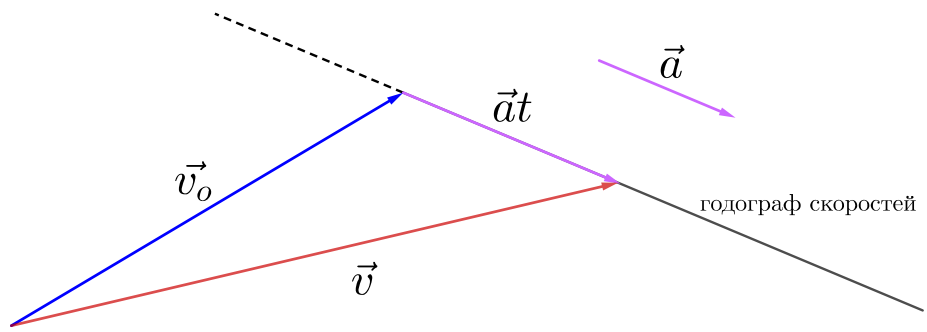
# Годограф скоростей в центральном поле сил

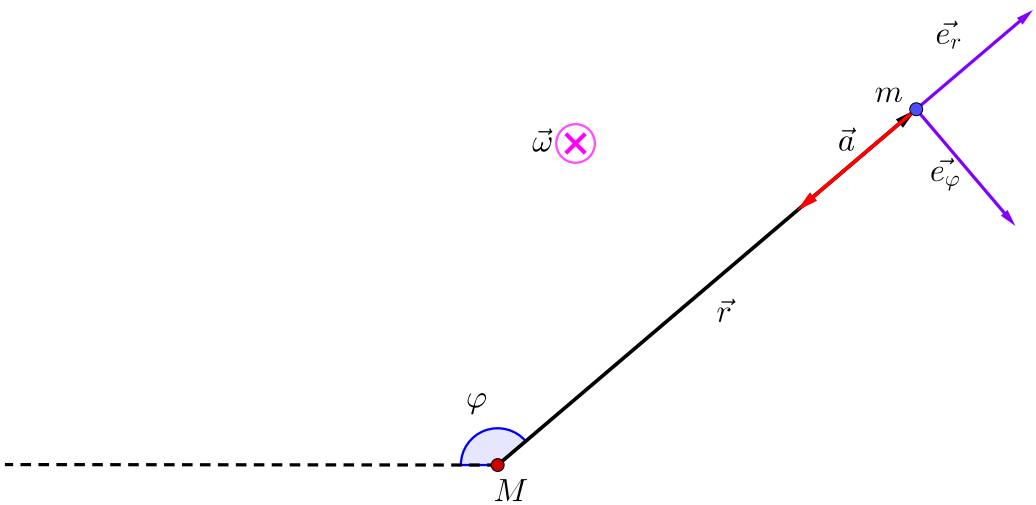
Проанализируем **годограф скоростей** при движении по кеплеровым орбитам в центральном поле сил. Фактически годограф – это некоторая кривая, которая показывает все возможные значения некоторой векторной величины в течение какого-то процесса. В качестве примера для равноускоренного движения годограф скоростей – это прямая. Это достаточно просто проиллюстрировать, так как для равномерного движения:

$$\vec{v} = \vec{v_o} + \vec{a}t \tag{1}$$

Визуализируем уравнение (1):




Теперь перейдём к анализу годографа скоростей для Кеплеровых орбит. Пусть у нас есть некоторый центр притяжения $M$ и спутник $m$. Для удобства запишем их потенциальную энергию взаимодействия как $U = -\dfrac{\alpha}{r}$ (для гравитации $\alpha_g = GMm$, а для электростатического взаимодействия $\alpha_E = kQq$). Тогда понятно, что для наших обозначений сила взаимодействия $F = \dfrac{\alpha}{r^2}$ или в векторном виде $\vec{F} = -\dfrac{\alpha}{r^3}\vec{r}$. Также введём $\vec{\omega}$ – угловую скорость вращения $\vec{r}$ и единичные векторы вдоль и перпендикулярно радиус-вектору (орты) $\vec{e_r}$ и $\vec{e_\phi}$.




