

МЕЖДУНАРОДНАЯ
ОЛИМПИАДА «ТУЙМААДА»



А. В. Чудновский, Ю. М. Григорьев,
В. М. Муравьев, В. Ф. Потапов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

Чудновский А. В., Григорьев Ю. М.,
Муравьев В. М., Потапов В. Ф.

Теоретические задачи по физике
Международная олимпиада «Туймаада»
1994-2012

Издание второе — исправленное и дополненное

Под общей редакцией Чудновского А. В.

Допущено УМО по классическому университетскому образованию РФ
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки 011200 (физика)

Москва
Издательство МЦНМО
2013 год

УДК 53 (023)
ББК 22.3я721+74.262.22
Ч84

Учебное издание

Ч84 Чудновский А. В., Григорьев Ю. М., Муравьев В. М., Потапов В. Ф. Теоретические задачи по физике. Международная олимпиада «Туймаада». 1994-2012: Под ред. Чудновского А. В. — М.: МЦНМО, 2013. — 262 с.: ил.
ISBN 978-5-4439-0316-3

Данная книга является одновременно сборником олимпиадных задач и учебным пособием по решению особо сложных школьных задач по физике. В сборник вошли задачи, предлагавшиеся на теоретических турах старшей и младшей лиг международной олимпиады «Туймаада» по физике за всё время её существования. Для удобства пользования книгой все задачи распределены по разделам физики, а наиболее трудные задачи отмечены звёздочкой. Абсолютно ко всем задачам даются подробные решения, а к некоторым — ещё и критерии, применявшиеся жюри при оценке работ участников. Особое внимание уделяется последовательности рассуждений в ходе решения, обоснованности используемых утверждений, возможности решения различными методами и анализу полученных результатов. В ряде случаев отдельно обсуждаются типичные ошибки и причины их возникновения. Некоторые задачи позволяют соприкоснуться с важными вопросами современной физики.

Первое издание книги вышло в 2007 году под названием «Олимпиадные задачи по физике. Международная олимпиада «Туймаада»» (авторы Григорьев Ю. М., Муравьев В. М., Потапов В. Ф.). Второе издание книги рекомендовано в 2012 году учебно-методическим советом и учёным советом ФГАОУ ВПО «Северо-восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова».

ББК 22.3я721+74.262.22

ISBN 978-5-4439-0316-3

© Московский центр непрерывного
математического образования, 2013

© Чудновский А. В., Григорьев Ю. М.,
Муравьев В. М., Потапов В. Ф., 2013

*Чудновский Александр Витальевич, Григорьев Юрий Михайлович,
Муравьев Вячеслав Михайлович, Потапов Виктор Филиппович*

Теоретические задачи по физике. Международная олимпиада «Туймаада». 1994-2012

Подготовка иллюстраций: Чудновский А. В., Муравьев В. М.

Подписано к печати 11.06.2013. Формат 60 × 90¹/16. Печать офсетная.
Объём 16,4 печатных листов. Тираж 2500 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.

119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.

Тел. (495)241-05-00, (495)241-12-37. <http://www.mccme.ru>

Отпечатано в ППП «Типография «Наука»».

121099, г. Москва, Шубинский пер., д. 6.

Вступительное слово министра образования Якутии

Дорогие друзья!

Перед вами книга, содержащая задачи международной олимпиады «Туймаада», которую проводят с 1994 года в Республике Саха (Якутия) по физике, математике, информатике и химии.

За эти 20 лет расширилась география участников олимпиады: охотно сражаются в интеллектуальном бою обучающиеся из более 20 субъектов Российской Федерации, из стран ближнего и дальнего зарубежья — Румынии, Казахстана, Китая, Монголии, Франции, Южной Кореи, США, Таиланда, Бельгии, Турции, Германии, Болгарии, Мексики, Азербайджана, Кыргызстана.

Как признаются участники олимпиады, их участие в Туймааде обусловлено трудностью и интересностью представляемых задач, объективностью оценки выполненных заданий. И это не случайно, так как задания составляются и проверяются ведущими специалистами в своих областях, среди которых доктора и кандидаты наук, члены жюри Всероссийской олимпиады школьников, учителя-практики Республики Саха (Якутия) и других регионов Российской Федерации, аспиранты и студенты.

Я надеюсь, что решение задач, представленных в сборнике, поможет юным талантам отточить логику и пространственное мышление, станет составляющей их культуры и залогом ориентации в современном высокотехнологичном мире.

Министр образования
Республики Саха (Якутия)



Владимиров А. С.

Предисловие

Данная книга является одновременно сборником олимпиадных задач и учебным пособием по решению особо сложных школьных задач по физике. В сборник вошли задачи, предлагавшиеся на теоретических турах старшей и младшей лиг международной олимпиады «Туймаада» по физике за всё время её существования. Для удобства пользования книгой все задачи распределены по разделам физики, а наиболее трудные задачи отмечены звёздочкой. Абсолютно ко всем задачам даются подробные решения, а к некоторым — ещё и критерии, применявшиеся жюри при оценке работ участников. Особое внимание уделяется последовательности рассуждений в ходе решения, обоснованности используемых утверждений, возможности решения различными методами и анализу полученных результатов. В ряде случаев отдельно обсуждаются типичные ошибки и причины их возникновения. Некоторые задачи позволяют соприкоснуться с важными вопросами современной физики.

