



Formation IFC (214001401/16505)
09 janvier et 23 février 2015, Couvin

Analyse et exploitation des erreurs et
des difficultés des élèves en résolution de
problèmes ouverts mobilisant le concept d'aire

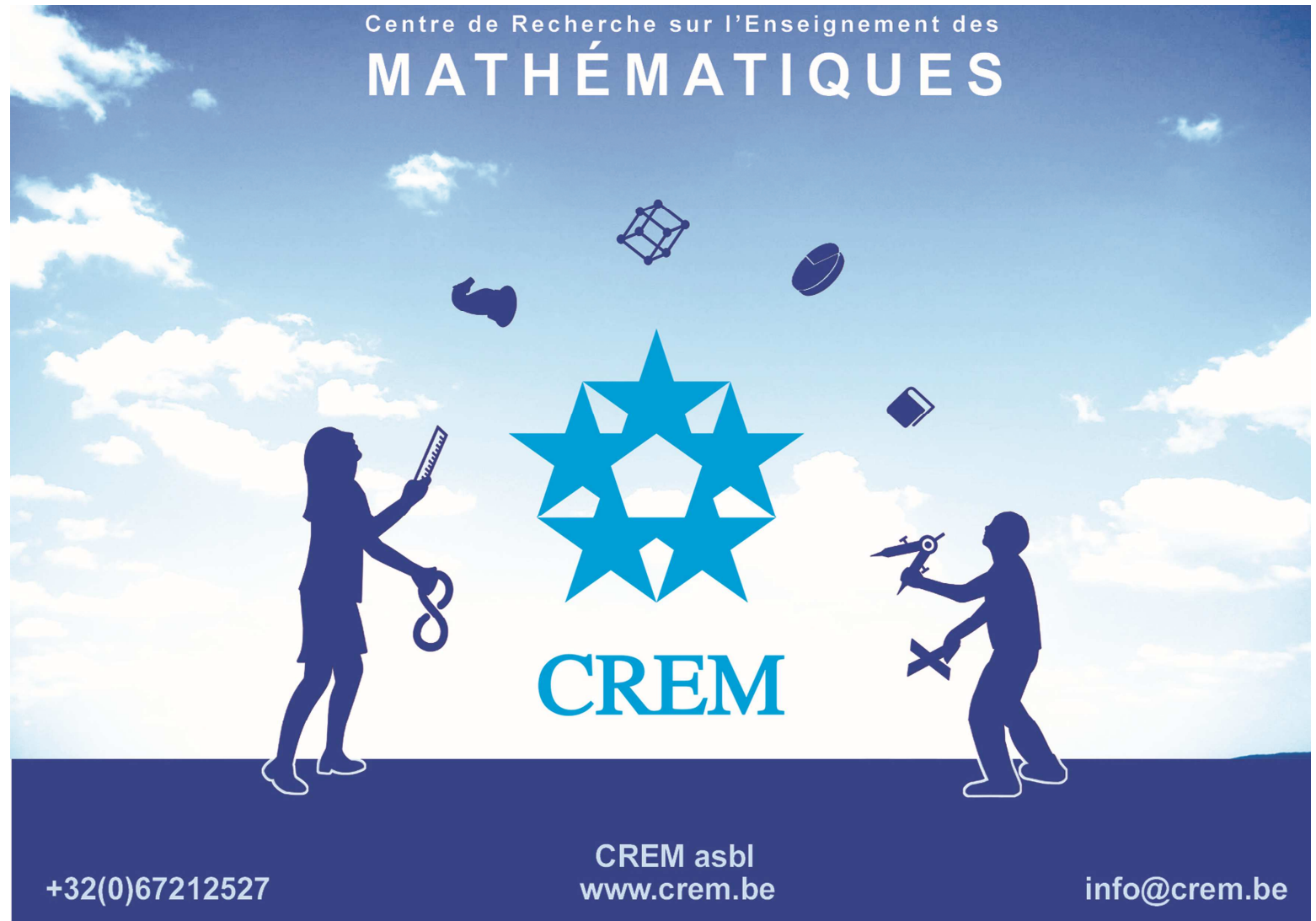


CREM

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Christophe Hallet, Pauline Lambrecht, Isabelle Wettendorff

Centre de Recherche sur l'Enseignement des
MATHÉMATIQUES

- Recherches
- Publications
- Logiciels
- Formations
- Bibliothèque



+32(0)67212527

CREM asbl
www.crem.be

info@crem.be

Plan de la formation

Analyse et exploitation des erreurs et des difficultés des élèves en résolution de problèmes ouverts mobilisant le concept d'aire

J1

À partir de 3 problèmes traitant de l'aire

- déterminer des procédures de résolution
- pointer des difficultés et erreurs des élèves
- découvrir des outils pour travailler en classe

J2

À partir de vos expériences

- établir des pistes de remédiation
- apporter des éléments théoriques concernant
 - la résolution de problèmes
 - le concept d'aire

6. LES SURFACES DE M. MINIPOT (Cat. 4, 5)

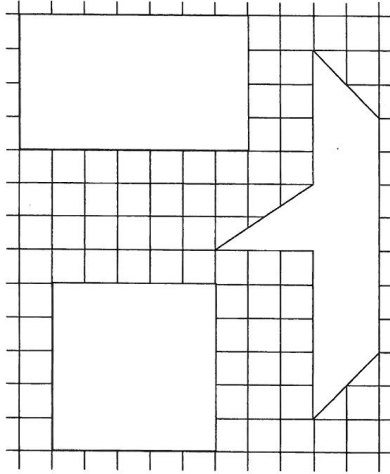
M. Minipot veut peindre les surfaces dessinées ci-contre en mettant toujours la même épaisseur de peinture.

Il possède trois pots de peinture identiques.

Il en utilise un, complètement, pour peindre la surface carrée.

Avec les deux pots qui restent, et en mettant la même épaisseur de peinture partout, pourra-t-il peindre entièrement les deux autres surfaces ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

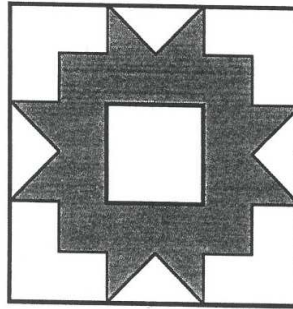


7. LA ROSACE DE JULIE (II) (Cat. 5, 6)

Julie veut repeindre le cadre de ce miroir en blanc et en gris. Elle se demande si elle doit acheter plus de peinture blanche ou plus de peinture grise. Bien sûr, le miroir (le carré au centre) ne doit pas être repeint et la couche de peinture aura partout la même épaisseur.

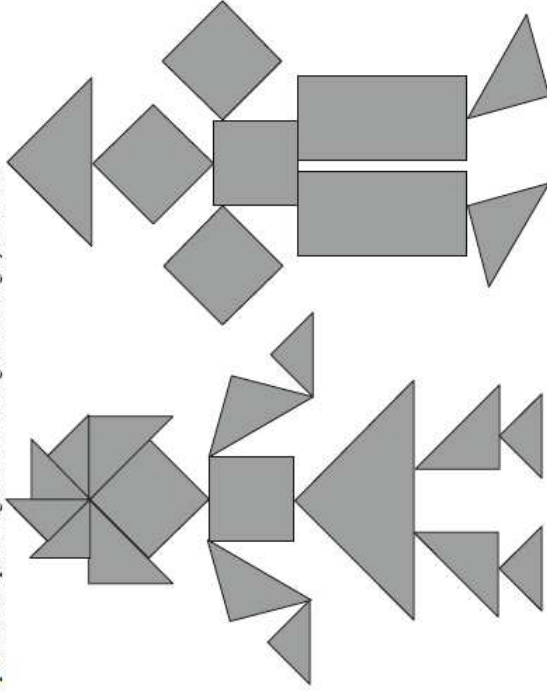
Devra-t-elle utiliser plus de gris que de blanc, plus de blanc que de gris, autant de blanc que de gris ... ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.



8. COUPE ET DÉCOUPE (Cat. 5, 6)

En collant des pièces qu'il avait découpées dans du carton, Aldo a fait un tableau qui représente deux personnages : une fillette à gauche et un garçon à droite.

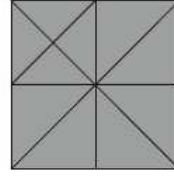


Selon vous, pour faire son tableau, Aldo a-t-il utilisé plus de carton pour la fillette ou pour le garçon ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Pour préparer les pièces de son tableau, Aldo a utilisé plusieurs feuilles de carton, carrées et de même grandeur. Il les a pliées une, deux ou trois fois, puis découpées en suivant certains des plis obtenus.

