

Quelques influences possibles du langage courant sur la compréhension des probabilités

Bao DANG

Séminaire externe du CREM

07/12/2018

1 Contexte

2 L'idée commune
d'événement

3 La notion
technique
d'événement

4 Première
interférence :
logique ou algèbre ?

5 Deuxième
interférence :
temporalité ou
atemporalité ?

6 Conclusion

1 Contexte

1 Contexte

2 L'idée commune d'événement

3 La notion technique d'événement

4 Première interférence : logique ou algèbre ?

5 Deuxième interférence : temporalité ou atemporalité ?

6 Conclusion

Utiliser un langage clair et accessible contribue à un meilleur enseignement.

Le vocabulaire mathématique est technique. De nombreux mots sont extraits du langage courant et sont redéfinis.

Ex. : naturel, carré, racine, rationnel, réel, imaginaire, gauche, continu, ...

In fine, les définitions mathématiques des mots prévalent sur leurs significations et connotations courantes.

1 Contexte

2 L'idée commune d'événement

3 La notion technique d'événement

4 Première interférence : logique ou algèbre ?

5 Deuxième interférence : temporalité ou atemporalité ?

6 Conclusion

Mais insister sur la définition d'un mot ne suffit pas pour effacer, dans les représentations mentales et intuitives des élèves, ses autres connotations.

Au contraire : en général, les élèves mobilisent leurs représentations mentales et non les définitions. (Tall & Vinner 1981, Edwards & Ward 2004.)

« dans l'enseignement, [...] une bonne définition, c'est celle qui est comprise par les élèves. »

(H. Poincaré, *Science et méthode*, 1908.)

1 Contexte

2 L'idée commune d'événement

3 La notion technique d'événement

4 Première interférence : logique ou algèbre ?

5 Deuxième interférence : temporalité ou atemporalité ?

6 Conclusion

En probabilités, de nombreuses études ont été faites sur les préconceptions des élèves, sources de jugements erronés.

(Cf. Savard 2014 pour un panorama synthétique.)

Certaines s'estompent au fil des années, d'autres au contraire pourraient se consolider malgré un enseignement explicite/systématique. (Lecoutre & Fischbein 1998.)

D'où viennent ces préconceptions ?

Piste explorée ici : elles proviennent de la vie courante, en particulier du langage courant.

1 Contexte

**2 L'idée commune
d'événement**

3 La notion
technique
d'événement

4 Première
interférence :
logique ou algèbre ?

5 Deuxième
interférence :
temporalité ou
atemporalité ?

6 Conclusion

2

L'idée commune d'événement

Événement, n. m.

Ce qui arrive et qui a quelque importance pour l'homme.

(*Le Petit Robert*, 2014.)

Ce qui se produit, arrive ou apparaît ; fait, circonstance.

(*Le Petit Larousse*, 2003.)

Tout ce qui se produit, tout fait qui s'insère dans la durée.

(*Trésor de la Langue Française*, 1994.)

Ce qui survient, ce qui arrive, en un temps et en un lieu déterminés.

(*Dictionnaire de l'Académie française*, 9e édition.)

1 Contexte

2 L'idée commune d'événement

3 La notion technique d'événement

4 Première interférence : logique ou algèbre ?

5 Deuxième interférence : temporalité ou atemporalité ?

6 Conclusion

Généralement, dans le discours, un événement se présente sous la forme d'une phrase déclarative.

Sommaire

1 Contexte

2 L'idée commune d'événement

3 La notion technique d'événement

4 Première interférence : logique ou algèbre ?

5 Deuxième interférence : temporalité ou atemporalité ?

6 Conclusion

BONNES NOUVELLES

(VICTOIRES)

Allemagne : la justice stoppe l'agrandissement d'une vaste mine de charbon

08 OCT 2018

EUROPE

ALLEMAGNE

CEST LA LUTTE SOCIALE QUI PRIME

ÉCOLOGIE - LA NATURE A DES DROITS



ACCUEIL



ACTUALITES



CATEGORIES



THEMES



PAYS



NEWSLETTER

La justice allemande a stoppé ce vendredi l'agrandissement controversé d'une énorme mine de charbon, interdisant à l'énergéticien RWE de déboiser la forêt de Hambach tant que le recours sur le fond de ce projet n'aura pas été tranché.