Разбор олимпиадных задач является хорошей методикой глубокого изучения физики и подготовки как к участию в школьных олимпиадах, так и к поступлению и учёбе в вузах с повышенными требованиями к знаниям по физике. Работать с пособием можно как индивидуально, так и в группах под руководством учителя физики. В любом случае сначала следует попытаться решить задачу самостоятельно (пусть даже частично, если задача содержит несколько отдельных заданий), и только после неоднократных попыток найти решение или для проверки полученного ответа следует прочитать решение, приведённое во второй части книги. Для повышения эффективности самостоятельной работы решения задач специально структурированы так, чтобы их можно было использовать как поэтапные подсказки, придерживаясь следующего алгоритма на каждом этапе решения: прочитать указание на применение физического закона, самостоятельно записать соответствующую формулу, сделать вывод, сравнить промежуточный результат.

Поскольку на сегодняшний день основное внимание в большинстве школ уделяется единому государственному экзамену (ЕГЭ), сразу отметим, что данный сборник ни в коей мере не является пособием для подготовки к ЕГЭ, а предназначен для тех, кто уже легко решает ЕГЭ и хочет разобраться в предмете существенно глубже.

Представленные задачи формально не выходят за рамки углублённой школьной программы, однако для их успешного решения помимо фактических знаний требуются также ясное понимание сути анализируемых процессов, физические интуиция и смекалка, упорство и уверенное владение техникой математических преобразований, то есть всё то, что делает задачу олимпиадной и что обязательно присутствует в творческой и научной работе. Именно это родство позволяет считать участие в олимпиадах первым шагом в современную науку. Поиск и отбор талантливой молодёжи, развитие её творческих способностей и влечения к физике неразрывно связаны с подготовкой науч-

ных кадров и являются важной государственной задачей, с успехом решаемой с конца 1960-х годов системой предметных олимпиад, у истоков которой стояли такие известные научные деятели, как Капица П. Л., Кикоин И. К., Колмогоров А. Н., Слободецкий И. Ш.

Якутия одной из первых активно включилась во всесоюзное, а затем во все-российское олимпиадное движение и уже имела значительную интеллектуальную базу, когда в 1994 году по инициативе Министерства образования Республики Саха (Якутии) была организована олимпиада «Туймаада» по физике, математике, информатике и химии. Своим названием олимпиада обязана месту проведения — живописной долине Туймаада. С тех пор олимпиада ежегодно проводится на базе Якутского государственного университета (позже преобразованного в Северо-восточный федеральный университет) им. М. К. Аммосова и физико-математического форума «Ленский край» при финансовой и организационной поддержке руководства республики.

За всё время существования олимпиады «Туймаада» в ней приняли участие более 2000 школьников из России и 15 стран ближнего и дальнего зарубежья, поэтому сейчас уже легко говорить, что эксперимент удался, а тогда всё это было ново и имело элемент риска. Замечательно, что многие организационные достижения и методические находки получили дальнейшее развитие в других регионах России и за рубежом. «Туймаада» была по сути первой летней предметной школой в «лихие девяностые», и её опыт был затем неоднократно востребован при организации аналогичных мероприятий, а в 1999 году вылился в создание физико-математического форума «Ленский край», на базе которого сейчас работает круглогодичная физическая школа. С 2000 года стала проводиться младшая лига олимпиады «Туймаада», которая предвосхитила Международную юниорскую олимпиаду по естественным наукам, впервые состоявшуюся в 2004 году в Индонезии. А в 2005 году в Казахстане на основе якутского опыта была организована Международная Жаутыковская олимпиада по физике и математике, причём первым абсолютным чемпионом в старшей группе стал двукратный дипломант олимпиады «Туймаада» Иванов Виктор Анатольевич из Якутска (ныне выпускник МФТИ).

Международный статус олимпиада «Туймаада» получила благодаря активному интересу к ней со стороны зарубежных школьников: в разные годы на олимпиаде были представлены Румыния, Болгария, Франция, Бельгия, Германия, Турция, Китай, Монголия, Южная Корея, Таиланд, США, Мексика, Казахстан, Азербайджан, Кыргызстан. Команды Румынии в первые годы явно лидировали, но руководители команд не зазнавались и приезжали каждый год, за что оргкомитет им искренне благодарен. С 2004 года в олимпиаде участвует и регулярно занимает призовые места вторая сборная России, формирующаяся из победителей 10–11 классов Всероссийской олимпиады по результатам нескольких сборов. Команда Казахстана стабильно показывает достойные результаты и лидирует по числу одновременно выставленных участников среди зарубежных команд. Результаты олимпиады «Туймаада» официально призна-

ются и учитываются в Румынии и Казахстане при поступлении школьников в вузы, а в Казахстане даже являются основанием для получения государственного гранта на обучение в рамках национального проекта «Интеллектуальная нация 2020». Стоит отметить, что участники из Казахстана стали показывать высокие результаты на многих олимпиадах, например, в 2011 году в Таиланде они даже обошли в неофициальном командном зачёте сборную России на Международной физической олимпиаде. Эти успехи несомненно являются следствием государственной программы поддержки и развития одарённых детей и молодёжи Казахстана.