Cette figure montre une feuille carrée de carton et les différents pliages qu'Aldo a pu effectuer :



Plan de la journée

Statut de l'erreur dans l'apprentissage

Analyse d'une sélection des copies de vos élèves

Propositions d'exploitation en classe

Pistes de remédiation à certains obstacles identifiés

Synthèses

Autres problèmes pour travailler l'aire

Statut de l'erreur dans l'apprentissage

Évolution de son statut à travers celle du concept d'apprentissage

- Erreur = **faute**
Modèles transmissifs
- Erreur = **bogue**
Modèles comportementalistes
- Erreur = **obstacle**
Modèles constructivistes

| | LA FAUTE | LA BOGUE | L'OBSTACLE |
|---------------------------------|---|---|--|
| Statut de l'erreur | L'erreur déniée (« raté », « perle », « n'importe-quisisme ») | | L'erreur positivée (postulat du sens) |
| Origine de l'erreur | Responsabilité de l'élève qui aurait dû la parer | Défaut repéré dans la plani- fication | Difficulté objective pour s'approprier le contenu enseigné |
| Mode de traitement | Évaluation <i>a posteriori</i> pour la sanctionner | Traitement <i>a priori</i> pour la prévenir | Travail <i>in situ</i> pour la traiter |
| Modèle pédagogique de référence | Modèle transmissif | Modèle behavioriste | Modèle constructiviste |

Analyse d'une sélection des copies de vos élèves

Repérer


- erreurs
- difficultés
- points d'étonnement
- points forts

Réfléchir à des thématiques de remédiation, différenciation

A

Distinction formes et grandeurs

se. 17 pièces pour la fillette et 9 pour le garçon.
plusieurs

Two envelopes are shown side-by-side, shaded in grey. They are rectangular with a triangular flap pointing downwards.

1

pliages qu'Aldo a pu effectuer :

la fillette, car il y a plus de forme.

2

B

Distinction périmètre et aire

Carré : $4 \times 2,5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$

rectangle : $2 \times 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$
 $2 \times 3,5 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$ } $4 \text{ cm} + 7 \text{ cm} = 11 \text{ cm}$

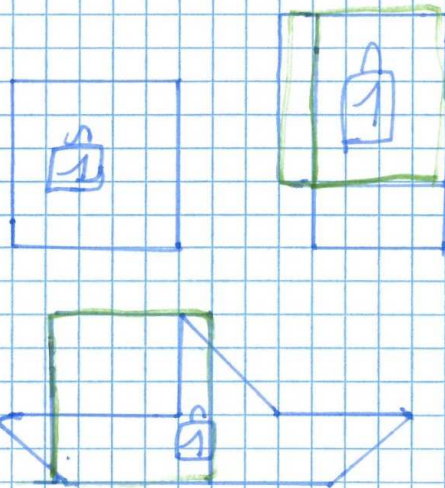
bateau : $2 \times 1,5 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$
 $1 \times 3,5 \text{ cm} = 3,5 \text{ cm}$
 $1 \times 1,5 \text{ cm} = 1,5 \text{ cm}$
 $1 \times 2 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$ } $3 \text{ cm} + 3,5 \text{ cm} + 1,5 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$

○ M. Minipot n'aura pas assez de peinture pour les autres surfaces.

C

Superposition

J'ai compté le nombre de carrés dans le grand
carré et en avait 5 sur les côtés. Sur le
rectangle, j'ai 8 carrés et j'ai ajouté 5
carrés sur le côté gauche. Sur ce bateau
il y a 18 carrés.



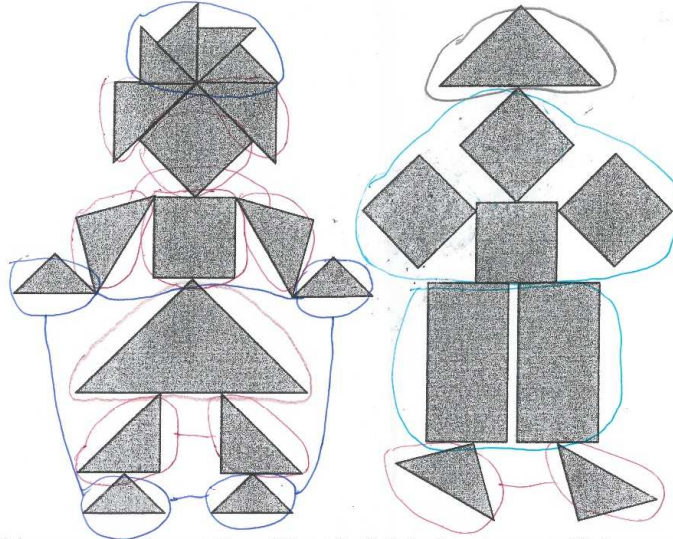
4

D

Appariement

5

③ 10. COUPE ET DÉCOUPE (Cat.5, 6)
En collant des pièces qu'il avait découpées dans du carton, Aldo a fait un tableau qui représente deux personnages : une fillette à gauche et un garçon à droite.



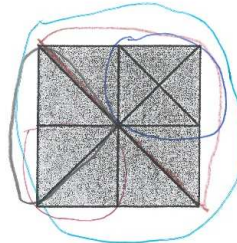
Selon vous, pour faire son tableau, Aldo a-t-il utilisé plus de carton pour la fillette ou pour le garçon ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Pour préparer les pièces de son tableau, Aldo a utilisé plusieurs feuilles de carton, carrées et de même grandeur.

Il les a pliées une, deux ou trois fois, puis découpées en suivant certains des plis obtenus.

Cette figure montre une feuille carrée de carton et les différents pliages qu'Aldo a pu effectuer :



Plus pour le garçon

3
2 1/4

E

Concept d'unité de commune mesure

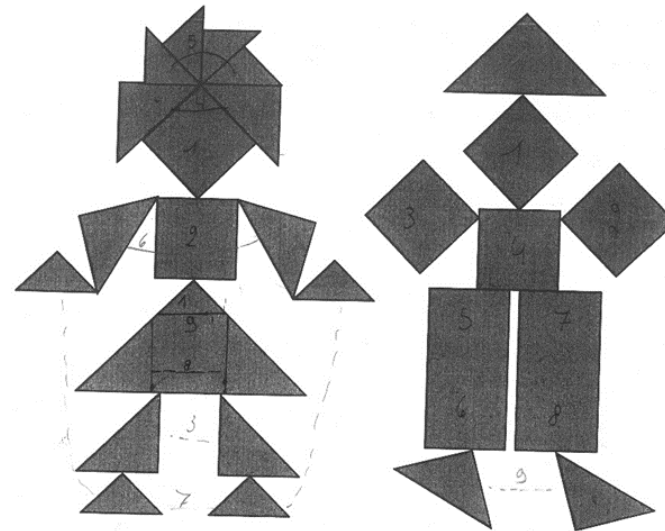
Pour savoir lequel des deux possède plus de carton, j'ai compté les petits carrés.

Pour le garçon : 9 petits carrés et un triangle moyen.

Pour la fille : 9 petits carrés et un petit triangle.

Donc le garçon possède plus de carton.

b



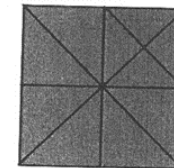
Selon vous, pour faire son tableau, Aldo a-t-il utilisé plus de carton pour la fillette ou pour le garçon ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Pour préparer les pièces de son tableau, Aldo a utilisé plusieurs feuilles de carton, carrées et de même grandeur.

Il les a pliées une, deux ou trois fois, puis découpées en suivant certains des plis obtenus.

Cette figure montre une feuille carrée de carton et les différents pliages qu'Aldo a pu effectuer :



F

Mesure

anna
P.S

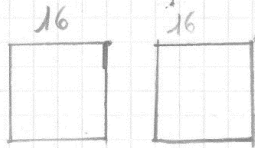
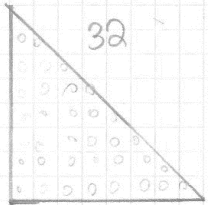
Anna a utilisé plus de papier pour le garçon.

J'ai commencé par mesurer les formes puis je les ai tracées sur du papier quadrillé. Après, j'ai compté combien de petits carrés il y avait. Pour la fille, il y en avait 148, pour le garçon 156,5. Comme le garçon en avait plus cela veut dire qu'il avait utilisé plus de carton pour le garçon.

