phrase implique-t-elle la seconde ?

« Certains textes de Leibniz sont écrits en français »

« Certains textes de Leibniz ne sont pas écrits en français »

Oui dans la vie courante, non en logique.

QUANT. EXISTENTIEL : Usage implicite

Comment formaliser l'énoncé suivant ?

« Tous les nombres naturels ne sont pas pairs. »

est synonyme de

« Il existe des nombres naturels qui ne sont pas pairs. »
voire
« Certains nombres naturels ne sont pas pairs. »

Opacité liée aux connecteurs logiques

- Difficulté à identifier la signification des connecteurs logiques
- Difficulté à déceler leur présence

La langue mathématique est logiquement opaque

1. Qu’est-ce que la langue mathématique ?
2. Opacité liée aux connecteurs logiques
3. **Opacité liée aux symboles non logiques**

Rappel : Types de symboles non logiques

Symboles d'objets

Constantes
0, 1, 2, 3, π, e, …

Variables
a, b, c, x, y, z, t, …
(dont inconnues, paramètres, nombres génériques, …)

Symboles de fonctions

Variables fonctionnelles
f, g, h, …

Constantes fonctionnelles
$+, -, \times, \div, {}^2, \surd$, sin, cos, …

Symboles relationnels
$=, <, \geq, \in, \subseteq$, …

Arité

Unaires

Binaires

Ternaires

…

(Contexte des exemples donnés : algèbre et analyse élémentaire)

Difficulté 1 : polysémie

Quel est le type du symbole « $-$ » ?

	$6 - x = 9$	Symbole de fonction binaire
$\Leftrightarrow$	$-x = 3$	Symbole de fonction unaire
$\Leftrightarrow$	$x = -3$	Indice graphique du signe

Difficulté 1 : polysémie

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Difficulté 1 : polysémie

Le type logique d'un symbole peut changer selon le contexte !

Difficulté 2 : erreur de catégorisation

$$5 \times \frac{12}{4} = 5 \times 12 = 60 \div 4 = 15$$

« do something signal »

[Kieran, Knuth *et al.*]

Difficulté 2 : erreur de catégorisation

Des obstacles peuvent naître de l'attribution à un symbole du mauvais rôle.

3
Synthèse

Conclusion :

On a (au moins) besoin de logique pour :

Lire, écrire et comprendre les énoncés

Raisonner

La langue mathématique est logiquement opaque.

Analyse logique de la langue mathématique dans une perspective didactique

Louvain-la-Neuve, 30/1/2020
ForFor – 19mat003a

Bao DANG
bao.dang@nespabw.org

CREM