В конце книги приведены полные списки дипломантов и членов жюри всех прошедших олимпиад, а здесь хотелось бы отдельно упомянуть тех, кто приложил больше всего усилий к тому, чтобы олимпиада «Туймаада» проходила каждый год на всё более высоком уровне. Первым председателем жюри созданной в 1994 году летней школы стал к. х. н. Попов Ким Филиппович, а его дело продолжили в 1995–1996 годах — к. ф.-м. н. Семёнов Семён Семёнович, в 1997–2001 годах — к. ф.-м. н. Сыромятников Валерий Гаврильевич, в 2002–2009 годах — д. ф.-м. н. Григорьев Юрий Михайлович, с 2010 года по настоящее время — к. ф.-м. н. Сивцев Василий Иванович. В 2002 году новый председатель жюри Григорьев Ю. М., который с тех пор и по настоящее время отвечает за подготовку задач, принял важное решение, повысившее статус олимпиады: пригласил для составления комплекта задач независимых специалистов, которыми стали представители Московского физико-технического института (МФТИ). Так олимпиада «Туймаада» унаследовала лучшие достижения Всероссийских олимпиад и получила новый импульс в развитии, а фактическими председателями методической комиссии олимпиады оказались победители Международных физических олимпиад разных лет: в 2002–2003 годах — студенты МФТИ Вавилов Виталий Викторович и Алфёров Роман Фёдорович, которых в шутку называли «наши нобелевские лауреаты», в 2004–2006 годах — студент МФТИ Муравьёв Вячеслав Михайлович, с 2007 года по настоящее время — выпускник МФТИ Чудновский Александр Витальевич. Вместе с внедрением новых идей очень важно сохранение лучших традиций, и эта преемственность, чем-то напоминающая цепную реакцию, обеспечивается победителями и призёрами олимпиады «Туймаада», возвращающимися позже в качестве членов жюри и наставников для нового поколения участников. Так многократные дипломанты 2000–2003 годов и члены сборной России 2003 года Татаринцов Айсен Петрович и Мохначевский Александр Николаевич уже успели подготовить новую смену, и их воспитанники Харбанов Михаил Владимирович, Григорьев Тимур Юрьевич, Иванов Виктор Анатольевич, Попов Айсен Васильевич, Сивцев Пётр Васильевич, Сидоров Степан Сергеевич получили дипломы различных степеней в 2004–2007 годах и стали студентами МФТИ и других московских вузов.

Авторами представленных в книге задач являются: Александров Д. А. (1), Алфёров Р. Ф. (1), Бочкарёв Р. Н. (3), Вавилов В. В. (2), *Варла-*

мов С. Д. (10), Григорьев Ю. М. (1), **Гуденко А. В. (11)**, Данилин В. А. (1), Дзябура Е. С. (1), Егоров М. В. (1), Ефимов В. В. (2), Имамбеков А. О. (1), Иголевич И. А. (1), Карабалин П. И. (1), Козел С. М. (3), Лесничий Я. В. (1), Любшин Д. С. (1), Манаков А. И. (1), Мохначевский А. Н. (1), Муксунов И. Х. (1), **Муравьев В. М. (17)**, Петров З. Е. (1), Попов К. Ф. (1), Потапов В. Ф. (1), Рындин М. Г. (1), Саввинова Н. А. (1), Селюк Б. В. (1), Семёнов С. С. (1), Сивцев В. И. (1), Ситников М. Г. (1), Соловьёв Т. Н. (1), Соловьёва Н. М. (1), Сыромятников В. Г. (3), Тарнопольский Г. М. (1), Татаринов А. П. (1), Трубачёв А. М. (1), Улиу Ф. (2), **Чудновский А. В. (18)**, Шелест В. И. (1), **Фольклор (39)**. В скобках после инициалов каждого автора указано количество его задач, вошедших в книгу. Особо выделены фамилии постоянных авторов, которые регулярно предлагают свои задачи и тем самым обеспечивают преемственность и задают уровень олимпиады. Некоторые задачи являются результатом коллективного труда, поэтому внимательный читатель может заметить, что сумма количеств задач всех авторов больше общего числа представленных в книге задач. К «фольклору» отнесены задачи первых олимпиад, на которых сведения об авторах задач ещё не указывались. Задачи Международной олимпиады «Туймаада» высоко ценятся экспертами, так что их можно найти в таких уважаемых журналах для учащихся, как «Квант», «Потенциал», «Физика в школе». Кроме того, эти задачи используются на подготовительных сборах команды России и в различных олимпиадах МФТИ для школьников.

Пользуясь случаем, авторы данной книги хотели бы выразить благодарность тем, кто активно содействует проведению олимпиады, но чей труд часто остаётся в тени: Гуденко Алексей Викторович, Рындин Максим Геннадьевич, Потапов Виктор Филиппович, Ларионов Александр Валерьевич и Неустроев Ефим Петрович в течение ряда лет готовят оборудование для экспериментальных туров, Павлова Эльвира Николаевна участвовала со стороны министерства образования Якутии в организации полутора десятков олимпиад и обеспечивала домашний уют всем гостям мероприятия, а наша бессменная переводчица Кулагина Алёна Олеговна помогает находить общий язык с участниками из разных стран. При подготовке нынешнего издания Варламов Сергей Дмитриевич и Улиу Флоря дали ряд ценных замечаний и предложений, за что мы им очень признательны.

