Introduction de la formule de résolution de l’équation du deuxième degré à partir du texte d’al-Khwarizmi

al-Khwarizmi

Khiva

783 - 850

Black Sea
Constantinople
BYZANTINE
EMPIRE
ANATOLIA
Caspian Sea
Aral Sea
SĀMĀNIDS
892
KHWAREZM
Bokhara
Samarqand
TĀHIRIDS
820
Marv
R. Oxus
Nishapur
ARMENIA
ADHARBARYJĀN
MESOPOTAMIA
Mosul
Samarra
TABARISTAN
Qumm
KHURĀSĀN
Baghdad
BUWAYHIDS
Isfahan 929
PERSIA
Wasit
KHUZISTAN
SISTAN
Basra
Ubulla
Shiraz
FĀRS
Sirāf
Hormuz
ṢAFFĀRIDS
867
KIRMAN
SIND
R. Indus
Persian Gulf
SPAIN
Toledo
UMAYYADS
738
Cordoba
Granada
Seville
Gibraltar
SARDINIA
Rome
Palermo
SICILY
Syracuse
Mediterranean Sea
CRETE
AGHLABIDS
800
Qayrawān
FĀTIMIDS
909
MAGHRIB
IDRISIDS
788
Alexandria
Cairo
Antioch
Aleppo
Tripoli
SYRIA
HAMDANIDS
944
IRAQ
Damascus
Jerusalem
TŪLŪNIDS
868
EGYPT
FĀTIMIDS
969
HIJĀZ
NAJD
Medina
ARABIA
Mecca
Red Sea
UMAN
R. Nile
AFRICA
NUBIA
YEMEN
ZIYĀRIDS
819
Aden

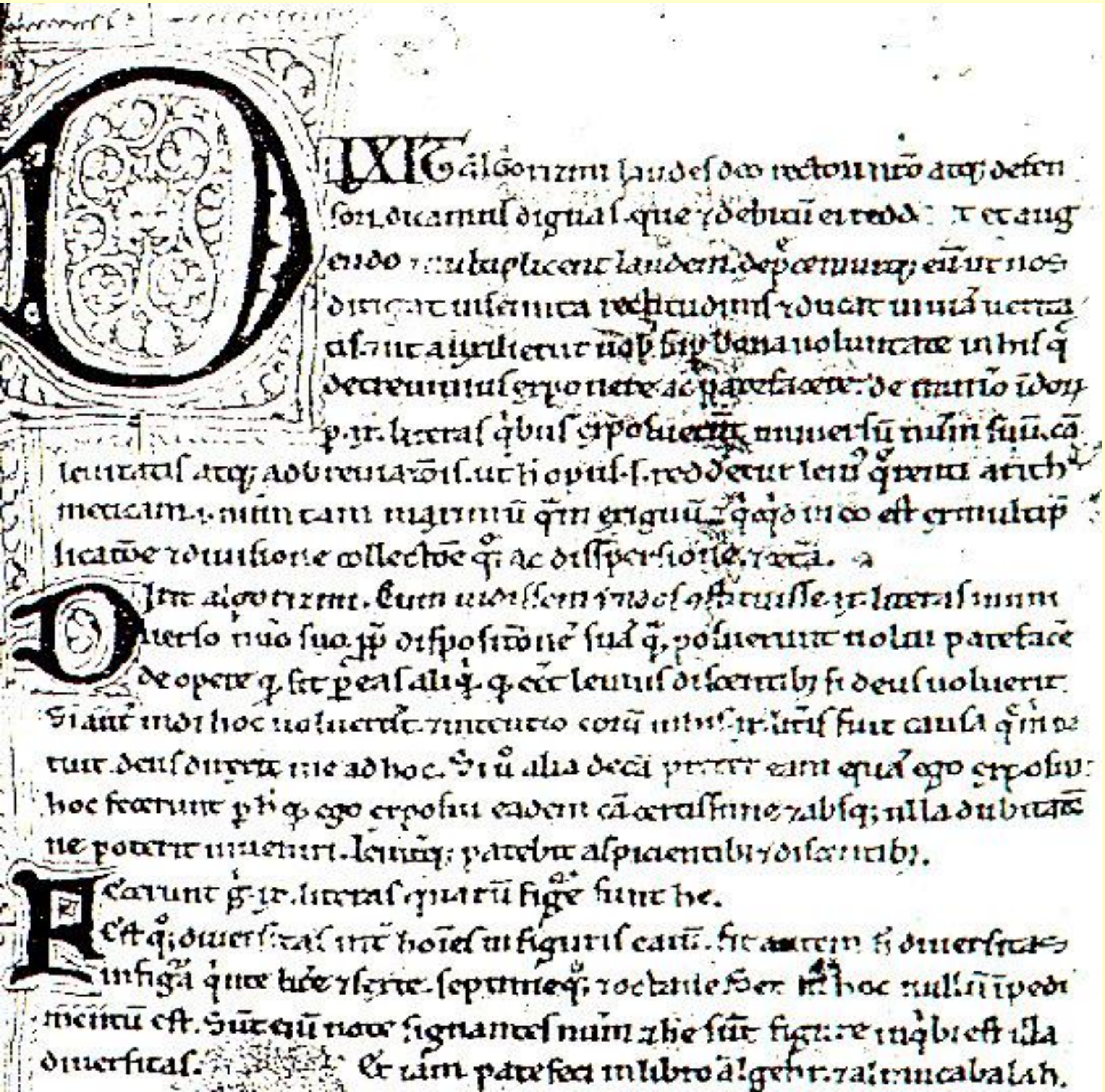
Al- Khwarizmi (vers 780 à 850)

