Esquisse d'un système de définitions pour une théorie élémentaire des probabilités

Bao Dang

Ce document accompagne l'exposé intitulé *Quelques influences possibles du langage courant sur la compréhension des probabilités*, donné au Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM asbl) le vendredi 07/12/2018 (voir la page web : `https://www.crem.be/seminaire/2018-12-07`).

Les définitions qui suivent ne constituent pas un système axiomatique rigoureusement formalisé. Elles servent seulement à délimiter un cadre théorique (et lexical) dans lequel une étude basique des probabilités pourrait être menée. En un sens, ce qui suit n'est pas le noyau d'un cours mais plutôt un glossaire auquel on pourrait faire appel en cas de besoin.

Ce cadre théorique est avant tout conçu à l'attention de l'enseignant qui souhaiterait justifier des affirmations avec une certaine rigueur, sans devoir nécessairement mobiliser le cadre ensembliste standard. Cela dit, notre souhait a été, le plus possible, de rendre ces définitions accessibles aux élèves.

1 Définitions, notations et axiomes

Nous nous intéresserons à des *expériences aléatoires*, c'est-à-dire des processus ou des manipulations qui aboutissent à une issue imprévisible (un jet de dé, un tirage de cartes, le choix arbitraire d'un individu dans une population, etc.). Chaque issue correspond à une *alternative* possible : toute expérience ne peut aboutir qu'à *une seule* issue parmi toutes les alternatives possibles. De façon générale, on pourrait dire qu'une issue est un trait observable que nous choisissons de considérer. Par exemple, lors d'un jet de dé, l'issue standard est le nombre qui apparaît sur la face supérieure.

Notation. Lors d'une expérience aléatoire, l'ensemble des issues possibles sera noté Ω. (Chacun pourrait le nommer comme bon lui semble : univers, catégorie d'épreuves, ...)

Définiton. Lors d'une expérience aléatoire, un *évènement* est le fait que l'issue de l'expérience possède une propriété donnée. Dans le discours, un évènement se présentera sous la forme d'une affirmation portant sur le résultat de l'expérience.

> Ex. : lors d'un jet de dé, voici des exemples d'évènements : (le résultat est 6), (le résultat est pair), (le résultat est 1 ou 3), (le résultat est pair et premier), etc.

Notation. De façon générale, nous noterons un évènement par une lettre majuscule ou par une expression entre parenthèses.

Remarque. Dans la suite, Ω sera supposé fini. Cela sera suffisant pour étudier les premiers phénomènes aléatoires, comme les lancers de dés, les tirages de cartes ou tout phénomène de la vie courante ayant un nombre fini d'issues.

Définition. Une issue est *favorable à* un évènement si son obtention provoque la réalisation de l'évènement.

> Ex. : lors d'un jet de dé, l'issue 6 est favorable à l'évènement (le résultat est pair).

Remarque. Le sens des connecteurs logiques, lorsqu'ils sont appliqués aux évènements, est fourni comme suit.
- Une issue est favorable à (A et B) si son obtention provoque la réalisation de A et celle de B.
- Une issue est favorable à (A ou B) si son obtention provoque la réalisation de A, ou celle de B, ou celle des deux.
- Une issue est favorable à (non A) si elle n'est pas favorable à A. L'évènement (non A) est appelé évènement *contraire* (ou *complémentaire*) de A.

La notion suivante, inexistante dans le système ensembliste de Kolmogorov, se révèle essentielle ici. Elle est symptomatique du caractère logique des raisonnements sur les évènements.

Définition. Deux évènements sont *équivalents* s'ils admettent exactement les mêmes issues favorables.

> Ex. : lors d'un jet de dé, l'évènement (le résultat est pair) est équivalent à (le résultat moins un est un diviseur de 15).

Définition. Un évènement est *élémentaire* s'il n'admet qu'une seule issue favorable. Dans ce cas, il est équivalent à (le résultat est i) où i est l'issue favorable en question.

> Ex. : lors d'un jet de dé, l'évènement (le résultat est pair et premier) est élémentaire car sa seule issue favorable est 2 ; il est donc équivalent à (le résultat est 2).

