Ambiguïtés, abus de langage, implicites, …

Analyse logique de difficultés insoupçonnées au cours de mathématiques

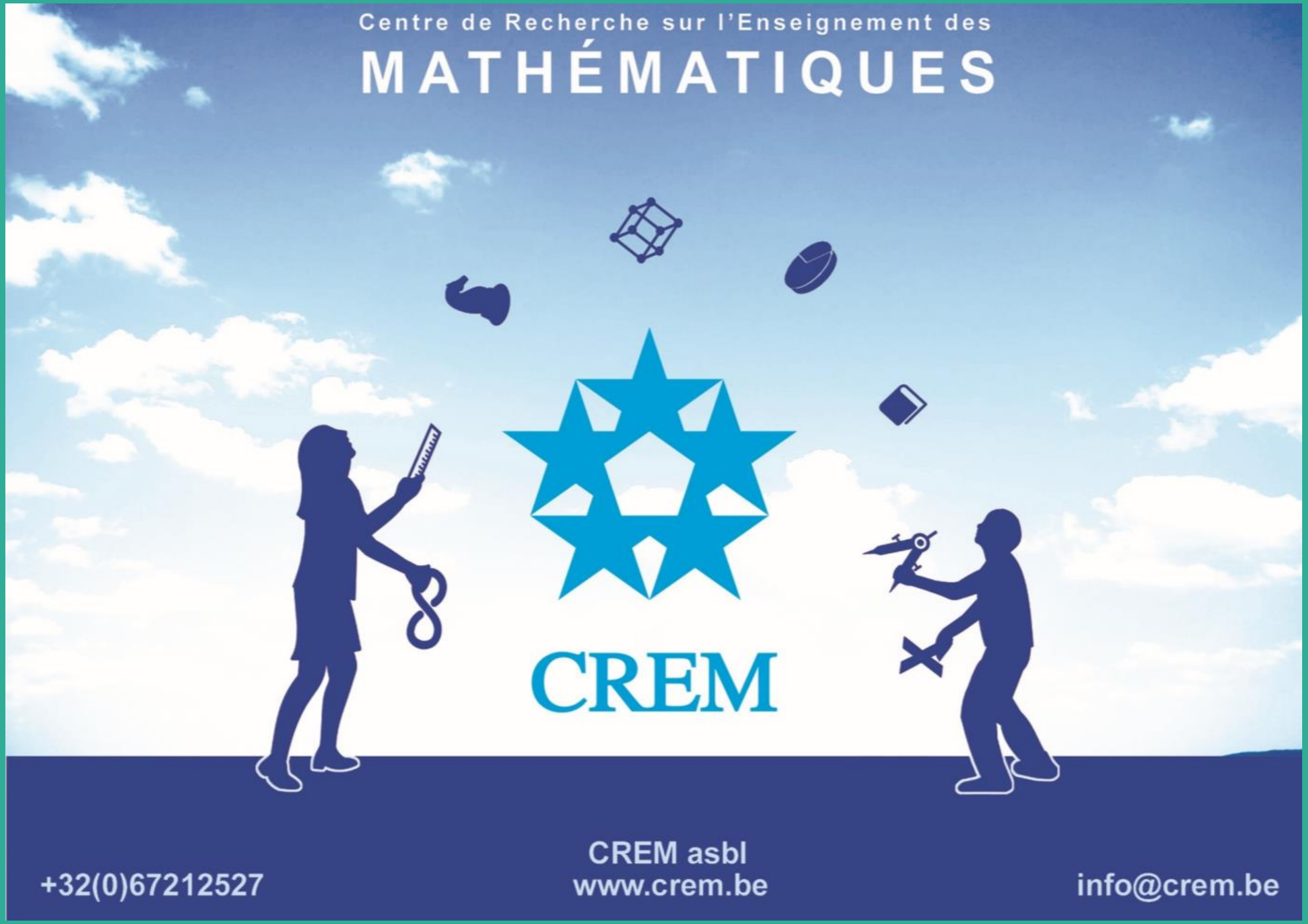
Vincent DEGAUQUIER
Samuël DI EMIDIO

CREM

Vincent DEGAUQUIER
Samuël DI EMIDIO

Le CREM

RECHERCHES
PUBLICATIONS
LOGICIELS
FORMATIONS
BIBLIOTHÈQUE



Le projet LOGLANG

Analyse de la langue

Production d’articles

Diffusion

À propos de la formation…

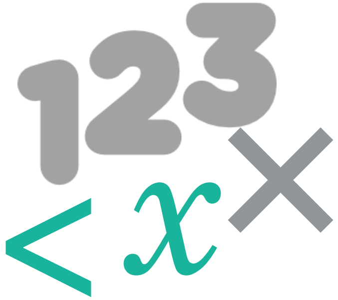
À propos de la formation…

1. LANGUE MATHÉMATIQUE
2. ARTICULATIONS LOGIQUES DU DISCOURS MATHÉMATIQUE
3. CATÉGORIES LOGIQUES
4. CONCLUSION

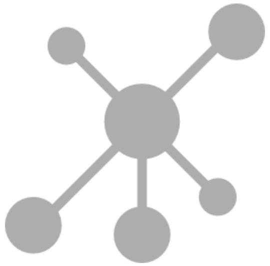
Langue mathématique

Langue mathématique

Langue
française



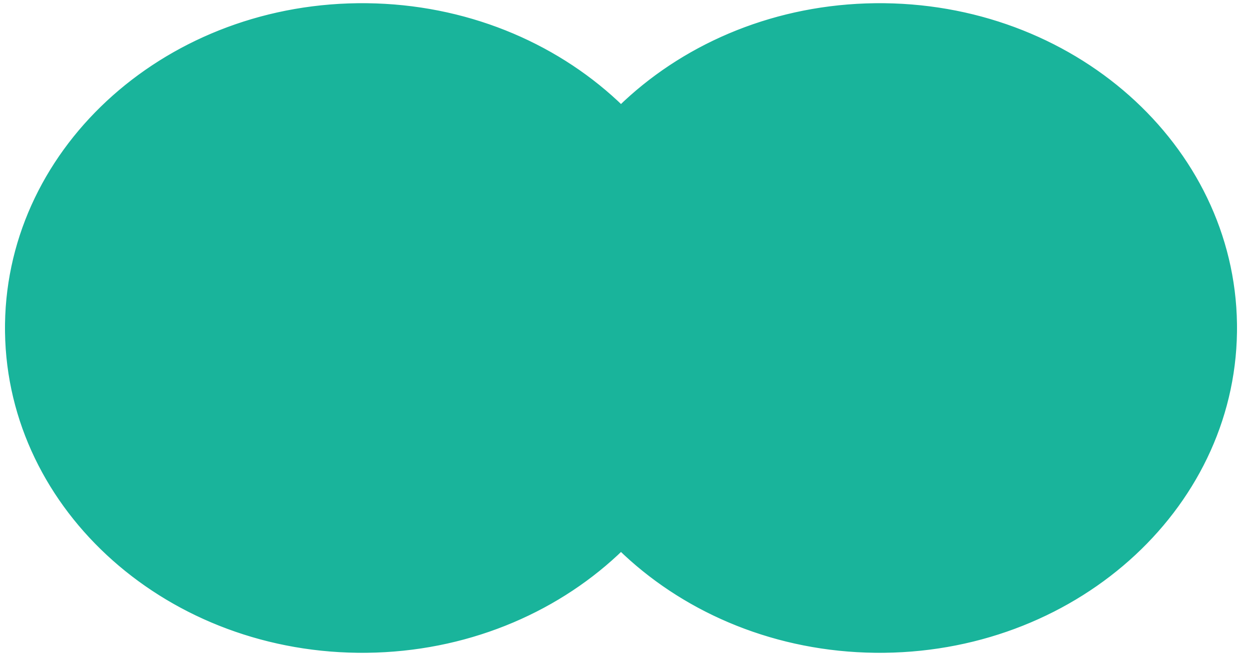
Alphabet



Syntaxe