Occupée depuis six ans par des dizaines de militants écologistes, dans ... [Lire la suite](#)

La Suède réussit sa transition énergétique avec 12 ahs d'avance

24 SEPT 2018

EUROPE

SUÈDE

LE JOURNALE POLITIQUE, CA EXISTE!

ÉCOLOGIE - LA NATURE A DES DROITS

En décembre, le pays aura installé assez d'éoliennes pour que sa production électrique propre atteigne l'objectif initialement fixé par le gouvernement pour 2030.

Go green. Pour participer au programme de développement durable de l'ONU, la Suède a rejoint Transforming our world en 2015 et engagé une série de réformes. ... [Lire la suite](#)

Amsterdam inaugure le premier supermarché sans plastique

21 SEPT 2018

EUROPE

FRIS-BAS

SEULES CONTRE TOUS ÉCOLOGIE - LA NATURE A DES DROITS

La particularité du supermarché néerlandais Ekoplaza ? Les emballages des 700 produits qui le composent sont naturels et bio-dégradables.

À première vue, on pourrait croire que les denrées y sont emballées dans du plastique. Erreur : il s'agit en réalité d'un biofilm conçu à partir de végétaux. Il se ... [Lire la suite](#)

La notion courante d'événement est omniprésente en probabilités.

Et c'est normal :

- étudier les événements courants est une motivation et une finalité importantes de la théorie des probabilités,
- jusqu'en 1933 (pendant plus de 4 siècles), il n'y avait pas de définition mathématique d'un événement.

Mais en 1933, Kolmogorov a redéfini la notion d'événement. Sa définition constitue aujourd'hui le cadre théorique de la théorie des probabilités, y compris dans l'enseignement scolaire. (La définition scolaire n'a virtuellement pas changé depuis au moins 1970.)

1 Contexte

2 L'idée commune d'événement

3 La notion technique d'événement

4 Première interférence : logique ou algèbre ?

5 Deuxième interférence : temporalité ou atemporalité ?

6 Conclusion

Dans l'enseignement, il y a cohabitation entre les sens courant et technique du mot « événement », qui se mélangent allègrement.

Or, il y a des différences importantes entre ces deux sens. Il y a donc un risque d'interférence.

1 Contexte

2 L'idée commune
d'événement

**3 La notion
technique
d'événement**

4 Première
interférence :
logique ou algèbre ?

5 Deuxième
interférence :
temporalité ou
atemporalité ?

6 Conclusion

3

La notion technique d'événement

Soit une expérience aléatoire et Ω l'ensemble de ses issues possibles.

Ex. : lors d'un jet de dé, une issue possible est un nombre naturel entre 1 et 6.

Définition

Un ÉVÉNEMENT est un sous-ensemble de Ω .

(Kolmogorov, *Fondements de la théorie des probabilités*, 1933.)

Ex. : lors d'un jet de dé, $\{1, 2, 5\}$ est un ÉVÉNEMENT.

(Événement courant vs. ÉVÉNEMENT technique)

Le cadre théorique est celui de la théorie de la mesure (Borel, Fréchet, Lebesgue). L'idée décisive consiste à voir une probabilité comme une *mesure* d'un certain type. La théorie s'est révélée incontournable dans le cas où Ω est infini.

L'objectif de Kolmogorov était de rendre la théorie des probabilités *complètement* mathématique, indépendante du monde réel.

« Ce que les [sous-ensembles de Ω] représentent n'est d'aucune importance [...]. [Ils] ne sont généralement que des événements idéaux auxquels rien ne correspond dans le monde extérieur. »

(*Ibid.*, pp. 1 et 17.)