Définition. Un évènement A est *composé* s'il admet plusieurs issues favorables. On dira que les évènements de la forme (le résultat est i), où i est l'une des issues favorables à A, *composent* l'évènement A.

> Ex. : lors d'un jet de dé, l'évènement composé (le résultat est impair et premier) est composé des évènements (le résultat est 3) et (le résultat est 5).

Définition. Un évènement A est *certain* si toutes les issues possibles sont des issues favorables à A. C'est donc un évènement qui se produit toujours.

Définition. Un évènement A est *impossible* s'il n'admet aucune issue favorable. C'est donc un évènement qui ne se produit jamais.

Définition. Deux évènements A et B sont *incompatibles* s'ils n'ont aucune issue favorable commune.

Remarque. Deux évènements élémentaires A et B sont soit équivalents, soit incompatibles.

Axiomes. La *probabilité* d'un évènement A est un nombre noté $P(A)$ tel que :
1. $0 \leq P(A) \leq 1$ quel que soit l'évènement A,
2. si A est un évènement certain, alors $P(A) = 1$,
3. si A et B sont incompatibles, alors $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$.

2 Quelques propriétés élémentaires et leur démonstration

Des définitions et axiomes qui précèdent, s'ensuivent en principe toutes les propriétés usuelles des probabilités pour un ensemble Ω fini. Les démonstrations qui suivent ne font appel à aucune considération ensembliste, mais mobilisent de façon essentielle l'appréhension logique des évènements. En un sens, elles constituent de bons exercices de logique...

Propriété. Si A et B sont équivalents, alors $P(A) = P(B)$.

On pourrait considérer que c'est évident. Mais il est toujours possible de le démontrer. En effet, remarquons d'abord que A et B ont exactement les mêmes issues défavorables. Appelons alors C l'évènement (le résultat est l'une des issues défavorables à A, ou à B). Il est clair que A et C sont incompatibles, de même que B et C. De plus, (A ou C) et (B ou C) sont certains. Par conséquent :

$$P(A) + P(C) = P(A \text{ ou } C) = 1 = P(B \text{ ou } C) = P(B) + P(C),$$

d'où l'on tire que $P(A) = P(B)$.

Propriété. Si A est un évènement impossible, alors $P(A) = 0$.

En effet, un évènement impossible A est incompatible avec tout autre évènement B. De plus, (A ou B) est équivalent à B. On a donc :

$$P(B) = P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B),$$

d'où l'on tire que $P(A) = 0$.

Propriété. La probabilité d'un évènement A est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le composent.

En effet, si A est composé des évènements (le résultat est i_1), ..., (le résultat est i_k), alors il est équivalent à l'évènement (le résultat est i_1 ou ... ou le résultat est i_k). Par conséquent :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\text{le résultat est } i_1 \text{ ou ... ou le résultat est } i_k) \\ &= P(\text{le résultat est } i_1) + \ldots + P(\text{le résultat est } i_k). \end{aligned}$$

Propriété. Si l'on considère que tous les évènements élémentaires sont équiprobables, alors si A est élémentaire, $P(A) = 1/n$ où n est le nombre d'issues possibles.

En effet, si l'on note i_1, ..., i_n les n les issues possibles, et si p désigne la (constante) probabilité de toute évènement élémentaire, on a que :

$$\begin{aligned} 1 &= P(\text{le résultat est } i_1 \text{ ou ... ou le résultat est } i_n) \\ &= P(\text{le résultat est } i_1) + \ldots + P(\text{le résultat est } i_n) \\ &= np, \end{aligned}$$

d'où l'on tire que $p = 1/n$.

Propriété. Si l'on considère que tous les évènements élémentaires sont équiprobables, alors

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre d'issues possibles}}.$$

En effet, on sait maintenant que :

$$P(A) = P(\text{le résultat est } i_1) + \ldots + P(\text{le résultat est } i_k),$$

où les i_1, ..., i_k sont les issues favorables à A. Mais comme les évènements élémentaires ont tous la même probabilité $1/n$ en vertu de la propriété précédente,

$$P(A) = k\frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre d'issues possibles}}.$$