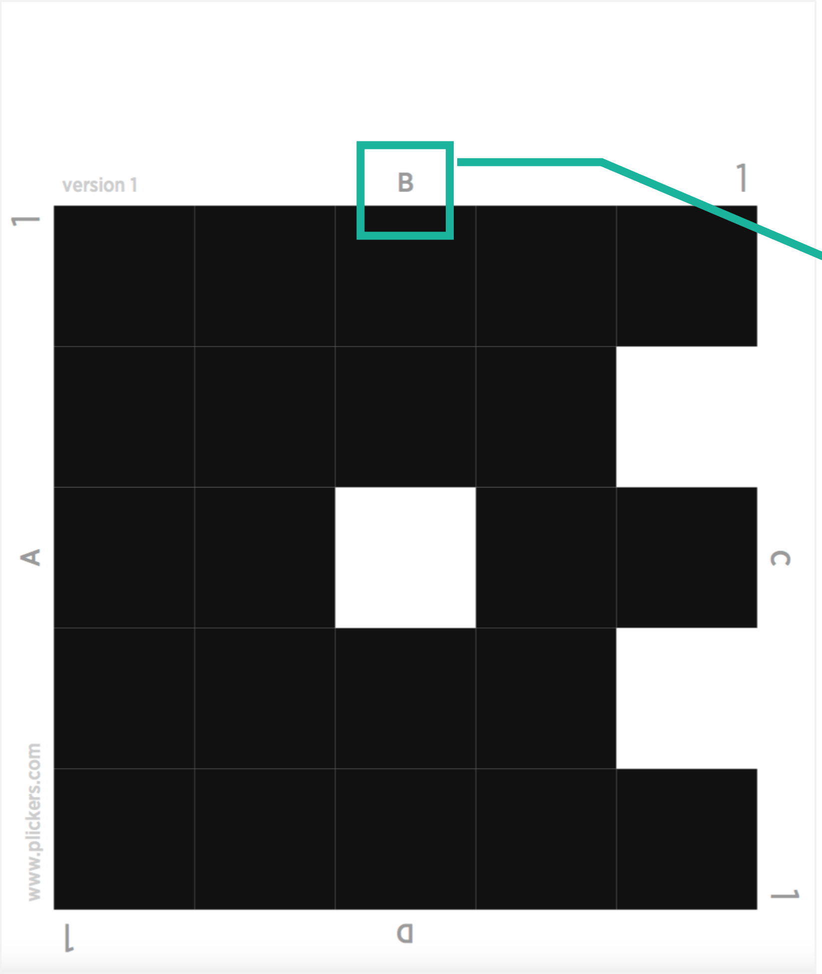
Source des difficultés

Langue naturelle



Langue symbolique

Exemples



Votre réponse vers le haut

« Les multiples de 9 et de 12 sont multiples de 3. »

« Les multiples de 9 et de 12 sont multiples de 3. »

A. « Les multiples de 9 sont multiples de 3 et les multiples de 12 sont multiples de 3. »

B. « Les multiples communs à 9 et à 12 sont multiples de 3. »

« Les multiples de 3 et de 4 sont multiples de 12. »

« Les multiples de 3 et de 4 sont multiples de 12. »

A. « Les multiples de 3 sont multiples de 12 et les multiples de 4 sont multiples de 12. »

B. « Les multiples communs à 3 et à 4 sont multiples de 12. »

« Les multiples de 9 et de 12 sont multiples de 3. »

« Les multiples de 3 et de 4 sont multiples de 12. »