Авторы пособия проводят индивидуальные и групповые занятия по подготовке старшеклассников ко всероссийским и международным олимпиадам по физике, а также к различным выпускным и вступительным экзаменам. Учащиеся, готовые попробовать свои силы, могут связаться с авторами:

- в Москве — Чудновский Александр Витальевич, репетитор по физике, математике и информатике, 8 (926) 583-51-86, a_v_ch@mail.ru;
- в Якутске — Потапов Виктор Филиппович, учитель физики Республиканского лицея-интерната (ул. Кулаковского, д. 42), vikfil2005@yandex.ru.

Условия задач. Механика

Задача 1. Шарик и стержень (1995 год)

В одной точке на потолке находятся точка подвеса маленького шарика массой m на нити длиной L и шарнирное крепление однородного стержня массой M и длиной L .

1. От висящего в покое стержня шарик отводят в сторону так, что нить остаётся натянутой, а сам шарик поднимается на высоту S_1 относительно нижнего положения, и отпускают без толчка. На какие высоты h_1 и H_1 поднимутся соответственно шарик и конец стержня после удара?

2. От висящего в покое шарика стержень отводят в сторону так, что его конец поднимается на высоту S_2 относительно нижнего положения, и отпускают без толчка. На какие высоты h_2 и H_2 поднимутся соответственно шарик и конец стержня после удара?

Движение системы происходит в одной вертикальной плоскости. Шарик и стержень ударяются абсолютно неупруго, то есть сразу после удара останавливаются друг относительно друга, но не слипаются.

Задача 2. За пределами третьей космической скорости (1995 год)

Стартовавший с Земли небольшой космический корабль сразу после выхода из атмосферы имел скорость v_0 относительно Земли и далее летел с выключенными двигателями. Скорость v_0 превышает третью космическую и направлена в ту же сторону, что и орбитальная скорость Земли относительно Солнца. Какую скорость v относительно Солнца будет иметь корабль на большом расстоянии от Солнечной системы? Известны масса Земли m , масса Солнца M , радиус Земли r , радиус орбиты Земли R , гравитационная постоянная γ .

Примечание. Уточнение «относительно Земли (или Солнца)» в данной задаче означает «в инерциальной системе отсчёта, в которой центр Земли (или Солнца) покоится в рассматриваемый момент времени».

Задача 3. Планета (1996 год)

Определите ускорение свободного падения g на некоторой планете по результатам следующих экспериментов с математическим маятником длиной $L = 3$ м. Если при плоских колебаниях маятника его максимальный угол отклонения от вертикали равен некоторому значению α , то максимальная сила натяжения нити отличается от минимальной в $k = 4$ раза. Если при вращении маятника вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса, нить образует с вертикалью такой же угол α , то период вращения $T = 4,0$ с.

Задача 4. Космический корабль (1996 год)

Космический корабль летел издалека с выключенными двигателями по направлению к астероиду, расположенному на большом расстоянии от всех других космических тел. Пролетев вблизи астероида, корабль потерял $k = 40\%$ своей скорости и отклонился от первоначального направления движения на угол $\varphi = 120^\circ$ в инерциальной системе отсчёта, в которой астероид изначально покоился. Найдите отношение массы M астероида к массе m корабля.

Задача 5. Сосуд (1996 год)

На шероховатой поверхности стола покоится пустой сосуд массой M и площадью основания S . В боковой стенке у самого дна сосуда имеется закрытое пробкой небольшое отверстие сечением σ . Когда в сосуд налили воду до уровня H , пробка выскользнула и сосуд пришёл в движение с ускорением a . Оцените коэффициент трения μ между дном сосуда и поверхностью стола. При каких коэффициентах трения μ_0 сосуд остался бы на месте после выскальзывания пробки? Плотность воды ρ известна. Вязкость воды и различие между коэффициентами трения покоя и скольжения не учитывайте.

Задача 6. Эхолот (1997 год)

На корабле, отплывающем от крутого берега, время от времени измеряют глубину моря. На расстоянии $L_1 = 100$ м от берега глубина моря оказалась $h_1 = 150$ м, на удалении $L_2 = 140$ м зафиксирована глубина $h_2 = 200$ м, на расстоянии $L_3 = 210$ м от берега эхолот зарегистрировал два отражённых сигнала. Один из них соответствует глубине $h_3 = 300$ м, а другой $h_4 = 400$ м. Было высказано предположение, что второй сигнал обусловлен изменением знака наклона морского дна. Из этого предположения определите, каков угол подъёма морского дна далее по курсу корабля.

При измерении глубины с корабля посылается направленная акустическая волна вертикально вниз. При взаимодействии со дном волна изотропно отражается во все стороны. На корабле регистрируется отражённый сигнал.

При решении задачи могут понадобиться некоторые свойства эллипса. Напомним их. Сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов — постоянная величина, равная длине его большей оси. Малая полуось эллипса $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, где a — большая полуось, а c — расстояние от фокусов эллипса до его центра. Уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где начало декартовой системы координат расположено в центре эллипса, ось x направлена вдоль большей оси, а y — вдоль малой. Нормаль к эллипсу в точке является биссектрисой угла между прямыми, соединяющими эту точку с фокусами эллипса.

Задача 7. Два груза (1997 год)

Два одинаковых груза могут скользить вдоль длинного вертикального стержня, укрепленного на полу. Сила трения грузов о стержень F постоянна и много меньше силы тяжести грузов. Верхний груз со скоростью v ударяет нижний груз, который покоился на высоте H от пола. Удары грузов друг о друга и об пол абсолютно упругие. Через какое время t_f движение грузов прекратится?