Il compose un opuscule intitulé *al-kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr w-al-muqabala*, ce qui signifie le *Livre sur le calcul par le jabr et la muqabala.*

C'est cet ouvrage qui est considéré comme le texte fondateur de l'algèbre.

Al- Khwarizmi décrit le système de numération des Indiens les opérations de calcul qui s'y rapportent dans le *kitab al-hisab al-hindi* c'est-à-dire le *Livre du calcul indien.* Cet ouvrage ne nous est parvenu que par une traduction latine qui commence par *Dixit Algorismi.*

Première page de *Dixit Algorismi*



Fecerunt igitur ix literas quarum figure sunt he

Première page de

al-kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr w-al-muqabala,

Al- Khwarizmi classe les équations de degré inférieur ou égal à 2 en 6 types.

$$ax^2 = bx$$

$$ax^2 = c$$

$$bx = c$$

Il donne pour chacun des cas un algorithme de résolution et le démontre par des arguments géométriques.

$$ax^2 + bx = c$$

$$ax^2 + c = bx$$

$$ax^2 = bx + c$$

a, b et c sont des nombres stritement positifs.

Jabr et muqabala

Au moyen de ces deux opérations, al-Khwarizmi ramène toutes les équations de degré inférieur ou égal à deux à l'un des six types.