« Les multiples de 9 et de 12 sont multiples de 3. »

A. multiples de chacun ✓

B. multiples communs ✓

« Les multiples de 3 et de 4 sont multiples de 12. »

A. multiples de chacun ✗

B. multiples communs ✓

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

A. Vrai

B. Faux

C. Ça dépend

$$(a+b)^2=a^2+b^2$$

$$(a+b)^2=a^2+b^2$$

A. Vrai

B. Faux

C. Ça dépend

$$3a+7=32$$

$$3a+7=32$$

A. Vrai

B. Faux

C. Ça dépend

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Vrai $\forall a$ et $\forall b$

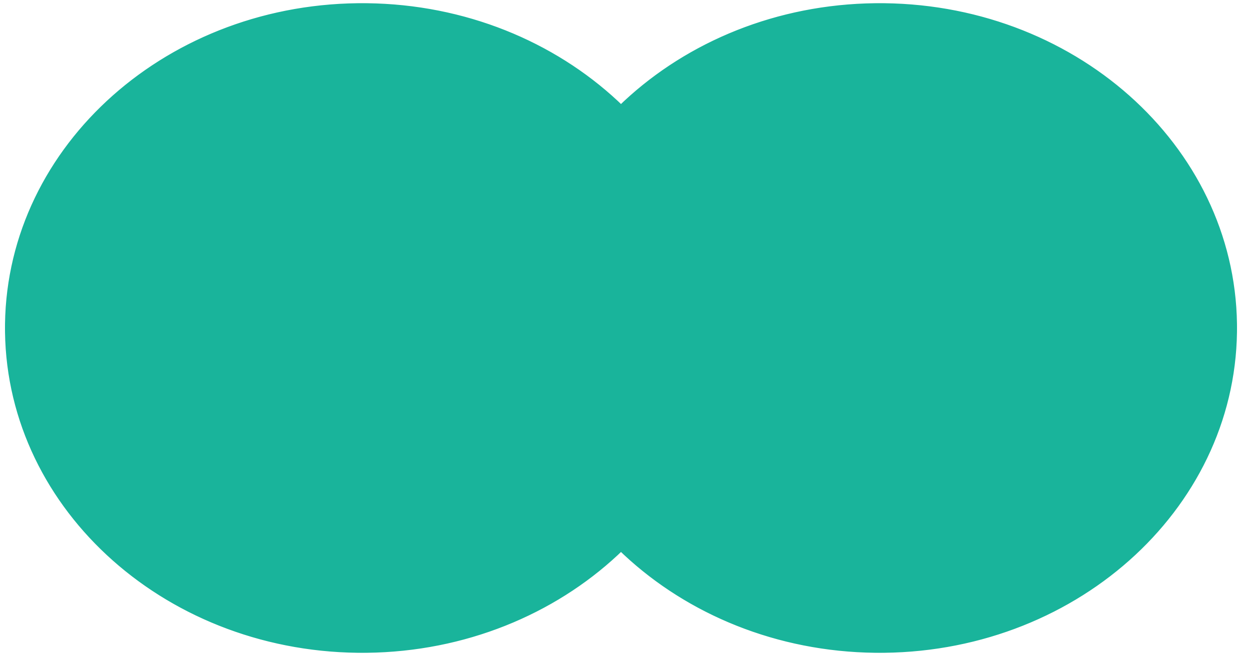
$(a+b)^2=a^2+b^2$

$3a+7=32$

Vrai pour certaines valeurs de a et de b

Source des difficultés

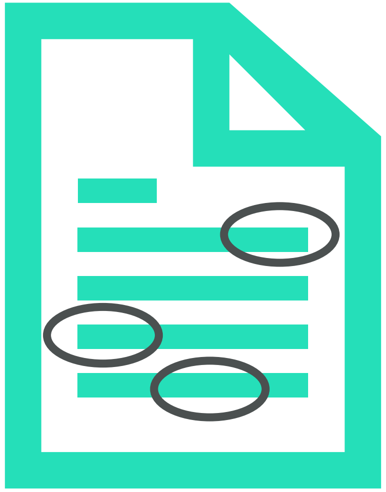
Langue naturelle



Langue symbolique

Articulations logiques du discours mathématique

Raisonnement mathématique



Discours structuré

Concepts logiques

A. Compétences logiques et activité mathématique

B. Ambiguïtés logiques et langue mathématique

A. Compétences logiques et activité mathématique

Mise en évidence de l'importance des **concepts logiques** dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

3 exemples : Algèbre
Géométrie
Analyse

Exemple 1 : Résolution d'équations

$$\frac{(x+2)}{(x-3)(x-1)} = 0$$

Exemple 1 : Résolution d’équations

Si $(x-3)=0$ **alors** $(x-3)(x-1)=0$

$$\frac{(x+2)}{\boxed{(x-3)}(x-1)}=0$$

Exemple 1 : Résolution d'équations

Si $(x-3)=0$ **alors** $(x-3)(x-1)=0$

et si $(x-1)=0$ **alors** $(x-3)(x-1)=0$

$$\frac{(x+2)}{(x-3)\boxed{(x-1)}}=0$$

Exemple 1 : Résolution d'équations

Si $(x-3)=0$ **ou** $(x-1)=0$ **alors** $(x-3)(x-1)=0$

$$\frac{(x+2)}{(x-3)(x-1)}=0$$

CE : $(x-3)(x-1)\neq 0$

Cela n'est pas le cas que $(x-3)=0$ **ou** $(x-1)=0$

Autrement dit : $(x-3)\neq 0$ **et** $(x-1)\neq 0$

IDENTIFICATION D'EXPRESSIONS LOGIQUES

« si… alors »	implication
« ne… pas »/« ≠ »	négation
« ou »	disjonction
« et »	conjonction