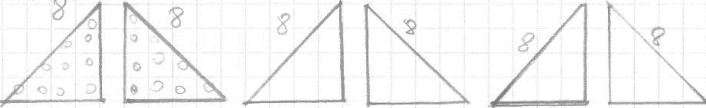
P.5

fille

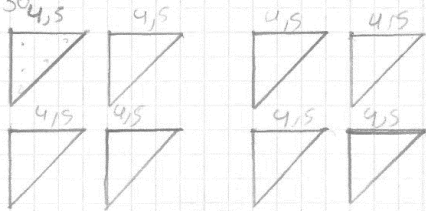
$$48 + 16 = 64$$



$$64 + 48 = 112$$



$$112 + 36 = 148$$



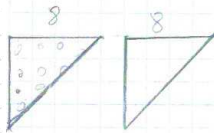
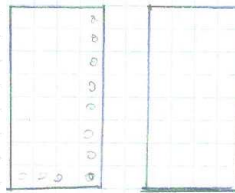
148 fille

156,5 garçon

garçon



12,5



16

$$\rightarrow 144$$

156,5



G

Autres erreurs

Compréhension de la consigne

Calcul

Reproduction de formes

Absence de réponse à la question posée

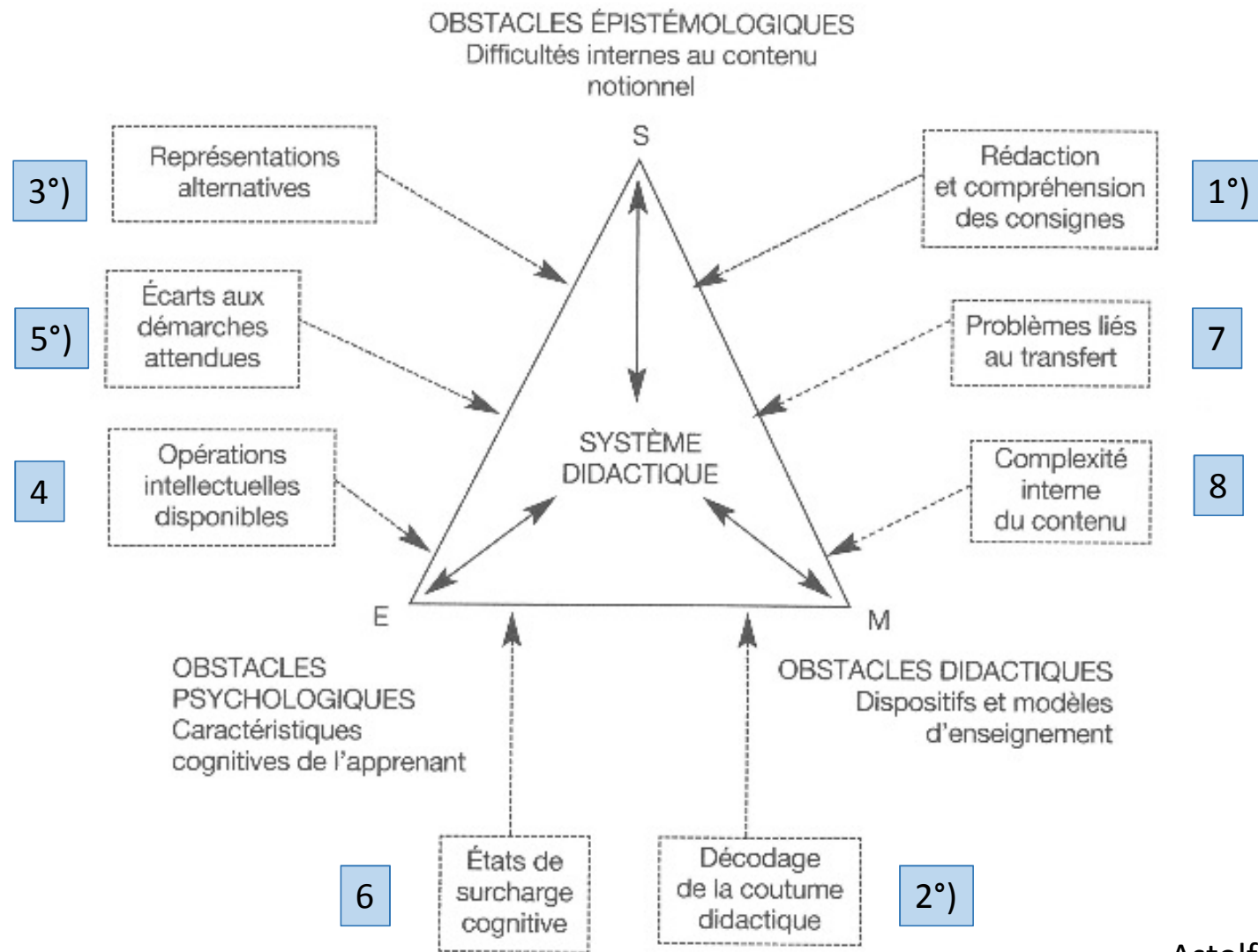
Orthographe

...

Faire apprendre = prendre le risque de laisser les élèves se tromper

L'erreur est un indicateur du processus didactique de l'élève, des tâches intellectuelles qu'il réalise et des obstacles qu'il rencontre.

Certaines réponses erronées, y compris le silence, témoignent de réels efforts intellectuels de l'élève pour adapter ses représentations d'un phénomène à une situation didactique nouvelle.



Astolfi

1°) Compréhension des consignes (1/2)

- Termes du questionnement
 - Expliquer comment vous avez trouvé,
 - Justifier
 - ...
- Vocabulaire de la discipline
- Situation de la ou des question(s) dans la consigne

1°) Compréhension des consignes (2/2)

Médiations et remédiations

- Analyse de la **lisibilité** des textes scolaires
- Travail sur la compréhension, la sélection, la formulation de consignes

2°) Habitudes scolaires et mauvais décodage (1/2)

Par exemple en résolution de problème (Chevallard)

- Le problème posséderait une solution et une seule.
- Pour sa résolution, il ne faudrait extraire que les données numériques et elles seraient toutes nécessaires.
- Si la réponse ne tombe pas sur un nombre simple, c'est qu'on se serait trompé.

2°) Habitudes scolaires et mauvais décodage (2/2)

Médiations et remédiations

- Analyse du **contrat didactique** et de la **coutume** en vigueur
- Travail critique sur les attentes.

3°) Témoin des conceptions alternatives (1/2)

Idée d'obstacle (Bachelard)

« On connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites, en surmontant ce qui dans l'esprit même fait obstacle. »

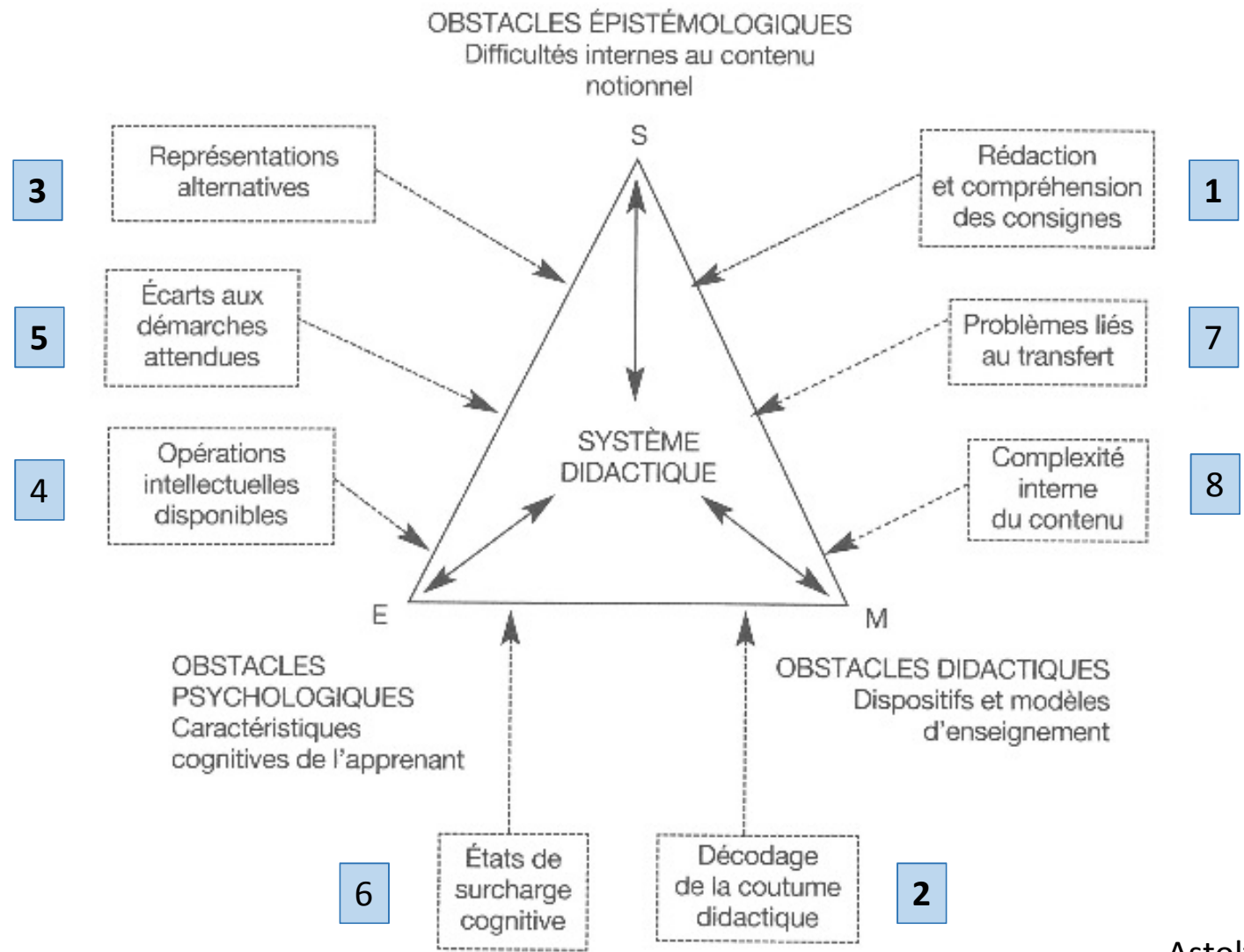
Exemple du lien entre le périmètre et l'aire d'une figure :

« Si le périmètre d'une figure est plus grand que celui d'une autre, l'aire le sera aussi. » (Faux)

3°) Témoin des conceptions alternatives (2/2)

Médiations et remédiations

- Analyse des **représentations** et des **obstacles** sous-jacents à la notion étudiée
- Travail d'écoute, de prise de conscience par les élèves et de débat scientifique au sein de la classe



Astolfi

Exploitation en classe ?