Задача 8. Кирпичи (1997 год)

Кирпичи кладут друг на друга так, как показано на рис. 1. Каждый более высокий кирпич сдвигают на максимальную величину, не нарушающую равновесия. Какое надо взять число кирпичей и на какие величины сдвинуть их друг относительно друга, чтобы верхний кирпич оказался смещённым по отношению к нижнему на длину кирпича a ?

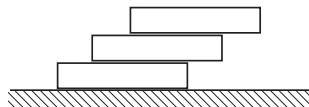


Рис. 1

Задача 9. Два бруска (1998 год)

Два бруска массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 300$ г соединены пружиной, сжатой на величину $\Delta L = 2$ см, и связаны нитью (рис. 2). Бруски покоятся на гладкой горизонтальной поверхности, а брусок m_1 касается вертикальной стены. На какую максимальную величину x растянется пружина, если пережечь нить?

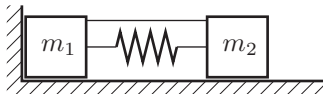


Рис. 2

Задача 10. Пробирка (1998 год)

Цилиндрическая пробирка массой m и поперечным сечением S плавает в жидкости плотностью ρ . Вертикальное положение равновесия пробирки является устойчивым за счёт утяжелённого дна. Пробирку смещают вниз на x_0 от положения равновесия и придают начальную скорость v_0 вниз ($v_0 > 0$). Найдите зависимость вертикальной координаты x от времени t при последующем движении пробирки. Пробирка не касается дна сосуда, не погружается в жидкость целиком и не выпрыгивает из жидкости. Явления вязкого трения и присоединённой массы не учитывайте, то есть считайте, что жидкость невязкая, а значение m дано уже с учётом присоединённой массы жидкости.

Задача 11. Камень (1999 год)

С вертикальной скалы высотой H брошен горизонтально со скоростью v_0 камень массой m . Спустя некоторое время он стал двигаться с постоянной скоростью. Считая, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости ($\vec{F} = -k\vec{v}$), найти:

- 1) расстояние L по горизонтали, на которое камень удалится от скалы в момент падения;
- 2) время τ движения камня.

Задача 12. Катушка (1999 год)

На цилиндрическую катушку радиусом R намотана тонкая нерастяжимая однородная нить линейной плотностью ρ и длиной L . Катушка имеет момент инерции I относительно своей оси симметрии, расположенной горизонтально, и может вращаться вокруг этой оси без трения. В начальный момент катушка покоилась, а длина свисающей части нити была пренебрежимо мала. Найдите зависимость ускорения a и скорости v свисающей части нити от её длины x в процессе дальнейшего движения. Ускорение свободного падения g известно. Считайте, что намотанная часть нити плотно прилегает к катушке в течение всего рассматриваемого движения.

Задача 13. Обруч (2000 год)

На столе вертикально стоит невесомый обруч, в верхней точке которого жёстко закреплён небольшой массивный груз массой m . Радиус обруча R , коэффициент трения о стол равен μ . От очень слабого толчка обруч приходит в движение в своей плоскости. Какую скорость $v_{\max}$ приобретёт центр обруча к тому моменту, как обруч перестанет катиться без проскальзывания?

Задача 14. Маятник Максвелла (2000 год)

Маятник Максвелла представляет собой маховик массой m и радиусом R , жёстко закреплённый посередине лёгкого тонкого стержня радиусом r , подвешенного к горизонтальному потолку на двух одинаковых нерастяжимых нитях, привязанных к стержню по разные стороны от маховика. Вращая маховик вокруг оси симметрии, нить намотали на стержень так, что маятник поднялся на высоту H , сохраняя горизонтальное положение оси. Найдите суммарную силу F натяжения нитей в момент прохождения отпущенным без начальной скорости маятником нижней точки своей траектории. Всю массу маятника считайте сосредоточенной в ободу маховика. Заданные величины удовлетворяют условиям $r \ll R \ll H$.

Задача 15. Бочка (2001 год)

Бочку с песком равномерно катят вдоль горизонтальной прямой, наклонив на угол α к горизонту. Радиус дна бочки равен R . В дне на расстоянии r от его центра имеется отверстие, через которое песок равномерно высыпается. Получите уравнение, описывающее след, оставляемый высыпавшимся песком. Нарисуйте этот след за один оборот. Укажите координаты его характерных точек, в том числе координаты центра масс.

Задача 16. Канал (2001 год)

На гладком горизонтальном столе покоится брусок массой M . В бруске проточен сквозной криволинейный канал. Все изгибы канала плавные, а стенки — гладкие. Маленький шарик массой m влетает с горизонтальной скоростью v_0 в отверстие канала с одной стороны и вылетает с другой. Все удары шарика о стенки канала абсолютно упругие. Векторы скоростей шарика в точках входа и выхода шарика из канала сонаправлены, а сами указанные точки находятся на одинаковой высоте. Во время движения шарика в канале брусок не подпрыгивает, а после вылета шарика из канала брусок не вращается. С какой скоростью u будет двигаться брусок после вылета шарика?