COMPÉTENCES LOGIQUES MOBILISÉES

Lois de De Morgan
Modus tollens

Exemple 2 : Théorème de Pythagore

« Pour tout triangle ABC rectangle en C, $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$ »

Exemple 2 : Théorème de Pythagore

« Quel que soit le triangle ABC,

s'il est rectangle en C, **alors** $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$ »

THÉORÈME

THÉORÈME ET SA RÉCIPROQUE

CONTRAPOSÉE DU THÉORÈME

RÉCIPROQUE DU THÉORÈME

CONTRAPOSÉE DE LA RÉCIPROQUE

CONTRAPOSÉE ET SA RÉCIPROQUE

IDENTIFICATION D’EXPRESSIONS LOGIQUES

« quel que soit »	quantificateur universel
« si… alors »	implication
« si et seulement si »	équivalence
« ne… pas »/« ≠ »	négation

COMPÉTENCES LOGIQUES MOBILISÉES

Condition nécessaire et suffisante

Réciproque

Contraposée

Exemple 3 : Limite d'une suite

« Une suite converge vers un réel L **ssi pour tout** intervalle ouvert centré en L, **il existe** un terme de la suite tel que **tous** les suivants lui appartiennent. »

Exemple 3 : Limite d'une suite

Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $x_n \in \mathbb{R}$.
Soit L un nombre réel.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L **ssi**

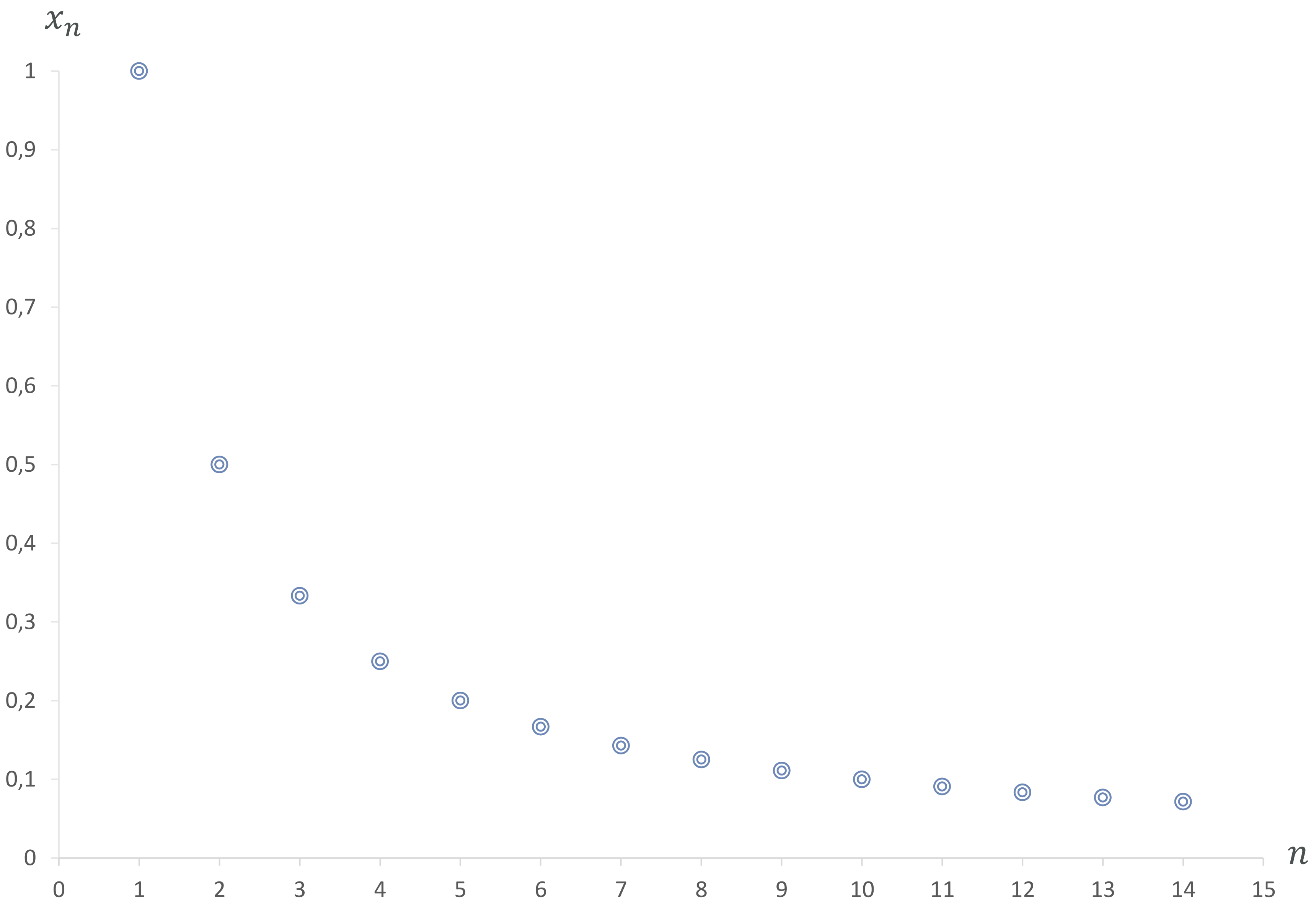
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists i \in \mathbb{N} \;\; \forall j \in \mathbb{N} \;\; \left(i \leq j \Rightarrow x_j \in \left]L - \varepsilon\,; L + \varepsilon\right[\right)$$

Exemple 3 : Limite d'une suite

Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $x_n = \frac{1}{n}$

$$\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\rangle$$

Cette suite converge-t-elle vers 0 ?