1 Contexte

2 L'idée commune d'événement

3 La notion technique d'événement

4 Première interférence : logique ou algèbre ?

5 Deuxième interférence : temporalité ou atemporalité ?

6 Conclusion

La cadre théorique de Kolmogorov est celui de l'enseignement depuis au moins 1970. Mais aujourd'hui, en pratique, il est très peu mobilisé : l'idée courante d'événement prévaut.

Instructions délicates du programme :

- « Identifier “expérience aléatoire, catégorie d'épreuve, événements” dans un énoncé »
(Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques, 2015),
- « Le vocabulaire doit être défini de façon rigoureuse et utilisé à bon escient dans la résolution des problèmes »
(Programme de la FWB, 2015).

1 Contexte

2 L'idée commune d'événement

3 La notion technique d'événement

4 Première interférence : logique ou algèbre ?

5 Deuxième interférence : temporalité ou atemporalité ?

6 Conclusion

1 Contexte

2 L'idée commune
d'événement

3 La notion
technique
d'événement

4 Première
interférence :
logique ou algèbre ?

5 Deuxième
interférence :
temporalité ou
atemporalité ?

6 Conclusion

4

Première interférence : logique ou algèbre des événements ?

Les événements courants se présentent sous la forme de phrases déclaratives, ou *propositions*. Celles-ci sont soumises à une logique (avec les connecteurs « et », « ou », « non », ...).

Par contre, les ÉVÉNEMENTS sont des ensembles et sont soumis à une algèbre (avec les opérations ensemblistes $\cup$, $\cap$, ...).

Si i désigne l'issue d'une expérience aléatoire, il y a une correspondance bien connue entre les propositions sur i et les sous-ensembles de Ω .

On dira que $A \subseteq \Omega$ est l'*extension* d'une proposition $\alpha(i)$ lorsque

$$A = \{i \in \Omega \mid \alpha(i)\}.$$

Ex. : lors d'un jet de dé, $\{2, 4, 6\}$ est l'extension de la proposition « i est pair ».

Supposons que A et B soient les extensions de $\alpha(i)$ et $\beta(i)$. Alors :

$A \cap B$ est l'extension de $\alpha(i)$ et $\beta(i)$,

$A \cup B$ est l'extension de $\alpha(i)$ ou $\beta(i)$,

$\Omega \setminus A$ est l'extension de non $\alpha(i)$.

Il y a donc une correspondance entre la logique des événements et l'algèbre des ÉVÉNEMENTS correspondants.

Trois remarques :

- la correspondance permet de traduire la logique des événements (et des propositions) en une algèbre d'ensembles, c.-à-d. de *calculer* avec des propositions (programme initié par G. Boole, *The Laws of Thought*, 1854),
- la correspondance n'est pas bijective : plusieurs propositions peuvent avoir la même extension (ex. : « i est pair » et « $i - 1$ divise 15 » lors d'un jet de dé),
- il n'est pas toujours facile de trouver une caractérisation concise d'un ensemble (ex. : $\{1, 2, 5\}$ lors d'un jet de dé).

1 Contexte

2 L'idée commune d'événement

3 La notion technique d'événement

4 Première interférence : logique ou algèbre ?

5 Deuxième interférence : temporalité ou atemporalité ?

6 Conclusion

Cette correspondance est-elle évidente pour les élèves ?

Dans l'enseignement, elle est généralement éludée :

« L'événement (A ou B), noté aussi $(A \cup B)$, est l'événement qui se réalise si et seulement si A ou B ou les deux se réalisent. [...]

Si A et B sont des événements quelconques, alors
 $P(A \text{ ou } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ et } B)$. »

(CQFD Maths 6^e, 4 périodes/semaine, 2018.)

A-t-on besoin de la machinerie ensembliste ?

Pour une initiation basique aux probabilités, peut-être pas :

il est possible d'adopter un cadre théorique pour le calcul élémentaire des probabilités sans mobiliser directement des notions ensemblistes.

Pour un cours qui prépare à des notions probabilistes plus avancées, peut-être bien :

en effet, les aspects ensemblistes

- ouvrent à des techniques calculatoires intéressantes,
- permettent la généralisation de concepts,
- permettent de comprendre en profondeur les axiomes des probabilités.

