Quand la forme d'un théorème détermine son fond : éléments d'analyse

Question 1 : la notion de réciproque, le connecteur d'implication

- La réciproque d'une implication $A \Rightarrow B$ est $B \Rightarrow A$.
- Mais un théorème possède généralement une formulation plus complexe. Fréquemment, il est quantifié et l'antécédent de l'implication peut être détaché de celle-ci pour former/intégrer le *contexte* du théorème, ce qui rend alors invisible l'implication en question.
  $\forall x : A(x) \Rightarrow B(x)$ est équivalent à $\forall x$ tel que $A(x) : B(x)$.
- Un théorème possède donc virtuellement plusieurs formulations équivalentes, en fonction du choix de son contexte. Ce choix a-t-il un impact sur la signification perçue du théorème ?

Question 2 : la formulation d'un théorème et la temporalité du discours

- Il n'est pas toujours évident d'énoncer la réciproque d'une implication $A \Rightarrow B$ lors que B n'est bien défini que sous la condition que A est vrai. En effet : la permutation des deux termes rendrait B mal défini. Le discours mathématique possède donc une forme de temporalité.
- Cela se voit en prenant la contraposée de l'implication, censée lui être équivalente et pourtant mal définie.

Question 3 : la notion de réciproque partielle

Selon le choix du contexte, un même théorème peut admettre plusieurs formulations, chacune s'accompagnant de sa propre réciproque partielle. Un « même » théorème peut donc admettre plusieurs réciproques différentes !

Question 4 : les réciproques partielles ne sont pas équivalentes

- Un théorème de la forme

  $$\forall x \text{ tel que } H(x) : A(x) \Rightarrow B(x)$$

  peut décrire, intuitivement, le phénomène suivant : dans une situation où $H(x)$ est invariablement vrai, l'antécédent $A(x)$ peut être vrai ou faux, et à chaque fois qu'il est vrai, $B(x)$ est vrai également. L'extension de la propriété H, c.-à-d. l'ensemble des objets qui satisfont H, peut être vu comme le domaine des objets sur lequel porte le théorème, c.-à-d. son champ d'application.
- Par conséquent, en changeant le contexte d'un théorème (par exemple, en permutant $A(x)$ et $H(x)$), on change subtilement son champ d'application, ainsi que le phénomène intuitif qu'il décrit, ce qui transparaît dans l'indépendance logique entre les réciproques (partielles). En l'occurrence, l'une peut être vraie et l'autre fausse.