x_n
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
n

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

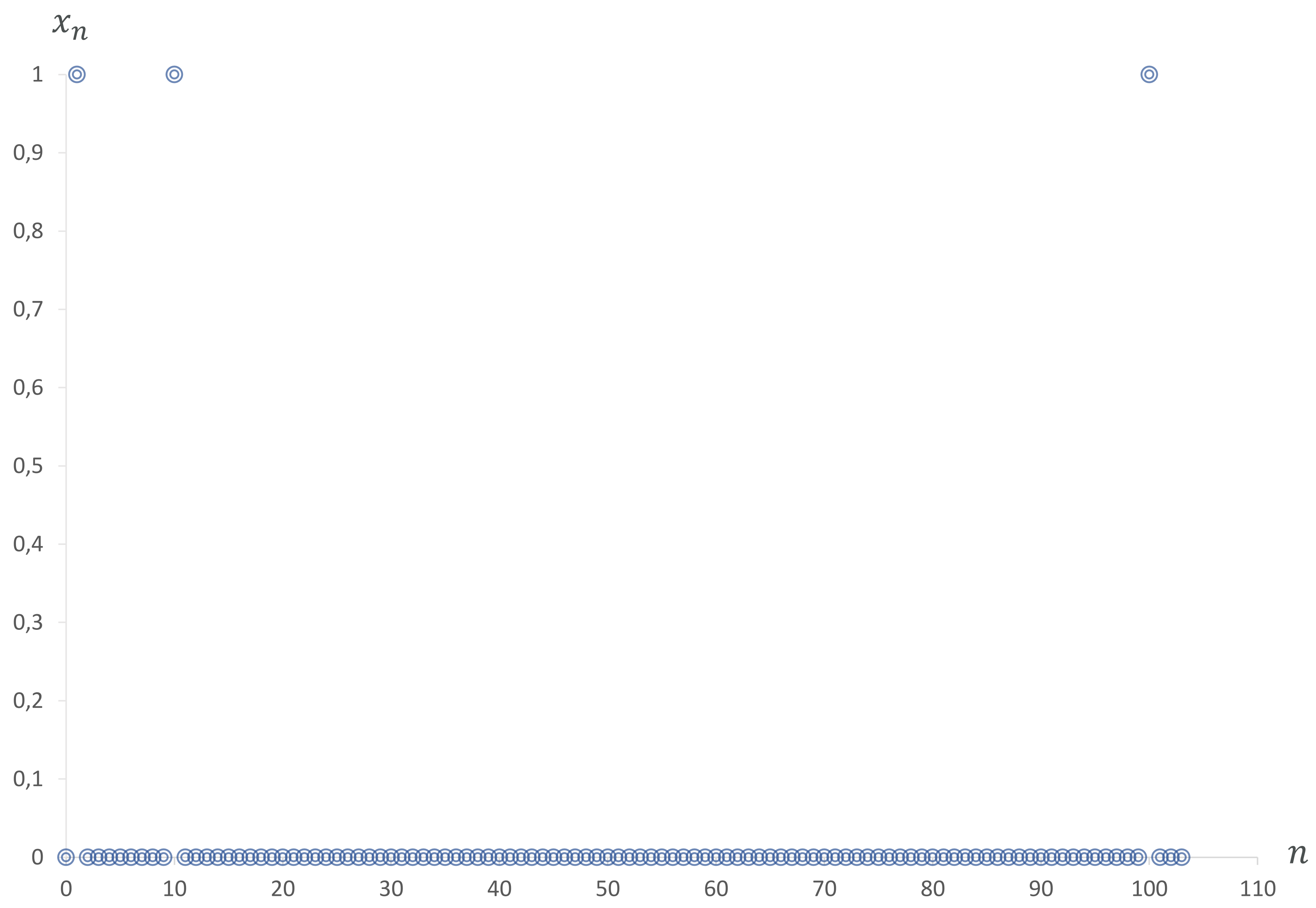
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists i \in \mathbb{N} \;\; \forall j \in \mathbb{N} \;\; \left(i \leq j \Rightarrow x_j \in \left]0 - \varepsilon\,;0 + \varepsilon\right[\right)$$

Exemple 3 : Limite d'une suite

Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $x_n = \begin{cases} 1 \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}\ \ n = 10^k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$$\begin{array}{l} \langle 0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,1,\ldots,1,\ldots\rangle \\ \quad\ \ \uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \uparrow \quad\ \ \uparrow \\ \quad\ \ x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_{10} \quad x_{100} \end{array}$$

Cette suite converge-t-elle vers 0 ?



x_n
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
n

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \exists j \in \mathbb{N} \quad \left(i \leq j \ \text{ et } \ x_j \notin \left] 0 - \frac{1}{2}\,; 0 + \frac{1}{2} \right[\right)$$

IDENTIFICATION D'EXPRESSIONS LOGIQUES

« pour tout »/« $\forall$ »	quantificateur universel
« il existe »/« $\exists$ »	quantificateur existentiel
« si… alors »/« $\Rightarrow$ »	implication
« si et seulement si »	équivalence
« ne… pas »/« $\notin$ »	négation
« et »	conjonction

COMPÉTENCES LOGIQUES MOBILISÉES

Ordre des quantificateurs
Négation des quantificateurs
Négation de l'implication

A. Compétences logiques et activité mathématique

Mise en évidence de l’importance des **concepts logiques** dans l’enseignement et l’apprentissage des mathématiques.

3 exemples : Algèbre
Géométrie
Analyse

A. Compétences logiques et activité mathématique

- Faire des mathématiques, c'est faire des raisonnements.
- Certaines expressions sont essentielles à la conduite de ces raisonnements.

3 exemples : Algèbre
Géométrie
Analyse

B. Ambiguïtés logiques et langue mathématique

Préciser la signification des **connecteurs logiques** et montrer les difficultés à les déceler.