Exploitation de « coupe et découpe »

Enjeu : superposer pour apparier

Éventuellement une phase en petits groupes

Mise commun :

- débat sur les méthodes utilisées
- utilisation de
 - transparents
 - de logiciel
 - de formes magnétiques

La résolution de problème en classe

Enjeu : progresser en résolution de problèmes et faire évoluer les représentations des élèves

Travail individuel pour appropriation

Phase en petits groupes où chaque groupe rédige une solution à destination d'un autre groupe

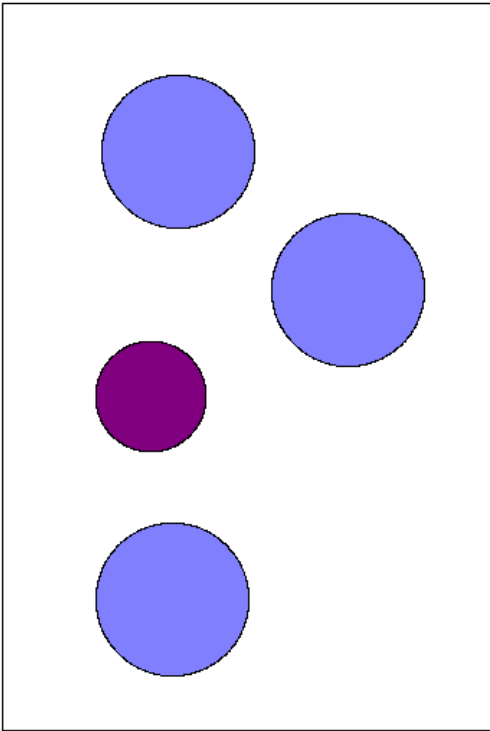
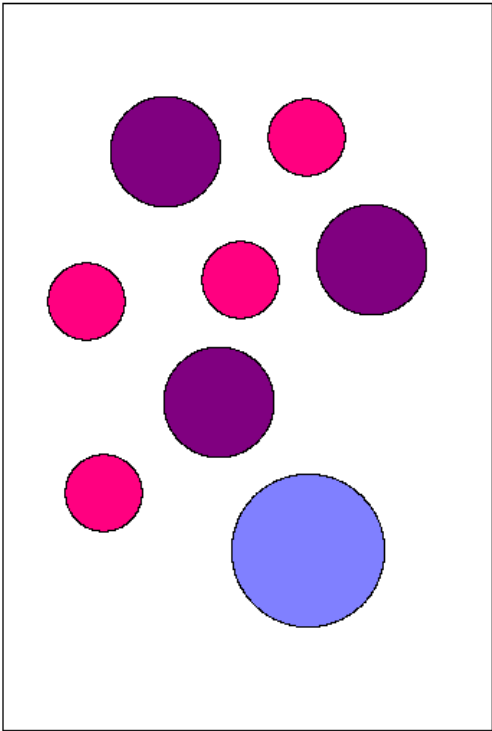
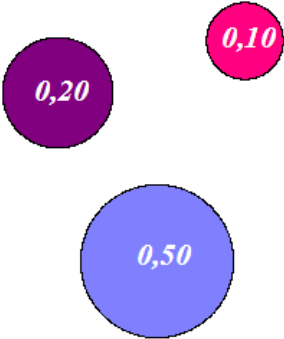
Échange des solutions rédigées entre les groupes et commentaires

(Méthodologie générale en cours d'étude au CREM)

Pistes de remédiation aux obstacles identifiés

- A. Distinction formes, grandeurs
- B. Distinction périmètre, aire
- C. Superposition
- D. Appariement
- E. Unité de commune mesure
- F. Mesure

A. Pistes de remédiation : distinction formes, grandeurs



B. Pistes de remédiation : distinction périmètre, aire

7. LA BOUCLE (Cat. 4, 5)

Archibald a tendu une boucle de ficelle sur une planche à clous rectangulaire.

Il constate que sa boucle :

- forme un rectangle dont les côtés sont parallèles à ceux de la planche,
- touche 22 clous,
- entoure 18 carrés entiers.

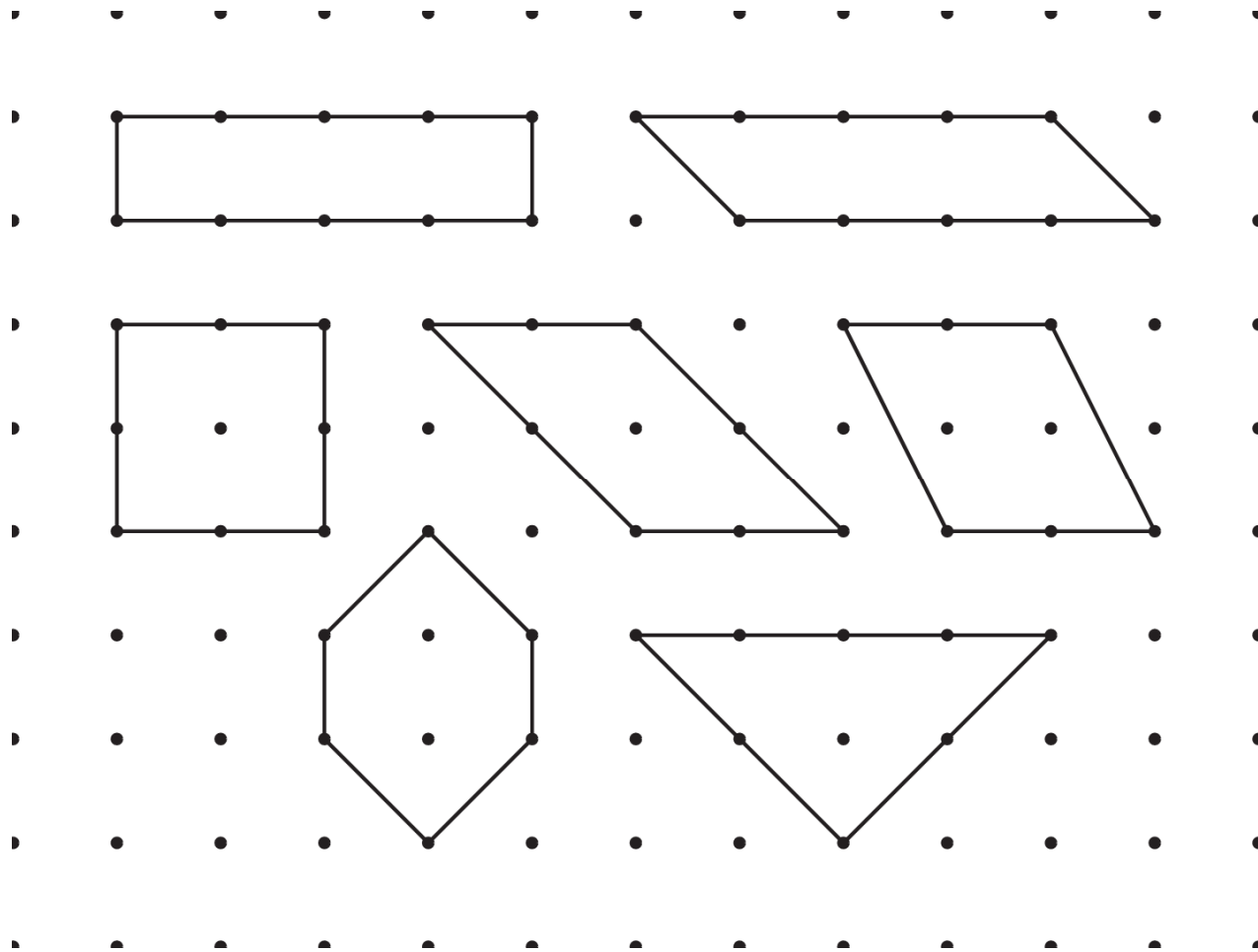


Dessinez une boucle qui, comme la précédente :