Сразу заметим, что для ортов, как для векторов постоянной длины, которые вращаются вместе с $\vec{r}$, справедливо следующее соотношение:

$$\dot{\vec{e_i}} = [\vec{\omega} \times \vec{e_i}] \tag{2}$$

Запишем момент импульса $m$ относительно $M$ в следующей форме:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = mr^2\vec{\omega} = const \tag{3}$$

Запишем второй закон Ньютона для $m$:

$$m\vec{a} = -\frac{\alpha}{r^3}\vec{r} \xRightarrow{\vec{r}=\vec{e_r}r} \vec{a} = -\frac{\alpha}{mr^2}\vec{e_r} \Bigg| \times \vec{L}$$

$$\left[\vec{a} \times \vec{L}\right] = \left[-\frac{\alpha}{mr^2}\vec{e_r} \times mr^2\vec{\omega}\right] = \alpha\left[\omega \times \vec{e_r}\right]$$

С учётом (2) получаем:

$$\left[\vec{a} \times \vec{L}\right] = \alpha\dot{\vec{e_r}}$$

$$\left[\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{L}\right] = \alpha\frac{d\vec{e_r}}{dt}$$

$$\int\left[d\vec{v} \times \vec{L}\right] = \int \alpha\, d\vec{e_r}$$

Возьмём неопределённый интеграл, объединяя константы:

$$\left[\vec{v} \times \vec{L}\right] = \alpha\vec{e_r} + \vec{C} \Bigg| \times \vec{L}$$

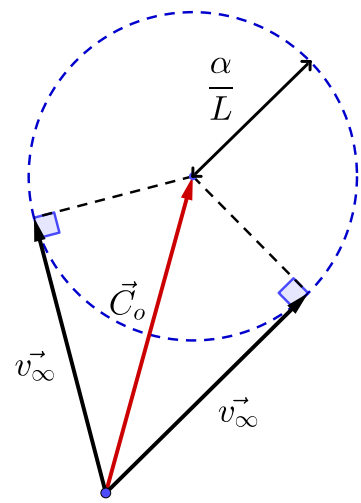
$$\left[\vec{L} \times \left[\vec{v} \times \vec{L}\right]\right] = \alpha \left[\vec{L} \times \vec{e_r}\right] + \left[\vec{L} \times \vec{C}\right]$$

Заметим, что $\left[\vec{a} \times \left[\vec{b} \times \vec{a}\right]\right] = a^2\vec{b}$ (если $\vec{a} \perp \vec{b}$) и что, фактически $\alpha \left[\vec{L} \times \vec{e_r}\right] = L\vec{e_\varphi}$:

$$L^2\vec{v} = \alpha L\vec{e_\varphi} + \vec{C}'$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\alpha}{L}\vec{e_\varphi} + \vec{C_o}} \tag{4}$$

Фактически мы получили, что годограф скоростей для движения по кеплеровым орбитам — это окружность, центр которой отстоит от начала координат на $\vec{C_o}$, а радиус $\frac{\alpha}{L}$. На рисунке приведён случай для движения по гиперболе. Проанализируем полученный результат:




- Весьма очевидны отношения $C_o$ и $\frac{\alpha}{L}$ для зарличных орбит:
  1. Для эллипса $C_o < \frac{\alpha}{L}$
  2. Для параболы $C_o = \frac{\alpha}{L}$
  3. Для гиперболы $C_o > \frac{\alpha}{L}$
- Также заметим, что в случае для гиперболы на бесконечности нетрудно заметить, что $\vec{e_\varphi} \perp \vec{v_\infty}$, а значит $\vec{v_\infty}$ – касательная к этой окружности.