	Langue logique	Langue française
Négation	$\neg$	ne… pas
Conjonction	$\wedge$	et
Disjonction	$\vee$	ou
Implication	$\rightarrow$	si… alors
Équivalence	$\leftrightarrow$	si et seulement si
Quant. universel	$\forall$	tout
Quant. existentiel	$\exists$	quelque

NÉGATION : Signification logique

A combiné à $\neg$ produit $\neg A$

$\neg A$ est vrai ssi A n'est pas vrai

NÉGATION : Décalage entre « ¬ » et « ne… pas »

« Certains textes de Leibniz sont écrits en français. »

A. « Certains textes de Leibniz ne sont pas écrits en français. »
B. « Aucun texte de Leibniz n'est écrit en français. »

NÉGATION : Décalage entre « ¬ » et « ne... pas »

« Certains textes de Leibniz sont écrits en français. »

A. « Certains textes de Leibniz ne sont pas écrits en français. »
B. « Aucun texte de Leibniz n'est écrit en français. »

plickers
clickers, simplified

NÉGATION : Décalage entre « $\neg$ » et « ne… pas »

« Tous les textes de Leibniz sont écrits en français. »

A. « Tous les textes de Leibniz ne sont pas écrits en français. »
B. « Aucun texte de Leibniz n’est écrit en français. »

NÉGATION : Décalage entre « ¬ » et « ne... pas »

« Tous les textes de Leibniz sont écrits en français. »

A. « Tous les textes de Leibniz ne sont pas écrits en français. »
B. « Aucun texte de Leibniz n’est écrit en français. »

NÉGATION : Usage implicite

$a \neq b$ signifie $\neg(a = b)$

$a \notin b$ signifie $\neg(a \in b)$

CONJONCTION : Signification logique

A et B combinés à $\wedge$ produisent $(A \wedge B)$

$(A \wedge B)$ est vrai ssi A est vrai et B est vrai

∧

CONJONCTION : Décalage entre « ∧ » et « et »

« Gottfried est tombé et s’est brisé le crâne. »

« Gottfried s’est brisé le crâne et est tombé. »

$\wedge$

CONJONCTION : Usage implicite

$a \leq x \leq b$ signifie $(a \leq x) \wedge (x \leq b)$

$\vee$

DISJONCTION : Signification logique

A et B combinés à $\vee$ produisent $(A \vee B)$

$(A \vee B)$ est vrai ssi A est vrai ou B est vrai

V

DISJONCTION : Décalage entre « **V** » et « ou »

« Le menu comprend un café ou un dessert. »

$\vee$

DISJONCTION : Usage implicite

$a \leq b$ signifie $(a < b) \vee (a = b)$

IMPLICATION : Signification logique

A et B combinés à $\rightarrow$ produisent $(A \rightarrow B)$

$(A \rightarrow B)$ est vrai ssi A n'est pas vrai ou B est vrai

IMPLICATION : Décalage entre « → » et « si… alors »

« Si tu termines ta soupe, tu auras un dessert. »
Gottfried ne termine pas sa soupe et a un dessert.

« Si tu ne termines pas ta soupe, tu n’auras pas de dessert. »
Gottfried termine sa soupe et n’a pas de dessert.

IMPLICATION : Usage implicite

$\forall a \geq 0 \; (-a \leq a)$ signifie $\forall a (a \geq 0 \rightarrow -a \leq a)$

QUANT. UNIVERSEL : Signification logique

$A(\alpha)$ combiné à $\forall\alpha$ produit $\forall\alpha\ \ A(\alpha)$

$\forall\alpha\ \ A(\alpha)$ est vrai ssi
$A(\alpha)$ est vrai pour toute valeur de α

QUANT. UNIVERSEL : Décalage entre « ∀ » et « tout »

« Tous les spectateurs ont apprécié la pièce. »

« Au moins un spectateur a apprécié la pièce. »

QUANT. UNIVERSEL : Usage implicite

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

signifie $\forall a \forall b \ \ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

« Un carré est un losange. »

signifie « Tout carré est un losange. »

$\exists$

QUANT. EXISTENTIEL : Signification logique

$A(\alpha)$ combiné à $\exists\alpha$ produit $\exists\alpha \ A(\alpha)$

$\exists\alpha \ A(\alpha)$ est vrai ssi
$A(\alpha)$ est vrai pour au moins une valeur de α

∃

QUANT. EXISTENTIEL :
Décalage entre « ∃ » et « quelque »

« Certains textes de Leibniz sont écrits en français »

« Certains textes de Leibniz ne sont pas écrits en français »

$\exists$

QUANT. EXISTENTIEL : Usage implicite

« Tous les nombres naturels ne sont pas pairs. »

est synonyme de

« Certains nombres naturels ne sont pas pairs. »

B. Ambiguïtés logiques et langue mathématique

Préciser la signification des **connecteurs logiques** et montrer les difficultés à les déceler.

B. Ambiguïtés logiques et langue mathématique

- Difficulté d'identifier la signification des connecteurs logiques
- Difficulté de déceler leur présence

Catégories logiques

Comment classer ces symboles ?