Задача 17. Автомобиль (2001 год)

Пилот гоночного автомобиля, движущегося со скоростью v_0 , увидел впереди длинную стену поперёк дороги. Чтобы избежать столкновения, он может или резко затормозить, или просто свернуть в сторону, или свернуть в сторону, одновременно тормозя задними колёсами. Какой из этих способов эффективнее, то есть позволит избежать столкновения с наиболее близко расположенной преградой? Коэффициент трения колёс о дорогу равен μ .

Задача 18. Упругий жгут (2001 год)

Шарик массой M прикреплен к концу упругого жгута массой m , длина которого в недеформированном состоянии равна L_0 . Жгут с шариком вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через другой конец жгута. Шарик скользит по гладкой поверхности, жгут не провисает. Как зависит расстояние от шарика до оси вращения L от угловой скорости ω ? При растяжении жгута изменением его сечения S можно пренебречь. Жгут подчиняется закону Гука при любых деформациях. Модуль Юнга равен E .

Задача 19. Две частицы (2002 год)

Две частицы одновременно начали двигаться в однородном поле тяжести $\vec{g}$. Их начальные скорости равны по модулю v_0 и лежат в одной вертикальной плоскости. Угол наклона вектора одной из скоростей к горизонту равен α , а другой 2α . В какой момент времени τ от начала движения скорости частиц окажутся сонаправленными? Сопротивлением движению пренебречь.

Задача 20. Плоское движение (2002 год)

В задаче исследуется плоское движение абсолютно твёрдого тела. Точки A , B , C и D принадлежат этому телу (рис. 3).

1. Задана скорость $\vec{v}$ точки A . Она изображена на рис. 3 в указанном там масштабе. Найдите скорость $\vec{v}_C$ точки C , если скорость точки B направлена вдоль пунктирной прямой, изображённой на рисунке.

2. Скорость точки A такая же, как и в первом пункте. Найдите скорость $\vec{v}_C$, если модуль скорости точки B равен $1,0$ м/с.

3. Скорость точки A такая же, как и в первых пунктах. Найдите скорость $\vec{v}_D$ точки D , если скорости точек B и C одинаковы по модулю.

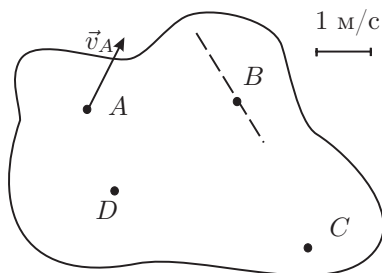


Рис. 3

Задача 21. Камни (2002 год)

Из точки, расположенной на высоте $H = 5$ м над краем обрыва, под углом α к горизонту в сторону обрыва бросили со скоростью $v_0 = 10,0$ м/с камень. С какой минимальной скоростью v и под каким углом β к горизонту следует в тот же момент бросить с поверхности земли камень вдогонку первому из точки, удалённой от края обрыва на расстояние $L = 10$ м, чтобы камни столкнулись? Рассмотреть случаи $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 60^\circ$.

Задача 22. Пластина (2002 год)

В широкий сосуд с водой опускают вертикально прямоугольную пластину шириной L так, чтобы её конец коснулся поверхности жидкости. Пластина смачивается водой. Угол смачивания равен θ . Коэффициент поверхностного натяжения σ . Плотность воды ρ .

1. Найдите силу взаимодействия пластины с водой.
2. На какую высоту h поднимется жидкость у самой поверхности пластины относительно уровня воды в сосуде?
3. Получите уравнение $y = y(x)$, связывающее высоту y поднятия воды в точке, удалённой от пластины на величину x .

Напомним, что искривлённая поверхность жидкости, подобно упругой оболочке надувного шарика, оказывает в сторону вогнутости давление

$$p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где R_1 и R_2 — наименьший и наибольший радиусы кривизны поверхности. Для сечения поверхности, описываемого уравнением $y = y(x)$ (то есть графика функции $y = y(x)$), радиус кривизны находится по формуле

$$R = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{y''}.$$

Задача 23. На планете Туй (2003 год)

На планете Туй растёт дерево Маа, семенами которого питается животное Да. Особенность дерева Маа состоит в том, что при созревании его плоды лопаются и выбрасывают семена по всем направлениям со скоростью v_0 . Животное в процессе эволюции выработало следующий способ добывания пищи: оно сидит на расстоянии L от дерева и, дождавшись, когда плод, находящийся на высоте H , лопнет, в тот же момент выбрасывает со скоростью v язык, который состоит из тонкой лёгкой нити и находящегося на её конце тяжёлого шарика. Из шарика в определённый момент во все стороны выбрасываются липкие щупальца, которые мгновенно ловят все семена, находящиеся от центра шарика на расстоянии, меньшем длины щупальца. Найдите минимальную длину щупалец, достаточную для того, чтобы животное захватывало все семена. Под каким углом к горизонту должно животное выбрасывать язык и какое устанавливать время задержки между выбрасыванием языка и распусканием щупалец, чтобы достаточная длина щупалец была минимальной? Считать, что во время полёта шарика нить на него не действует. Ускорение свободного падения на поверхности планеты Туй равно g . Полёту семян не препятствуют ни сопротивление атмосферы, ни ветви дерева.

Задача 24. Конус (2003 год)

Конус высотой H и радиусом основания R полностью погружён в жидкость плотностью ρ . При этом центр основания конуса находится на глубине L , а его ось составляет с поверхностью жидкости угол α (рис. 4). Давление газа над жидкостью равно P_0 . Ускорение свободного падения g известно. Найдите силу F , действующую со стороны жидкости на боковую поверхность конуса.