$$2x^2 - 10x + 5 = x^2 + 3x + 7$$

jabr : restauration

$$2x^2 + 5 = x^2 + 13x + 7$$

muqabala : comparaison

$$2x^2 = x^2 + 13x + 2$$

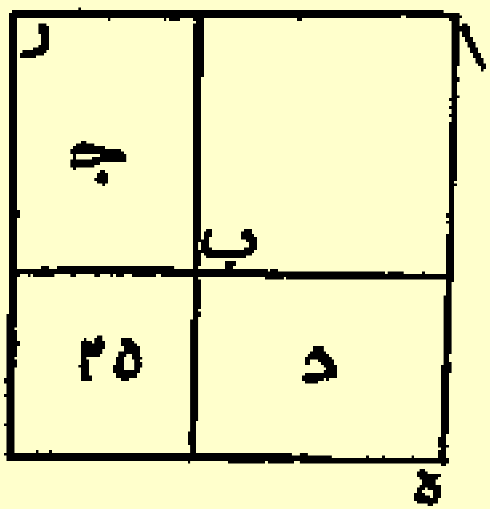
$$x^2 = 13x + 2$$

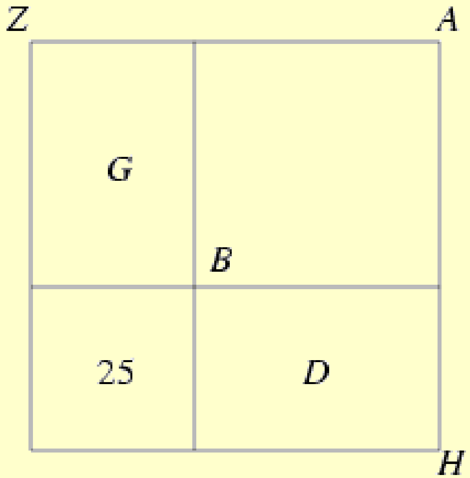
Type $ax^2 = bx + c$

محمّد بن موسى الخوارزمي

الكتاب المختصر
في حساب الجبر و المقابلة

وله ايضا صورة اخري تودي الي هذا وهي سطح اب وهو المال فاردنا ان نزيد عليه مثل عشرة اجذاره فنصفنا العشرة فصارت خمسة فصيرناها سطحين علي جنبتي سطح اب وهما سطحا جد فصار طول كل سطح منهما خمسة اذرع وهو نصف العشرة الاجذار وعرضه مثل ضلع سطح اب فبقيت لنا مربعة من زوايا سطح اب وهي خمسة في خمسة وهي نصف العشرة الاجذار التي زدناها علي جنبتي السطح الاول فعلمنا ان السطح الاول هو المال وان السطحين الذين علي جنبتيه هما عشرة اجذار فذلك كله تسعة وثلثون و بقي الي تمام السطح الاعظم مربعة خمسة في خمسة فذلك خمسة وعشرون فزدناها علي تسعة وثلثين ليتم السطح الاعظم الذي هو سطح ره فبلغ ذلك كله اربعة وستين فاخذنا جذرها وهو ثمانية وهو احد اضلاع السطح الاعظم فاذا نقصنا منه مثل ما زدنا عليه وهو خمسة بقي ثلثة وهو ضلع سطح اب الذي هو المال وهو جذره والمال تسعة وهذه صورته





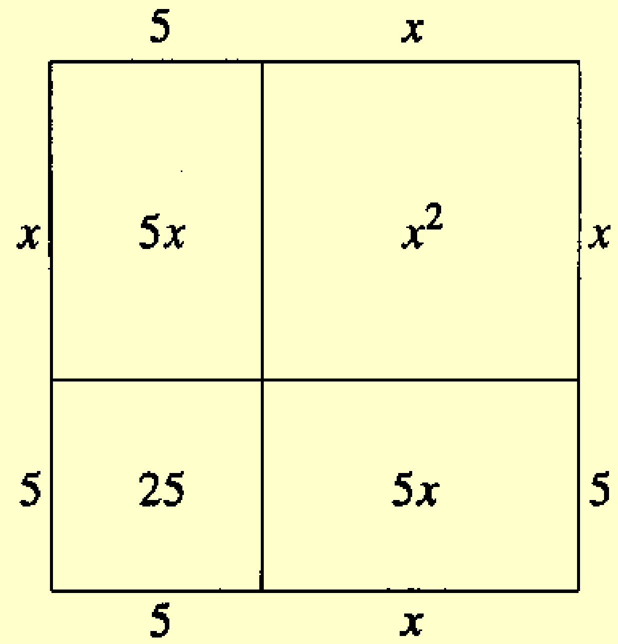
Démonstration du cas « un *mal* et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams. »

Mais il y a aussi une autre figure qui mène à ce résultat, et c’est la surface <carrée> *AB* qui représente le *mal*. Nous voulons lui ajouter l’équivalent de dix de ses racines. Nous avons pris la moitié de ces dix, c’est-à-dire cinq. Nous avons transformé ceci en deux surfaces *G* et *D* sur les flancs de la première surface. La longueur de chacune de ces deux surfaces devient cinq, qui est la moitié des dix racines, et la largeur est comme le côté de la surface *AB*. Il nous reste le carré dans l’angle de la surface *AB*, et c’est cinq par cinq, et <ce cinq> est la moitié des racines que nous avons ajoutée sur les flancs de la première surface.