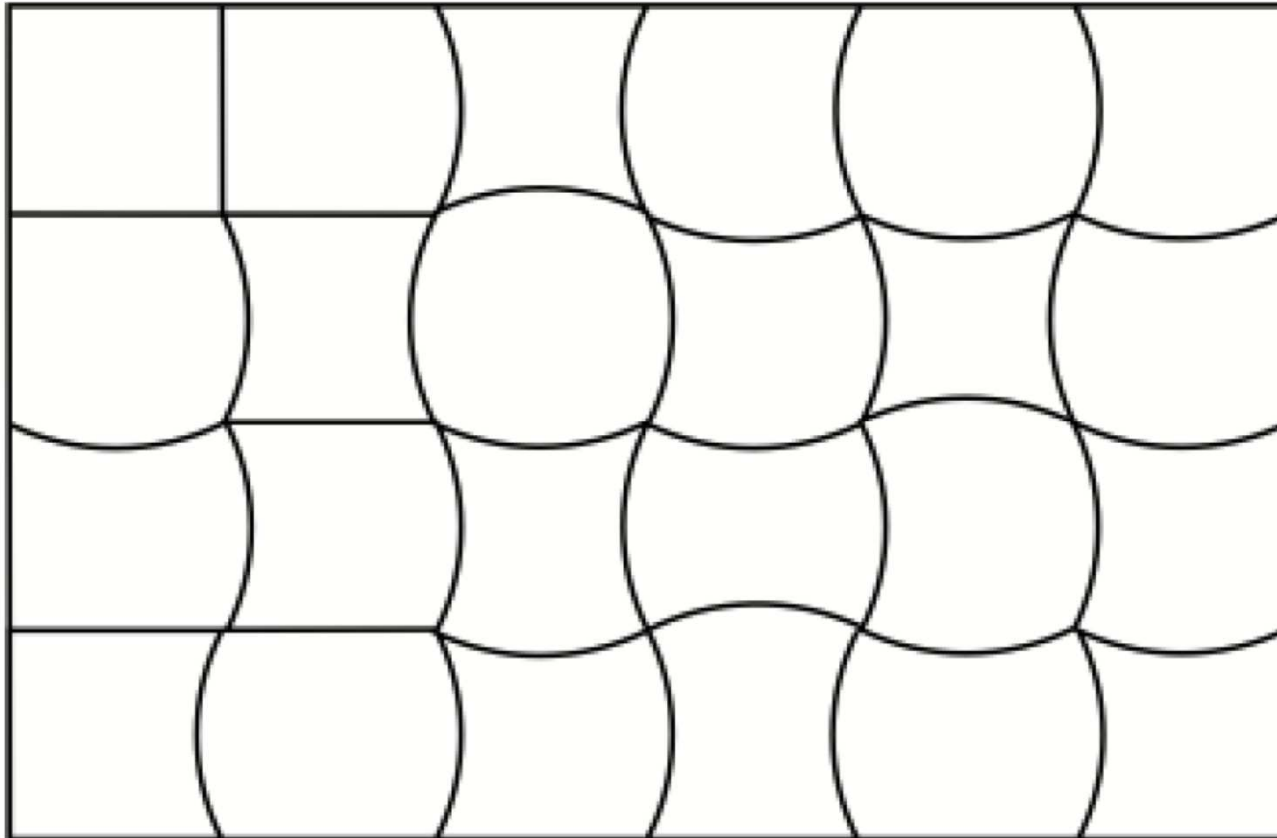
- **forme un rectangle dont les côtés sont parallèles à ceux de la planche**
- **touche toujours 22 clous**
- **mais entoure le plus grand nombre possible de carrés entiers.**

Etes-vous sûrs d'avoir trouvé le rectangle qui contient le plus grand nombre de carrés.

B. Pistes de remédiation : distinction périmètre, aire



B. Pistes de remédiation : distinction périmètre, aire



Армеп, 2005

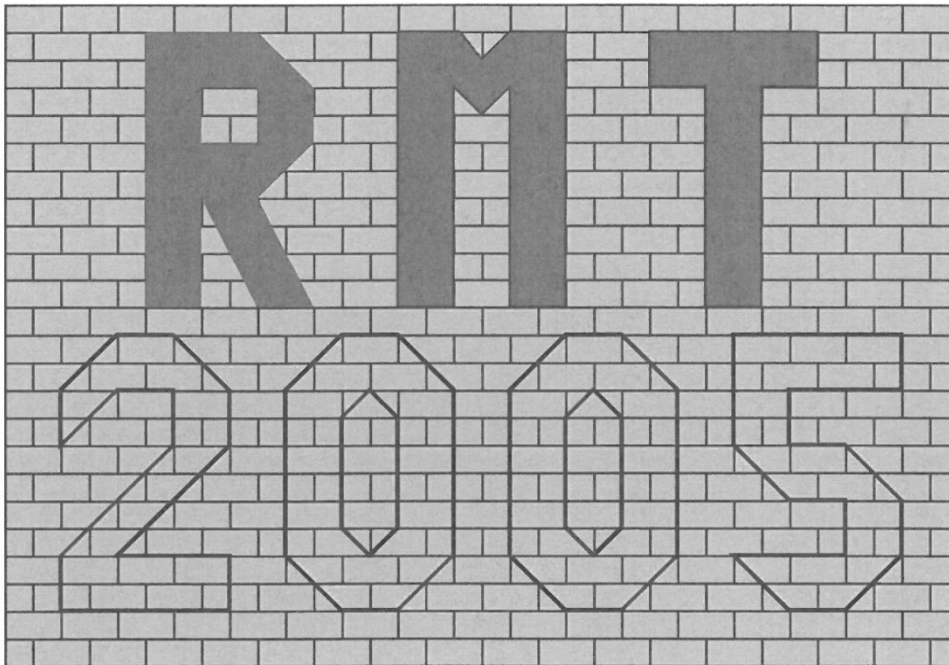
C-D. Pistes de remédiation : Superposition - Appariement

13^e RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN -ÉPREUVE 1 janvier, février 2005 ©ARMT.2005 p. 3

2. RMT 2005 (Cat. 3, 4)

Sur le mur de l'école, on a peint l'intérieur des lettres R, M et T pour la prochaine finale du Rallye Mathématique Transalpin. Il reste encore à peindre l'intérieur des quatre chiffres de 2005.

Sophie va peindre, le « 2 » et le premier « 0 ». Marc peindra l'autre « 0 » et le « 5 ».



Qui utilisera le plus de peinture ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

E. Pistes de remédiation : Unité de commune mesure

8 DÉCOUPER ET ASSEMBLER DES FIGURES (1)

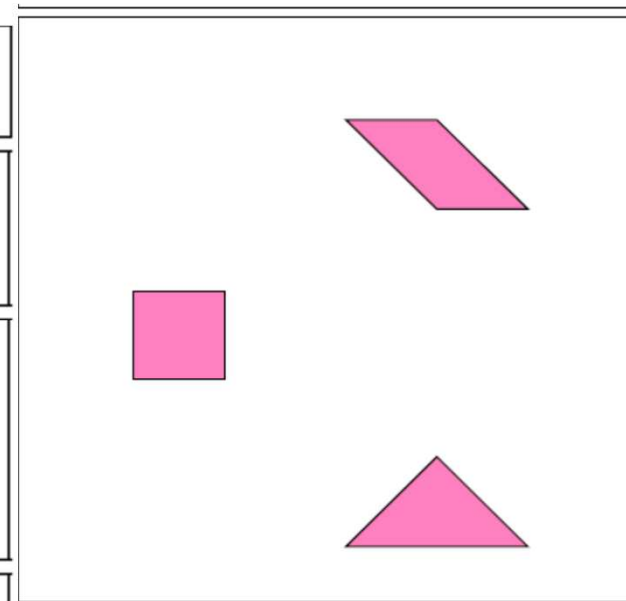


Dans le kit *standard*, ouvre le dossier *Initiation* et sélectionne le fichier *Decouper1*.



Découpe le carré en deux pour pouvoir recouvrir exactement le parallélogramme avec les deux morceaux.

Fais de même pour recouvrir exactement le triangle.



E. Pistes de remédiation : Unité de commune mesure

2 LES TANGRAMS DE JULIE ET TOM



Tu peux avoir besoin d'un crayon et d'une règle.
Si nécessaire, dans le kit *standard*, ouvre le dossier *Mesure* et sélectionne le fichier *julietom*.



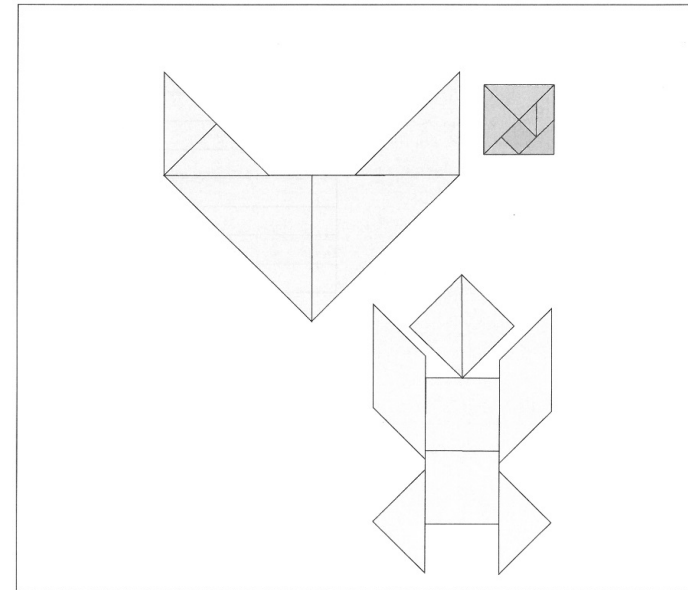
Julie et Tom ont tous les deux créé un modèle avec des pièces du Tangram en papier. Julie a construit une tête de chat et Tom un bonhomme qui lève les bras.