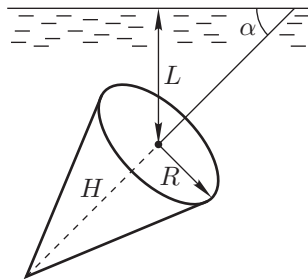


Рис. 4

Задача 25. Проволочная скобка (2003 год)

Лёгкая нерастяжимая нить длиной $2L = 2$ м удерживается за её концы так, что они находятся на одной высоте рядом друг с другом. На нити висит проволочная скобка в виде перевёрнутой буквы U. Масса скобки m равна 1 грамму. Нить выдерживает максимальную растягивающую силу $F = 5$ Н ($F \gg mg$). Концы нити начинают перемещать в противоположных горизонтальных направлениях с одинаковыми скоростями $v = 1$ м/с. В какой-то момент нить не выдерживает и рвётся. На какую максимальную высоту от своего положения в момент разрыва нити взлетит скобка? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 26. Цунами (2003 год)

В данной задаче исследуются некоторые особенности распространения волн в жидкостях.

1. На поверхности океанов иногда наблюдаются гигантские волны — цунами. Найдите скорость таких волн, предполагая, что длина волны много больше глубины океана h . При этом условии в волновое движение вовлекаются все частицы воды, в противном случае только те частицы, которые находятся в поверхностном слое толщиной порядка длины волны.
2. Вблизи прямолинейного участка берега моря на расстоянии L от него произошёл взрыв. Считая, что дно моря слабо отличается от наклонной плоскости, найдите длину участка берега, до которого дойдут волны, порождённые взрывом. Считать, что глубина моря в месте взрыва достаточно мала.

Задача 27. Отскок вращающейся шайбы (2004 год)

По горизонтальной ледяной поверхности со скоростью v_0 скользит без трения маленькая цилиндрическая шайба радиусом R , вращаясь при этом вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω_0 , и налетает на вертикальную стенку под углом φ (рис. 5). Коэффициент трения шайбы о стенку равен μ . Потерями энергии, связанными с деформацией шайбы и стенки при ударе, пренебречь. Определите, с какими скоростями v и ω и под каким углом ψ (рис. 5) шайба отскочит от стенки, если $\omega_0 > 4\mu v_0 \cos \varphi / R$. При каких значениях коэффициента трения μ шайба отскочит в обратном направлении, перестанет вращаться?

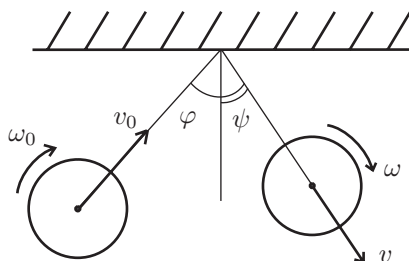


Рис. 5

Задача 28. Склеенный обруч (2004 год)

На горизонтальной шероховатой поверхности находится обруч радиуса R , склеенный из двух однородных половинок массами m_1 и m_2 (рис. 6).

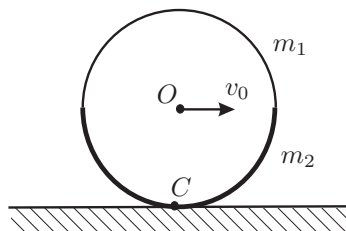


Рис. 6

1. При какой минимальной скорости v_0 центра O обруч совершит полный оборот без проскальзывания?
2. Определите период малых колебаний обруча вблизи положения равновесия.
3. Найдите максимально возможный угол $\alpha_{\max}$ наклона опорной плоскости к горизонту, при котором обруч, находящийся на ней, остаётся в равновесии.

Задача 29. Шайба в клетке, или треугольный бильярд (2005 год)

Маленькая круглая шайба может скользить по гладкой горизонтальной поверхности между тремя гладкими вертикальными стенками, образующими клетку в форме правильного треугольника ABC со стороной длиной l (рис. 7). Все удары шайбы о стенки абсолютно упругие, а при попадании в вершину угла шайба прекращает движение (падает в лузу). В начальный момент времени шайба касается стенки AB в её средней точке D и имеет скорость v , направленную под углом φ к этой стенке, причём $0 < \varphi < \pi/2$.

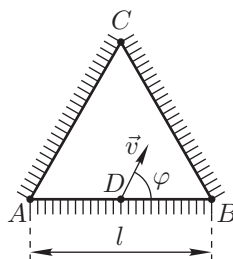


Рис. 7

1. Найдите все значения φ , при которых шайба попадёт в противоположающую вершину C , испытав не более шести соударений со стенками.
2. За какое минимальное время $t_{\min}$ шайба сможет туда попасть?

Задача 30. Верёвка (2005 год)

Один конец тонкой гибкой верёвки с линейной плотностью ρ тянут с постоянной горизонтальной скоростью на высоте H над шероховатой поверхностью. Второй конец верёвки свободен (рис. 8). Длина части верёвки, соприкасающейся с поверхностью, равна l_1 . Найдите длину верёвки l_2 , не касающейся поверхности. Коэффициент трения скольжения верёвки по поверхности равен k .