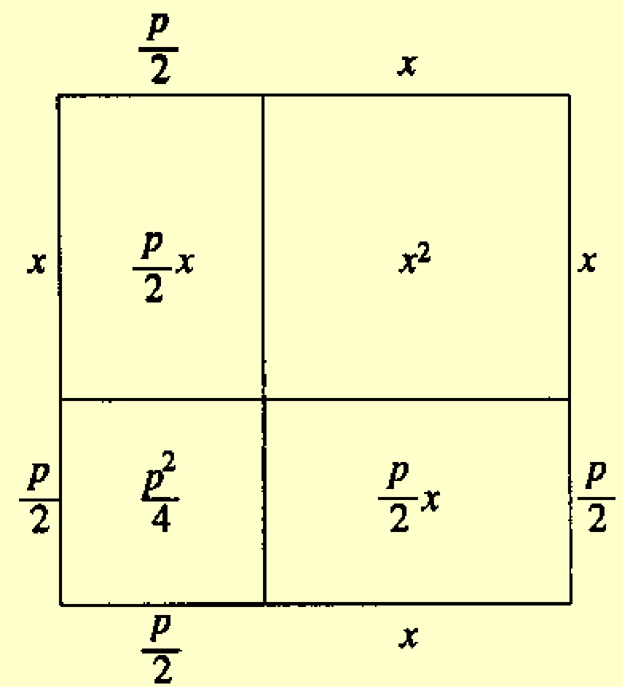
Nous savons que la première surface est le *mal*, et que les deux surfaces qui sont sur ses deux flancs sont les dix racines. Tout cela vaut trente neuf, et il reste pour compléter la surface la plus grande, le carré cinq par cinq, soit vingt-cinq.

Nous l’avons ajouté à trente-neuf pour que la surface la plus grande se complète, c’est la surface *ZH*, et tout cela vaut soixante-quatre. Nous prenons sa racine, huit, et c’est l’un des côtés de la surface la plus grande. Si on lui retranche l’égal de ce que nous lui avons ajouté, à savoir cinq, il reste trois. C’est le côté de la surface *AB*, qui est le *mal*, et c’est sa racine. Et le *mal* est neuf.

$$
\begin{aligned}
x^2 + 10x &= 39 \\
x^2 + 10\,x + 25 &= 39 + 25 \\
x^2 + 10\,x + 25 &= 64 \\
(x+5)^2 &= 64 \\
(x+5) &= 8 \\
x &= 8 - 5 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
x^2 + px &= q \\
x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\
\left(x + \frac{p}{2}\right) &= \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \\
x &= -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}
\end{aligned}
$$



$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a},$$

forme facilement comparable à

$$x^2 + px = q.$$

Il suffit de remplacer p par $\frac{b}{a}$ et q par $\frac{-c}{a}$.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} \quad \text{devient} \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}.$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{et finalement} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

type	équation	solution
(1)	$x^2 + px = q$	$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$
(2)	$x^2 = px + q$	$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$
(3)	$x^2 + q = px$	$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Dans le dernier cas (3), il précise :

si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$, « alors le problème est impossible »,

si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$, « alors la racine du carré est égale à la moitié du nombre des racines, exactement, sans aucune addition ni soustraction ».

Résolution actuelle		Résolution d'AL-ḪWĀRIZMĪ		
équation	solution	équation	type	solution
$x^2 + x - 2 = 0$	$x = 1,\ x = -2$	$x^2 + x = 2$	(1)	$x = 1$
$x^2 - 2x - 3 = 0$	$x = 3,\ x = -1$	$x^2 = 2x + 3$	(2)	$x = 3$
$x^2 - 2x + 1 = 0$	$x = 1$	$x^2 + 1 = 2x$	(3)	$x = 1$
$x^2 - 5x + 6 = 0$	$x = 2,\ x = 3$	$x^2 + 6 = 5x$	(3)	$x = 2,\ x = 3$
$x^2 - x + 7 = 0$	–	$x^2 + 7 = x$	(3)	–
$4x^2 - 8x + 3 = 0$	$x = \frac{1}{2},\ x = \frac{3}{2}$	$x^2 + \frac{3}{4} = 2x$	(3)	$x = \frac{1}{2},\ x = \frac{3}{2}$
$x^2 + 5x + 6 = 0$	$x = -2,\ x = -3$	–	–	–
$x^2 + 2x + 1 = 0$	$x = -1$	–	–	–