Qui a utilisé le plus de papier ? Ou bien ont-ils utilisé autant de papier l'un que l'autre ?

Note ta réponse et explique comment tu as trouvé.



Utilise *Apprenti Géomètre* si nécessaire pour réaliser cette comparaison.



* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 2005, Fiche 2.2 *

Synthèse : « voir » en géométrie

« Voir les propriétés que les objets recèlent » signifie notamment :

- repérer les côtés de même longueur, les angles de même amplitude, ...
- imaginer les diagonales, les médianes, les hauteurs, ...
- visualiser les axes et les centres de symétrie, les milieux des segments, ...
- élaborer toute découpe utile, ...
- ...

Crem, 2005

Synthèse : invariants « primitifs »

I1 : L'aire est la place occupée, dans le sens encombrement, par une surface.

I2 : L'aire est le nombre de carreaux nécessaires pour recouvrir une surface.

I3 : L'aire est un nombre obtenu par une formule.

I4 : L'aire est une propriété de la surface invariante par certaines opérations, une grandeur.









Synthèse : comparer des aires









Aspects qualitatifs

- comparaison directe
 - superposition
 - transitivité de la relation d'ordre « est d'aire plus grande que »
- comparaison indirecte
 - aire et fusion (découpage et recollement)
 - puzzle et équidécomposition
 - équicomplémentarité









Nombre pairs et impairs

1.













| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 | 4 | | | | | | pair |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | | | | | | | impair |

2.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| $6 + 2 =$ | | $5 + 3 =$ | | $4 + 3 =$ | | $3 + 4 =$ | |

3.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| $8 + 2 =$ | | $+$ | $=$ | $+$ | $=$ | $+$ | $=$ |
|  |  | $+$ | $=$ |  |  | $+$ | $=$ |

Synthèse : comparer des aires

Perception mixte (vers une quantification)

- décomposition en fragments identiques
- rapport de deux aires

Quantification de l'aire

- recouvrement exact
- recouvrement par l'unité et fraction de celle-ci
- quantification par encadrement
- choix du carré comme unité

Synthèse : comparer des aires

Numérisation de l'aire

- étalon conventionnel
- intérêt

Calcul de la mesure de l'aire

- un pont entre le monde des aires et le monde des longueurs
- établissement de formule de l'aire de quelques polygones (rectangle, carré, parallélogramme, triangle, trapèze)
- ...

Synthèse : quantifier ou numériser une grandeur

Quantifier une grandeur revient à l'exprimer comme multiple d'une grandeur de même nature choisie comme référence. On associe donc un **nombre** à la grandeur choisie. Ce nombre sera appelé la **mesure** de la grandeur pour l'unité choisie.

Numériser une grandeur consiste à **remplacer** cette grandeur par une quantité numérique qui se substitue à elle. On quitte une notion et un objet géométrique pour s'occuper essentiellement de quantités, c'est-à-dire de nombres.

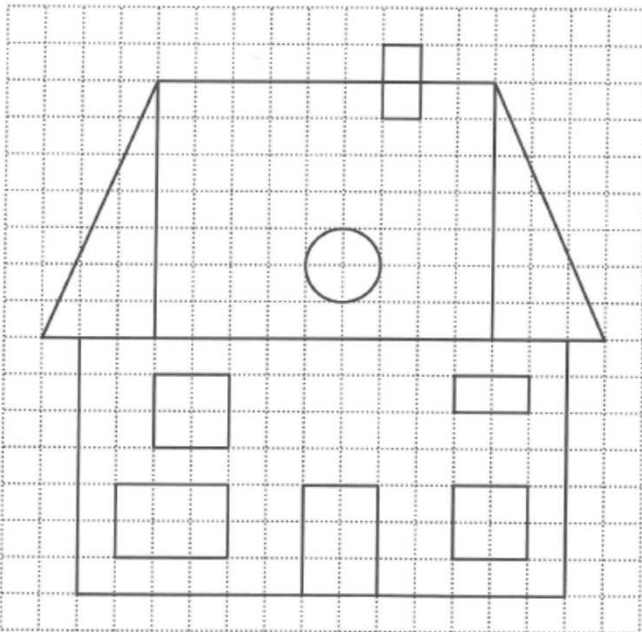
Autres problèmes...

Autres problèmes : reproduction de figures

Dessiner avec Scratch

FC 12.4.1 /P4

La maison : modèle

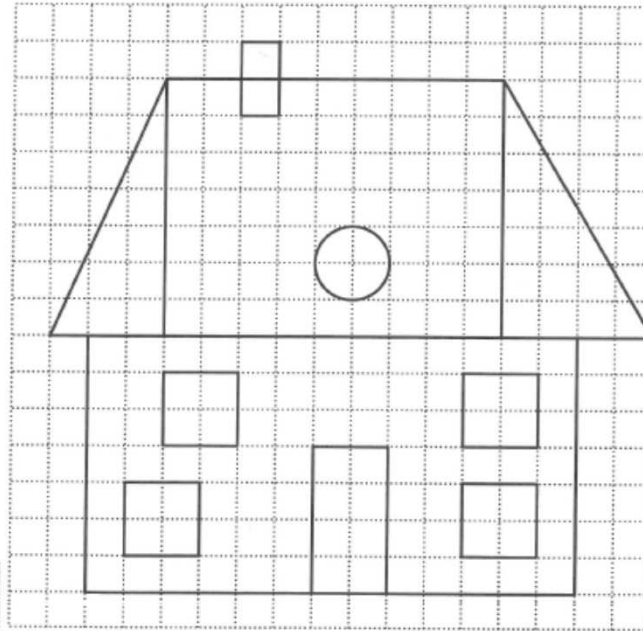


reproduction autorisée

Dessiner avec Scratch

FC 12.4.2 /P4

Scratch a recopié le modèle, il a fait 5 erreurs.
Trouve-les !



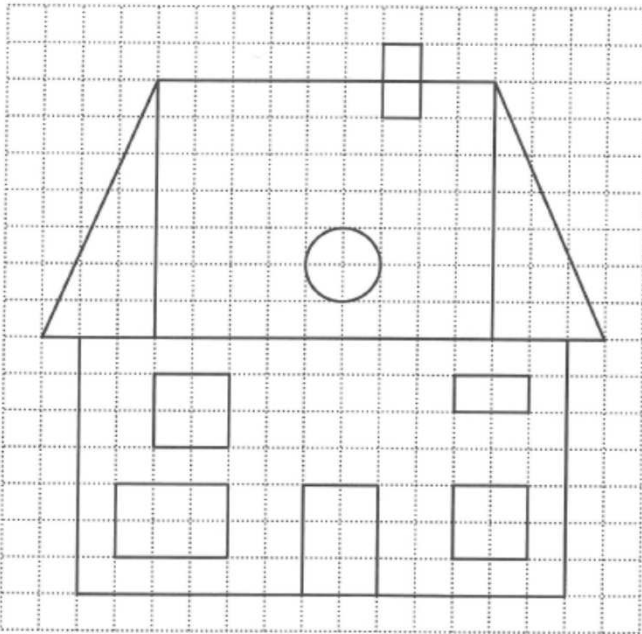
reproduction autorisée

Autres problèmes : reproduction de figures

Dessiner avec Scratch

FC 12.4.1 /P4

La maison : modèle

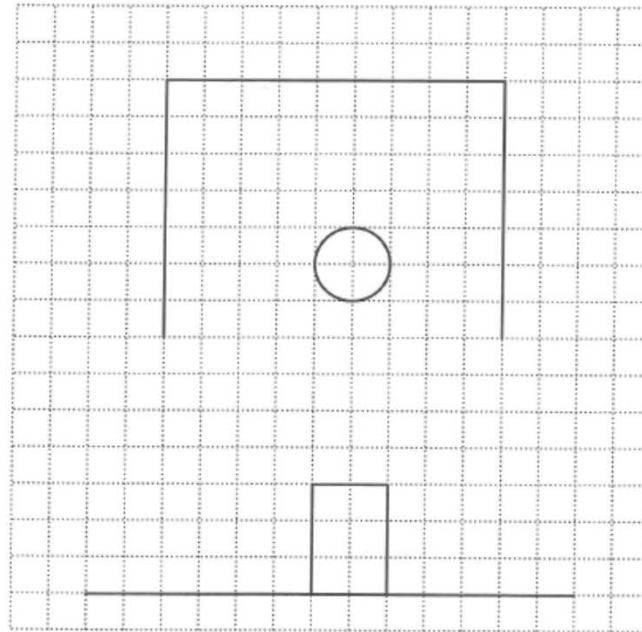


© - Reproduction autorisée

Dessiner avec Scratch

FC 12.4.3 /P4

Je dessine la maison et regarde le modèle.



Je n'ai pas fait les erreurs de Scratch !