$-$	$<$	$\sqrt{}$	a dans $a^2 - b^2$
3	$\neq$	x dans $3x + 1 = 5$	$\geq$
$\int \dots \,\mathrm{d}x$	π	$\Rightarrow$	s dans $A' = s_O(A)$
$\times$	$=$	0	$\wedge$
Σ	$\exists$	e	$\Leftrightarrow$
L dans $A = l \times L$	$\in$	$\forall$	$//$

Arité : nombre d'arguments pris

$\sqrt{\bigcirc}$ unaire

$\bigcirc \times \bigcirc$ binaire

$\int_{\circ}^{\circ} \bigcirc \ldots \mathrm{d}x$ ternaire

… n-aire

02 Symboles prédicatifs $<$ $\neq$ $=$ $\in$ $//$ $\geq$

○ **est pair** — unaire

○ $//$ ○ — binaire

○ $<$ ○ $<$ ○ — ternaire

… *n*-aire

PROPRIÉTÉ

RELATION

01 Symboles fonctionnels $\times \quad - \quad s_{\text{dans } A' = s_O(A)} \quad \sqrt{} \quad \int \ldots \mathrm{d}x \quad \Sigma$

02 Symboles prédicatifs $< \quad \neq \quad = \quad \in \quad // \quad \geq$

03 Symboles logiques $\wedge \quad \Rightarrow \quad \exists \quad \forall \quad \Leftrightarrow$

04 Constantes $3 \quad 0 \quad \pi \quad e$

05 Variables $L_{\text{dans } A = l \times L} \quad a_{\text{dans } a^2 - b^2} \quad x_{\text{dans } 3x+1=5}$

01 Symboles fonctionnels

02 Symboles prédicatifs

03 Symboles logiques

04 Constantes

05 Variables

Catégories logiques

01 Symboles fonctionnels

02 Symboles prédicatifs

03 Symboles logiques

04 Constantes

05 Variables

« 5 est un nombre premier »

01 Symboles fonctionnels

02 Symboles prédicatifs

03 Symboles logiques

04 Constantes

05 Variables

« le produit matriciel de A et de B »

« x est égal à 8 »

01 Symboles fonctionnels

02 Symboles prédicatifs

03 Symboles logiques

04 Constantes

05 Variables

« **si** une fonction est dérivable, **alors** elle est continue »

Difficultés didactiques

« si une fonction est dérivable, alors elle est continue »

Expression prédicative

Expression prédicative

Difficultés didactiques

« si une fonction est dérivable, alors elle est continue »

Variable

Variable

Difficultés didactiques

01

“Plusieurs découpages d’une même expression sont possibles.”

AMBIGUÏTÉ DE LA STRUCTURE

Difficultés didactiques

Symbole fonctionnel	?
$3 - 7$	-7
$x - a$	$-a$
$(a - b)^2$	$-\frac{x}{2}$
binaire	unaire

Difficultés didactiques

MOINS DE SOUSTRACTION	Symbole fonctionnel	binaire
MOINS DE SYMÉTRIE	Symbole fonctionnel	unaire
MOINS « ENTIER NÉGATIF »	Constante	

[Bouvier *et al.*, Lamb *et al.*, Vlassis]

Difficultés didactiques

$$\begin{aligned} & 6 - x = 9 \\ \Leftrightarrow \quad & -x = 3 \\ \Leftrightarrow \quad & x = -3 \end{aligned}$$

Difficultés didactiques

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Difficultés didactiques

02

"Un même symbole est parfois utilisé pour faire référence à des concepts différents."

POLYSÉMIE

01 Symboles fonctionnels $\times \quad - \quad s_{\text{dans } A' = s_O(A)} \quad \sqrt{\quad} \quad \int \ldots \mathrm{d}x \quad \Sigma$

02 Symboles prédicatifs $< \quad \neq \quad = \quad \in \quad // \quad \geq$

03 Symboles logiques $\wedge \quad \Rightarrow \quad \exists \quad \forall \quad \Leftrightarrow$

04 Constantes $3 \quad 0 \quad \pi \quad e$

05 Variables $L_{\text{dans } A = l \times L} \quad a_{\text{dans } a^2 - b^2} \quad x_{\text{dans } 3x + 1 = 5}$

Difficultés didactiques

$$7 - 3 =$$

$$4 \times 5 =$$

$$24 : 6 =$$

$$a(a - b) =$$

« do something signal »

[Kieran, Knuth *et al.*]

Difficultés didactiques

$$4$$

$$7 - 3 = 4$$

« $7 - 3$ » et « 4 »
sont deux expressions
qui désignent
le même concept

Difficultés didactiques

$$\frac{99}{77} \qquad 9 \times 11$$

$$8 \times 99 \qquad (100 - 1)$$

Les représentations aident à **manipuler** et **appréhender** les concepts

[Duval]

Difficultés didactiques

03

“Des obstacles peuvent naître de l’attribution à un symbole du mauvais rôle.”