1 Contexte

2 L'idée commune
d'événement

3 La notion
technique
d'événement

4 Première
interférence :
logique ou algèbre ?

5 Deuxième
interférence :
temporalité ou
atemporalité ?

6 Conclusion

5

Deuxième interférence : temporalité et causalité ?

Rappelons l'idée courante d'

Événement, n. m.

Tout ce qui se produit, tout fait qui s'insère dans la durée.

(*Trésor de la Langue Française*, 1994.)

Ce qui survient, ce qui arrive, en un temps et en un lieu
déterminés.

(*Dictionnaire de l'Académie française*, 9^e édition.)

Deux aspects notables :

- **Temporalité (et spatialité) des événements :**
les événements s'inscrivent dans le temps et dans l'espace. Pour être différents, deux événements doivent :
 - soit se produire à des endroits différents,
 - soit se produire à des moments différents.

Conséquence : en un lieu précis donné, les événements *se succèdent dans le temps* (cf. aussi la théorie de la relativité).

- **Causalité entre les événements :**
un événement *A* ne peut influencer un autre événement *B* que si *A* précède *B* dans le temps.

(Cf. Boisset 2006 pour une passionnante analyse étymologique du mot « événement ».)

1 Contexte

2 L'idée commune d'événement

3 La notion technique d'événement

4 Première interférence : logique ou algèbre ?

5 Deuxième interférence : temporalité ou atemporalité ?

6 Conclusion

Tout change avec la notion technique d'ÉVÉNEMENT !

– **Atemporalité des ÉVÉNEMENTS :**

toute expérience aléatoire, à l'endroit et à l'instant précis de sa réalisation, se solde par la réalisation de *plusieurs ÉVÉNEMENTS différents* : tous ceux qui contiennent l'issue réalisée.

Ex. : lors d'un jet de dé qui donne un 2, les événements {2}, {1, 2, 3}, {2, 5}, {2, 4, 5, 6}, ... sont réalisés.

Il n'existe aucune relation de succession temporelle entre les ÉVÉNEMENTS.

– **Absence de causalité entre les ÉVÉNEMENTS :**

les ÉVÉNEMENTS étant des objets mathématiques purs, il n'y a aucun lien de causalité entre eux.

Or, il est tentant de penser les ÉVÉNEMENTS comme s'ils étaient soumis à une temporalité et une causalité, par extrapolation involontaire à partir des événements courants.

1 Contexte

2 L'idée commune d'événement

3 La notion technique d'événement

4 Première interférence : logique ou algèbre ?

5 Deuxième interférence : temporalité ou atemporalité ?

6 Conclusion

5.1 Impact sur la notion de probabilité conditionnelle

$P(A|B)$ se lit fréquemment « la probabilité que A se réalise sachant que B s'est réalisé ». Cette phrase semble donc dire que B s'est réalisé *avant* A .

Il y a un risque de confusion sur $P(A|B)$ si B semble se réaliser *après* A (« Falk phenomenon »).

Ce type de confusion se *consolide* avec le temps.

Cas d'étude :

Une urne contient ○○●●.

Variante 1 :

- (1) Je pioche une boule ; je la regarde : elle est blanche.
- (2) Sans remise, je pioche une deuxième boule.

Quelle est la probabilité que la deuxième boule soit blanche ? (Réponse : $1/3$.)

Variante 2 :

- (1) Je pioche une boule ; je l'écarte sans la regarder.
- (2) Sans remise, je pioche une deuxième boule ; je la regarde : elle est blanche.

Quelle est la probabilité que la première boule soit blanche ?

[1 Contexte](#)[2 L'idée commune d'événement](#)[3 La notion technique d'événement](#)[4 Première interférence : logique ou algèbre ?](#)[5 Deuxième interférence : temporalité ou atemporalité ?](#)[6 Conclusion](#)

5.2 Impact sur la notion d'indépendance

Définition : deux ÉVÉNEMENTS A et B sont (*stochastiquement*) *indépendants* ssi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Mais il y a une confusion fréquente entre indépendance stochastique et indépendance causale, où

« Définition » : deux événements sont causalement indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur les modalités de réalisation de l'autre.