Autres problèmes : reproduction de rectangles

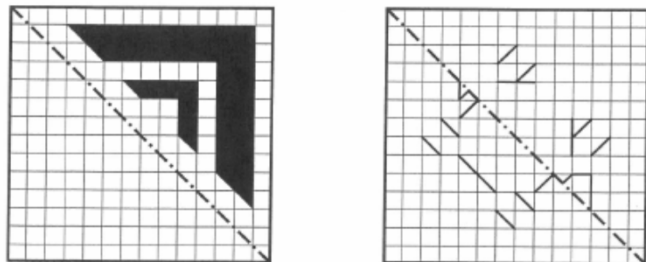
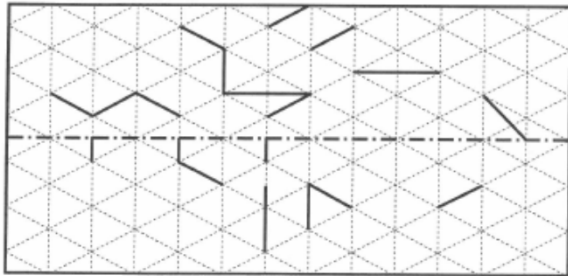
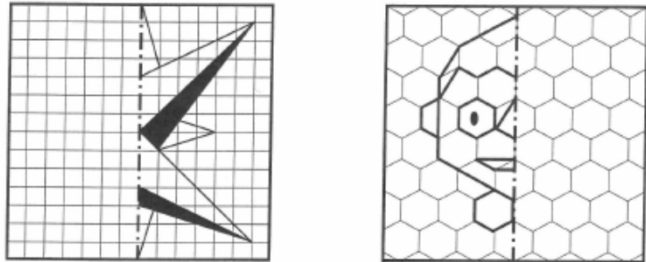
5. LA TABLE À DÉPLACER

A 10x15 grid of small circles. Several circles are highlighted with colored squares:

- Row 1: Column 5 (black)
- Row 2: Column 14 (green)
- Row 3: Column 1 (black), Column 5 (black)
- Row 5: Column 2 (black), Column 9 (blue)
- Row 9: Column 3 (pink), Column 11 (blue)
- Row 10: Column 4 (pink)

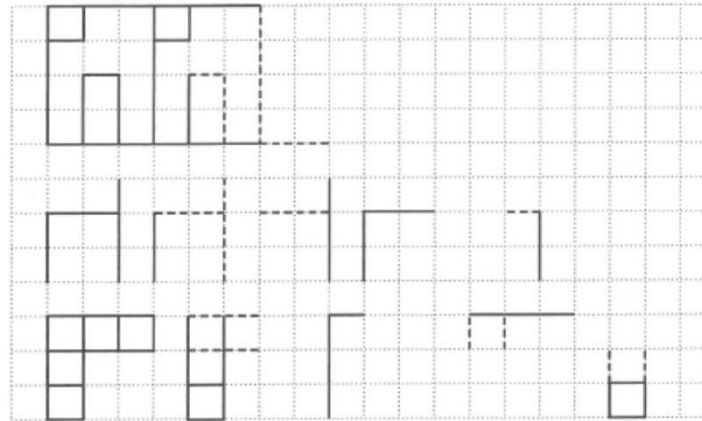
Pour les enseignants

Autres problèmes : construction de figures

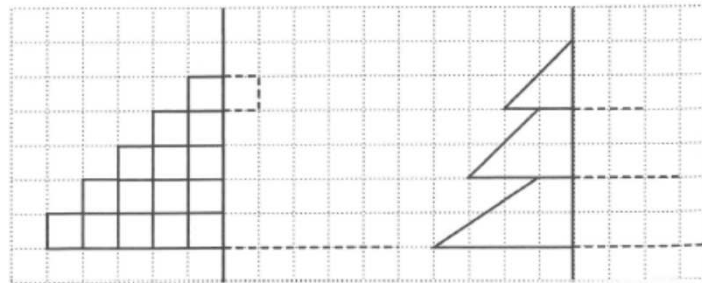


CC, SA, SVOIR - Il la complexité des maths - Solides et Figures - cycle 3/4 - ref. 148511

Dessine en suivant les carreaux



Dessine en miroir



Géométrie : Transformations du plan

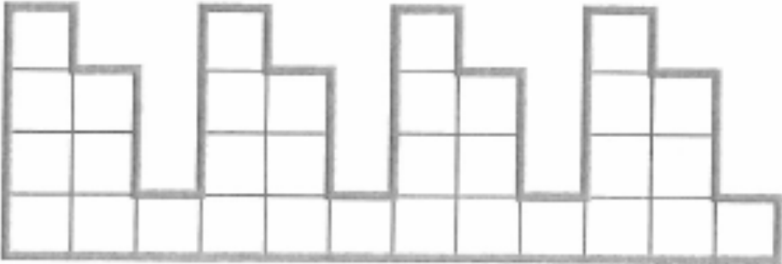
Activités : jeu du miroir, contourner un gabarit, confection de guirlandes, dessin

jeu du miroir

Autres problèmes : CEB 2014

QUESTION **2**

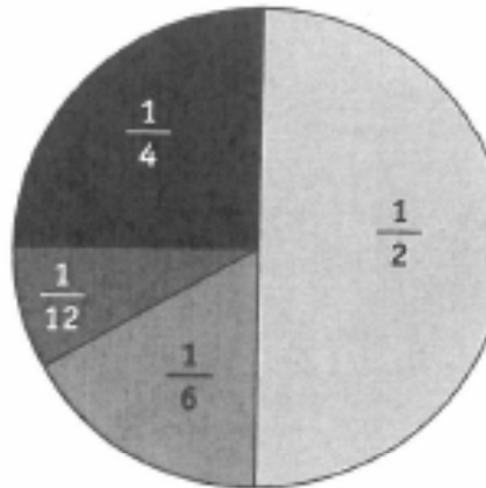
COLORIE 25 % de cette figure.



Autres problèmes : CEB 2014

QUESTION

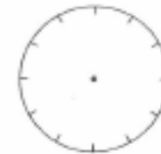
14



EFFECTUE.

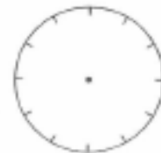
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} =$$

Zone de travail.



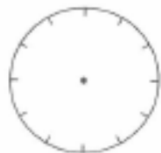
$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} =$$

Zone de travail.



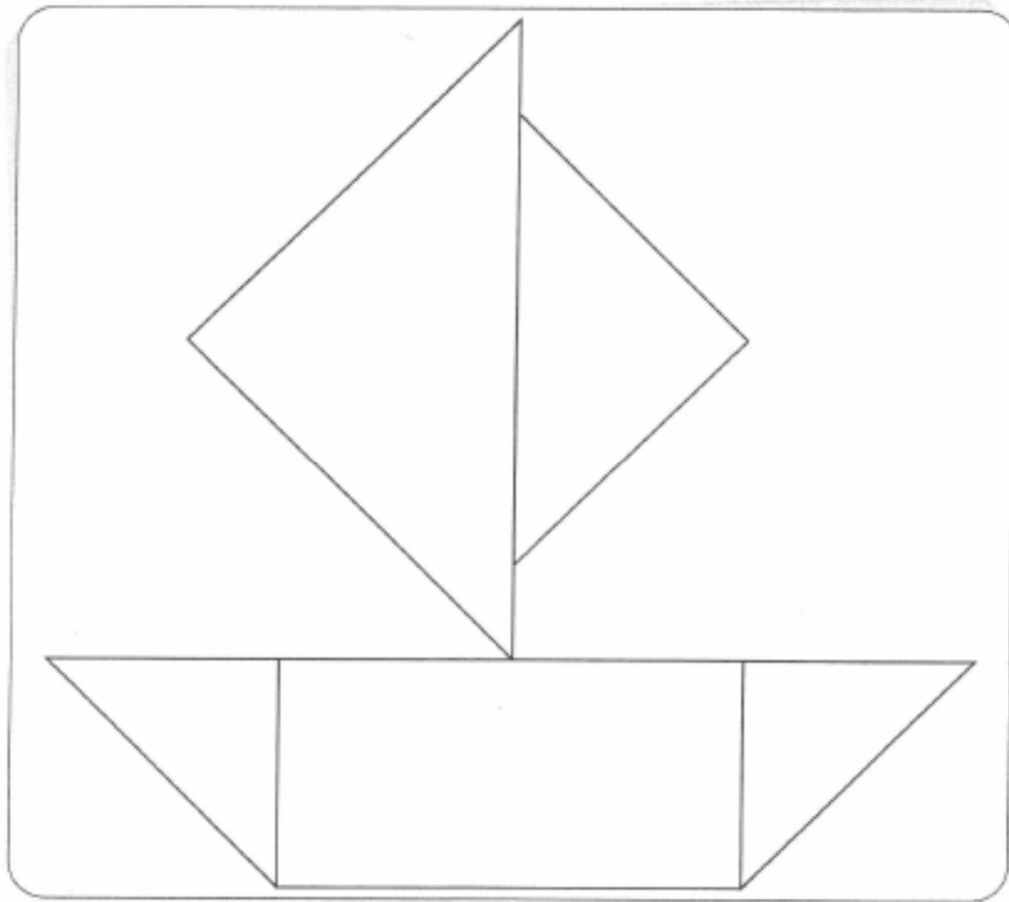
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} =$$

Zone de travail.