ERREUR DE CATÉGORISATION

Difficultés didactiques

01 Plusieurs découpages d’une même expression sont possibles.

02 Un même symbole est parfois utilisé pour faire référence à des concepts différents.

03 Des obstacles peuvent naître de l’attribution à un symbole du mauvais rôle.

Difficultés didactiques

01 AMBIGUÏTÉ DE STRUCTURE

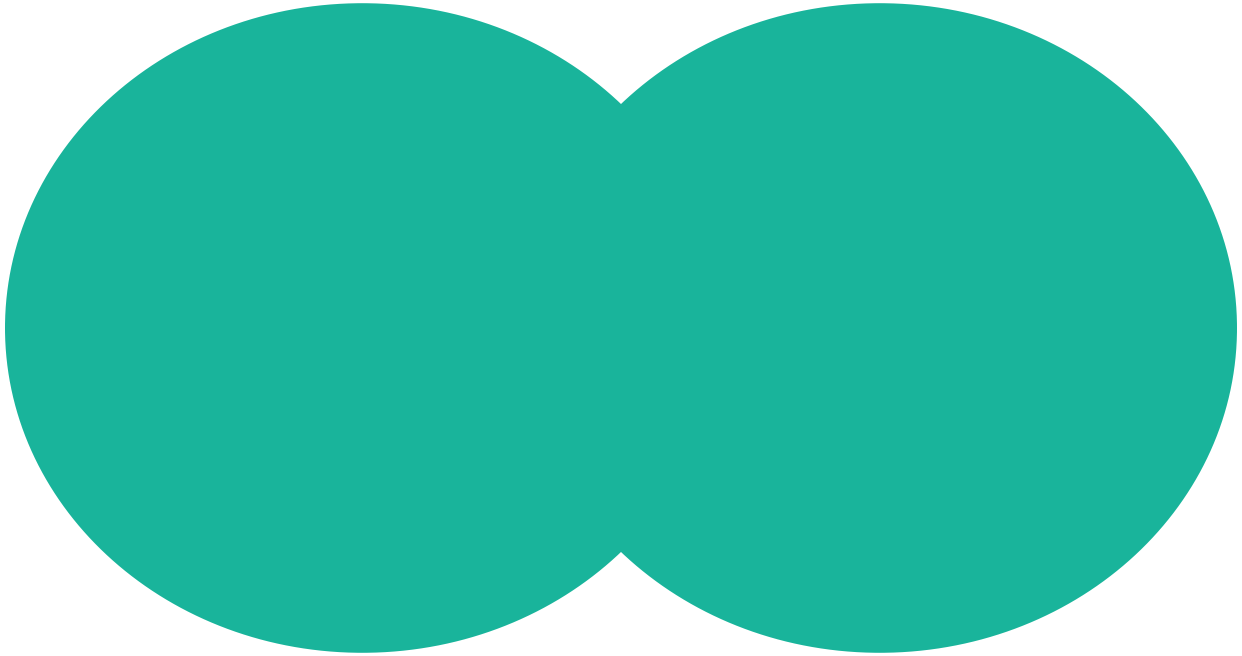
02 POLYSÉMIE

03 ERREUR DE CATÉGORISATION

Conclusion

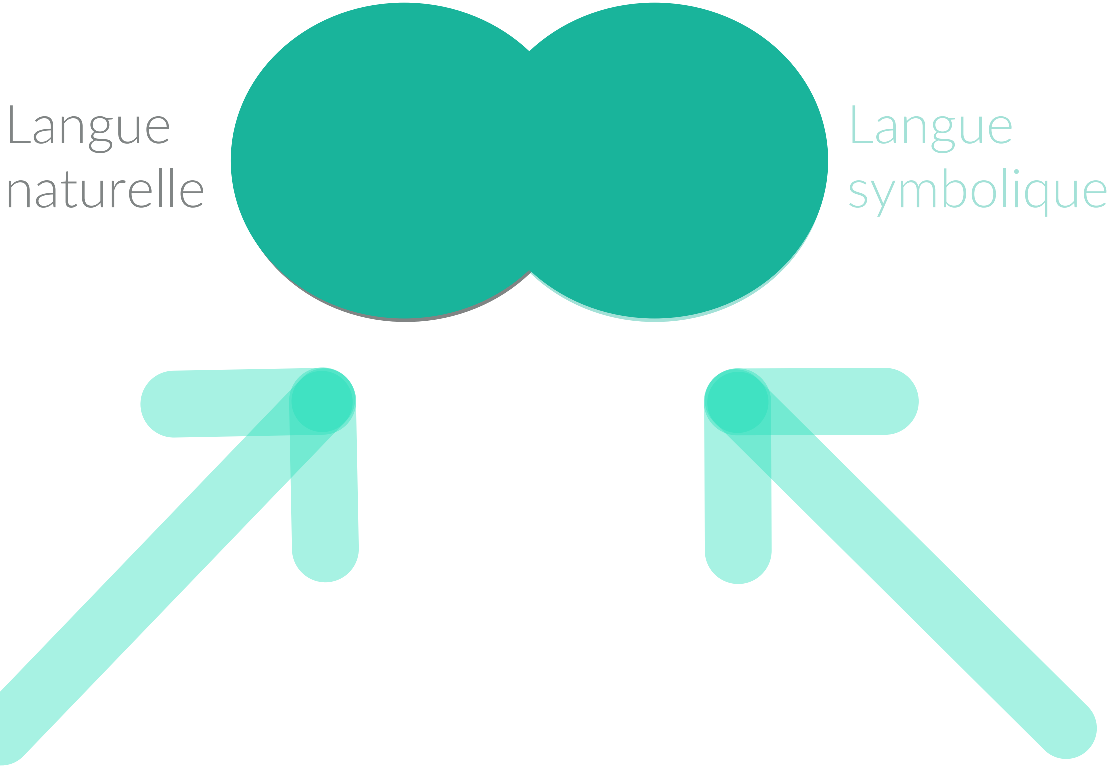
Langue mathématique

Langue naturelle



Langue symbolique

Langue mathématique



Articulations logiques

- Signification
- Identification

Catégories logiques

- Structure
- Polysémie
- Catégorisation

Concepts mathématiques

Langue mathématique

Concepts mathématiques

Langue mathématique

Références

Bouvier A., George M. et Le Lionnais F. *Dictionnaire des mathématiques* (4e édition).Presses Universitaires de France. 1993.

Duval R. *Écarts sémantiques et cohérence mathématique : introduction aux problèmes de congruence*. Annales de didactique et de sciences cognitives, 1 : 7–25. 1988.

Duval R. *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de didactique et de sciences cognitives, 5 : 37–65. 1993.

Kieran C. *Concepts associated with the equality symbol*. Educational Studies in Mathematics, 12(3) : 317–326. 1981.

Knuth E. J., Stephens A. C., McNeil N. M. et Alibali M. W. *Does understanding the equal sign matter ? evidence from solving equations*. Journal for Research in Mathematics Education, 37(4). 2006.

Lamb L., Bishop J., Philipp R., Schappelle B., Whitacre I., and Lewis M., *Developing symbol sense for the minus sign*, Mathematics Teaching in the Middle School 18 (2012), no. 1, 5–9.

Vlassis J. *Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'*, Learning and Instruction 14 (2004), no. 5, 469–484

Vlassis J. *The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization : The case of the minus sign*, Philosophical Psychology 21 (2008), no. 4, 555–570.