Cas d'étude : On a un paquet de 52 cartes.

Variante 1 :

- (1) Je tire une 1^{ère} carte, je la regarde puis la remets.
- (2) Je tire une 2^e carte.

Variante 2 :

- (1) Je tire une 1^{ère} carte, je la regarde et ne la remets pas.
- (2) Je tire une 2^e carte.

Variante 3 :

- (1) Je tire une 1^{ère} carte et je la regarde. J'enlève du paquet toutes les cartes de même couleur (♣, ♦, ♥ ou ♠).
- (2) Je tire une 2^e carte.

L'événement « la 2^e carte est une figure » dépend-il de l'événement « la 1^{ère} carte est un cœur » ?

1 Contexte

2 L'idée commune d'événement

3 La notion technique d'événement

4 Première interférence : logique ou algèbre ?

5 Deuxième interférence : temporalité ou atemporalité ?

6 Conclusion

1 Contexte

2 L'idée commune
d'événement

3 La notion
technique
d'événement

4 Première
interférence :
logique ou algèbre ?

5 Deuxième
interférence :
temporalité ou
atemporalité ?

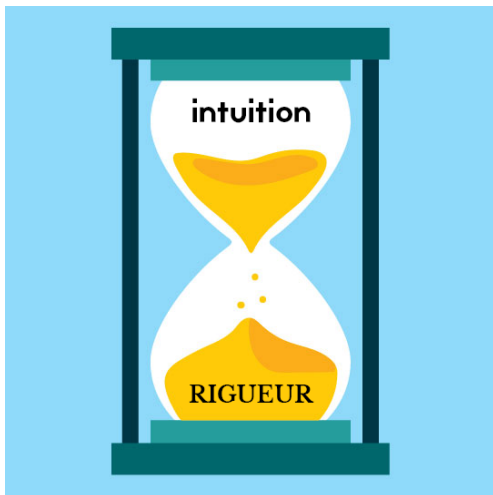
6 Conclusion

6

Conclusion

« La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. »

(Poincaré, *Science et méthode*, 1908.)



Sommaire

- 1 Contexte
- 2 L'idée commune d'événement
- 3 La notion technique d'événement
- 4 Première interférence : logique ou algèbre ?
- 5 Deuxième interférence : temporalité ou atemporalité ?
- 6 Conclusion

Quelques références choisies :

E. Boisset, « Aperçu historique sur le mot événement », dans *Que m'arrive-t-il ? Littérature et événement* [en ligne], Presses universitaires de Rennes, 2006 (généré le 07 décembre 2018).

G. Boole, *An Investigation of The Laws of Thought on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, 1854.

B. Courtebras, *Socialisation et performances mathématiques*, Thèse de doctorat, Université Lumière–Lyon–II, 2005.

B. S. Edwards, M. B. Ward, « Surprises from Mathematics Education Research : Student (Mis)use of Mathematical Definitions », *The American Mathematical Monthly*, Vol. 111, n° 5, 2004, pp. 411–424.

R. Falk, « Conditional Probabilities : Insights and Difficulties », *Proceedings of the 2nd International Conference on Teaching Statistics*, 1986.

A. N. Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability*, 1933.

M.-P. Lecoutre, E. Fischbein, « Évolution avec l'âge de "misconceptions" dans les intuitions probabilistes en France et en Israël », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18, n° 3, pp. 311–331, 1998.

A. Savard, « Developing Probabilistic Thinking : What About People's Conceptions ? », dans E. J. Chernoff, B. Sriraman (éds.), *Probabilistic Thinking*, Advances in Mathematics Education, Springer, 2014.

D. Tall, S. Vinner, « Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity », *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 12, n° 2, pp. 151–169.

[1 Contexte](#)[2 L'idée commune d'événement](#)[3 La notion technique d'événement](#)[4 Première interférence : logique ou algèbre ?](#)[5 Deuxième interférence : temporalité ou atemporalité ?](#)[6 Conclusion](#)