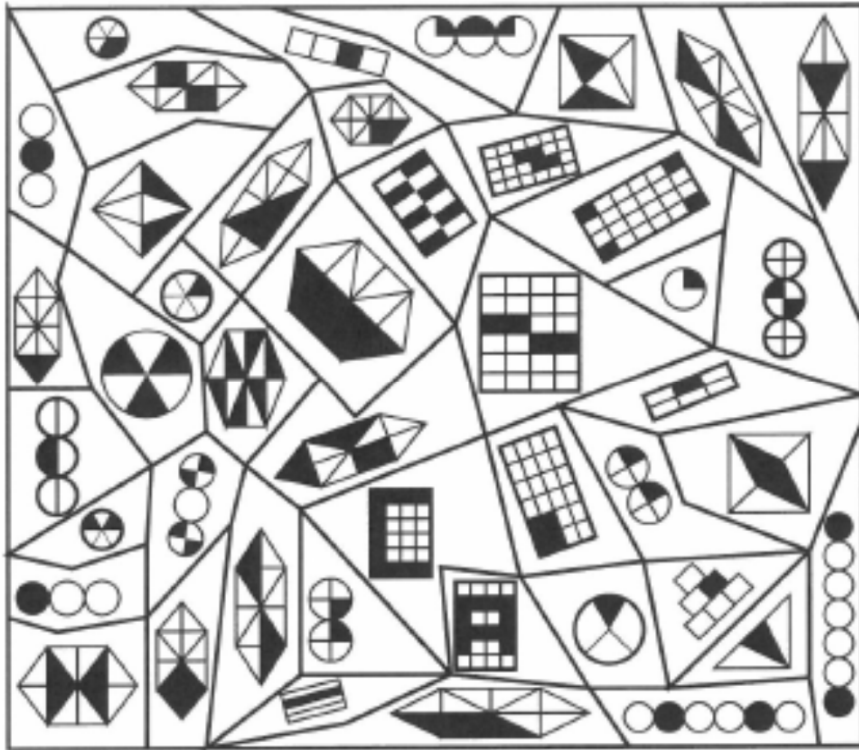
/3

Fractions



Copyright gai savoir

Fractions



$$\frac{1}{6}$$

jaune

$$\frac{1}{4}$$

gris

$$\frac{1}{3}$$

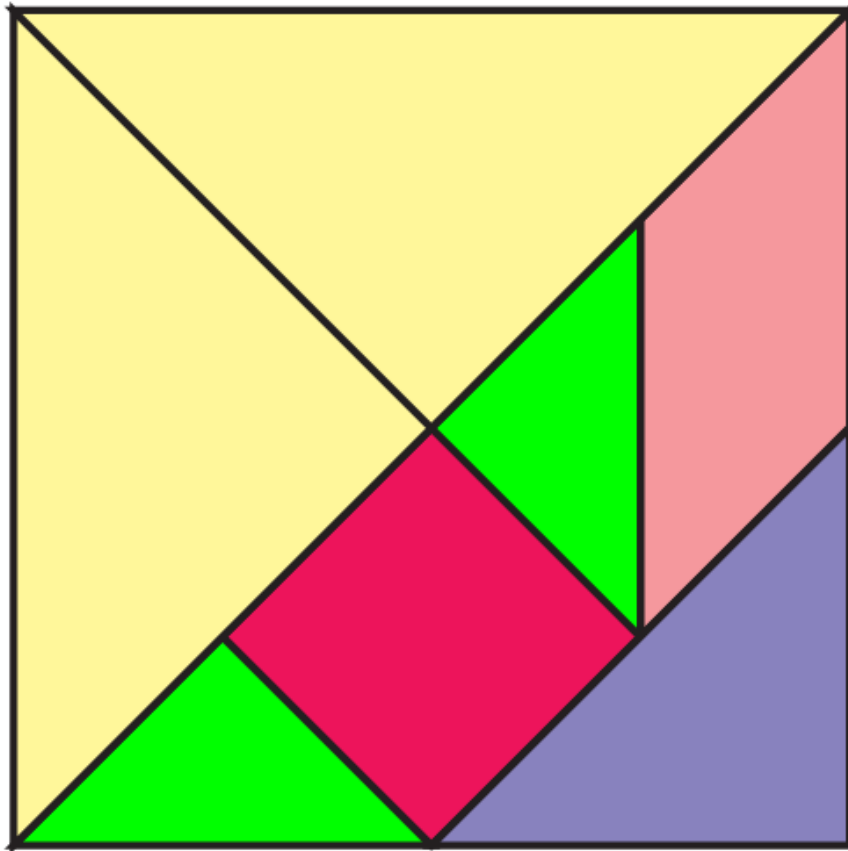
bleu

$$\frac{1}{2}$$

rouge

IREM Lyon

Fractions



Autres problèmes : unité de commune mesure

14 DES CAPACITÉS (2)

Pour l'anniversaire de leur maman, Jules et Henry préparent chacun un apéritif.

Pour son apéritif, Henry a besoin de :

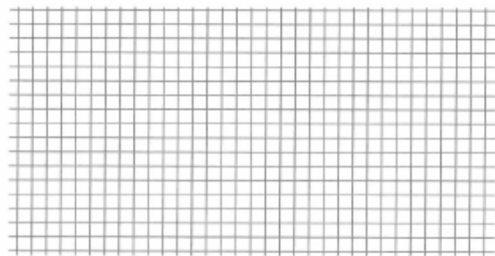
- 3 verres de jus d'orange,
- 5 cuillères à café de jus de citron,
- 3 cuillères à soupe de lait de coco.

Pour le sien, Jules a besoin de :

- 2 verres de jus de pamplemousse,
- 7 cuillères à café de coulis de fraise,
- 3 cuillères à soupe de jus d'orange.

Sachant que la contenance d'un verre est égale à 10 cuillères à café et que la contenance d'une cuillère à soupe est égale à 2 cuillères à café, peut-on dire qui, de Jules ou de Henry, a la plus grande quantité d'apéritif ?

☞ Réalisez vos essais ci-dessous



15 DES LONGUEURS (3)

Pierre et Pol parcourent chacun une distance en effectuant des pas d'éléphants, des sauts de chat et des sauts de lapin.

Pierre fait...

- 3 pas d'éléphant,
- 4 sauts de chat,
- 10 sauts de lapin.

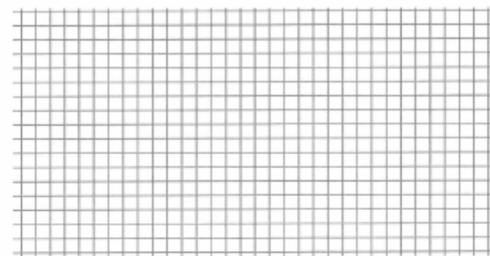
Pol fait...

- 6 pas d'éléphant,
- 2 sauts de chat,
- 5 sauts de lapin.

Sachant que 1 pas d'éléphant = 2 sauts de lapin, et qu'un saut de lapin = 2 sauts de chat,

qui a réalisé le plus grand parcours ?

☞ Réalisez vos essais ci-dessous



En guise de conclusion

On ne sait toujours pas en quoi consiste exactement un « apprentissage par la résolution de problème », on constate seulement sa réalité et ses avantages.

Julo, 2002

Des questions
???

Bibliographie - 1

- Astolfi J.-P., 1997 (11^e édition – 2014). *L'erreur, un outil pour enseigner*. ESF éditeur.
- Capacchi F., Lambelin N., 2014. *Installer un continuum spiralaire dans l'optique d'une conceptualisation progressive*. Séminaire du CREM, 7 février 2014.
<http://www.crem.be/#/agenda/157>
- Douady R., Perrin M.-J., 1984. Aires de surfaces planes (I), *Petit x*, n°6, pp. 5-33.
<http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique25>
- Douady R., Perrin M.-J., 1985. Aires de surfaces planes (II), *Petit x*, n°8, pp. 5-30.
<http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique25>
- Duval R., 2005. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de - Didactique et Sciences cognitives*, vol 10, pp. 5-53.
- Skilbecq Ph., 2004-2005. *Un problème de géométrie !* Livret RMT, Tome 2, pp. 47-64.
<http://rmt.crem.be/Outils.html#problemotheque>

Bibliographie - 2

- Moreira Baltar P., 1999. Une étude de situations et d'invariants : outil pour l'analyse de la construction du concept d'aire au collège, *Petit x*, n°49, pp. 45-78.
http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/49/49x5.pdf
- CREM, Apprenti géomètre
2005, Apprenti Géomètre, un outil de différenciation des apprentissages en mathématiques.
2007, Impact du logiciel « Apprenti Géomètre » sur certains apprentissages.
- Coloriages codés « éléphant-poisson ».
<http://math.univ-lyon1.fr/irem/spip.php?article707>
- Curvica
http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Curvica_Touss_From_-2.pdf

**Merci pour votre attention
et votre participation**