

Quand la forme d'un théorème détermine son fond

Résumé

Dans cet atelier, la notion de réciproque nous servira d'outil pour explorer la signification fine des théorèmes. L'objectif sera de mettre en évidence l'impact, parfois subtil, de la formulation d'un théorème sur son interprétation.

Question 1

Que répondre à un élève qui demande : « Qu'est-ce que la réciproque d'un théorème ? »

Question 2

1. Formuler le théorème de Pythagore et sa réciproque de façon conforme à la réponse donnée ci-dessus.
2. La proposition suivante est bien connue :

Proposition

Si deux triangles sont semblables, alors leurs côtés homologues sont de longueurs proportionnelles.

Il est également bien connu que sa réciproque est vraie puisqu'il s'agit d'un critère de similitude pour deux triangles. Une formulation courante est la suivante :

Réciproque (cas de similitude CCC)

Si deux triangles ont leurs côtés homologues de longueurs proportionnelles, alors ces triangles sont semblables.

(Astro-math 3, p. 211.)

Mais comment appliquer ceci au cas de deux triangles dont on ignore s'ils sont semblables ou pas (ce qui est précisément l'intérêt de cette réciproque) ? Que signifie « homologues » ?

Question 3

Considérons le théorème bien connu suivant :

Théorème :

Tout angle inscrit dans un cercle et interceptant un diamètre du cercle est un angle droit.

Voici deux autres propriétés mathématiques bien connues :

Proposition 1 :

Tout angle droit inscrit dans un cercle intercepte un diamètre du cercle.

Proposition 2 :

Tout angle droit qui intercepte un diamètre d'un cercle est inscrit dans ce cercle.

L'une de ces deux propositions est-elle la réciproque du théorème ?

Question 4

Soient un segment $[BC]$ contenant un point P , et A un point extérieur à $[BC]$. On considère le triangle ABC .

Problème A

En admettant que P est le milieu de $[BC]$, que peut valoir l'angle \widehat{BAC} pour que $|AP| = |BC|/2$? Quel théorème permet de justifier la réponse? La réciproque est-elle vraie?

Problème B

En admettant que l'angle \widehat{BAC} vaut 90° , où peut-on placer le point P pour que $|AP| = |BC|/2$? Quel théorème permet de justifier la réponse? La réciproque est-elle vraie?