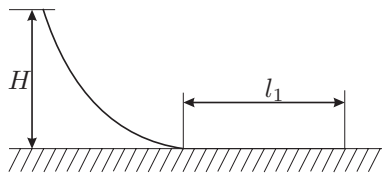


Рис. 8

Задача 31. Дискретная модель движения лавины (2005 год)

Снег, лежащий на склоне гор, иногда приходит в движение, образуя снежные лавины. Снежные массы неожиданно начинают спускаться сверху, увлекая за собой всё, что находится на склоне горы. Энергия лавины быстро нарастает, превращая её в грозное стихийное бедствие. Для описания движения лавины воспользуемся следующей моделью.

На длинной наклонной плоскости с углом α через одинаковые промежутки L расставлены тяжёлые бруски (рис. 9). От скольжения по плоскости их удерживает сила сцепления, которая исчезает при сколь угодно малом толчке. После освобождения бруски скользят с ничтожным трением. Если верхний брусок придёт в движение, он столкнётся со вторым бруском, далее цепочка из двух брусков столкнётся с третьим и так далее. Все соударения предполагаются абсолютно неупругими. В результате возникает длинная цепочка, к которой присоединяются всё новые и новые бруски. Этот процесс и моделирует движение лавины по горному склону.

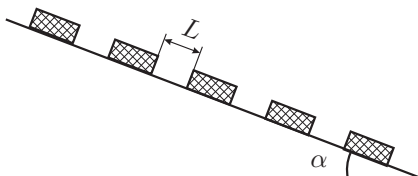


Рис. 9

1. Пусть в цепочке движется n брусков. Определите приращение кинетической энергии ΔE цепочки после столкновения с $(n + 1)$ -м бруском по сравнению с энергией после столкновения с n -м бруском.
2. Найдите разность энергий цепочек из $n \gg 1$ и $k > n$ брусков $E_k - E_n$.
3. Как сказывается на движении лавины учёт силы трения? Ответьте на вопросы предыдущих заданий, полагая, что угол наклона плоскости α больше «лавиноопасного» угла β .

Задача 32. Противостояние Марса (2005 год)

Одним из важных и обширных приложений классической механики является небесная механика, описывающая движение космических объектов. В данной задаче речь идёт о движении двух планет Солнечной системы — Земли и Марса. Период обращения Земли вокруг Солнца равен $T_E = 365$ суток, а марсианский год составляет $T_M = kT_E$, где $k = 1,88$. В отдельные моменты времени планеты оказываются в положении, которое называют противостоянием. При противостоянии Марс виден с Земли в направлении, противоположном Солнцу. При этом он совершает так называемое «попятное движение», то есть вблизи точек противостояния меняет на противоположное направление своего движения относительно звёзд.

1. На рис. 10 показано положение Земли E , Марса M и Солнца S в противостоянии. Предполагая, что движение планет происходит по концентрическим окружностям вокруг Солнца, определите радиус R_M орбиты Марса, а также промежуток времени τ между двумя последовательными противостояниями, полагая известным радиус земной орбиты $R_E = 1,50 \cdot 10^{11}$ м.

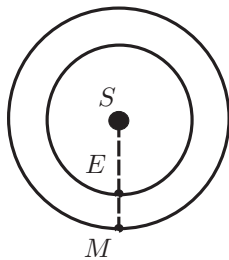


Рис. 10

2. Считая, что планеты движутся по часовой стрелке (рис. 10), найдите, на какой угол φ повернётся линия противостояния за время τ .

3. Наблюдения показывают, что промежутки времени между последовательными противостояниями не одинаковы. Указанные промежутки плавно изменяются от значения $\tau_{\min} = 764$ суток до $\tau_{\max} = 811$ суток. Можно предположить, что это обусловлено отличием орбиты Марса от окружности. Считая, что движение Марса происходит по эллипсу, покажите, что промежуток времени между последовательными противостояниями вблизи перигелия (ближайшей к Солнцу точки орбиты) наибольший, а вблизи афелия (наиболее удалённой от Солнца точки орбиты) — наименьший. Найдите минимальное $R_{\min}$ и максимальное $R_{\max}$ удаление Марса от Солнца.

Задача 33. Ряд брусков (2006 год)

На гладкой горизонтальной поверхности расположены в ряд n брусков, причём $n \geq 5$ (рис. 11). Между всеми брусками имеются промежутки. Первому бруску массой m_1 сообщили скорость v_1 в направлении остальных брусков. Определите, при каких массах m_i средних брусков ($2 \leq i \leq n-1$) скорость последнего бруска массой m_n окажется максимальной. Найдите величину этой максимальной скорости v_n . Все соударения брусков абсолютно упругие. Скорость последнего бруска измеряется сразу после первого соударения с предпоследним бруском. Считайте, что промежутки между брусками таковы, что до этого момента каждый брусок соударяется с каждым из соседних ровно по одному разу.

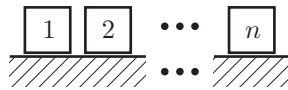


Рис. 11

Задача 34. Человек на платформе (2006 год)

Человек массой m переходит с одного края изначально покоившейся платформы массой M и длиной L на другой её край. Платформа может двигаться вдоль горизонтальной прямой, испытывая при этом силу сопротивления $\vec{F} = -k\vec{u}$, где $\vec{u}$ — скорость платформы, k — известный коэффициент пропорциональности. Зависимость скорости человека от времени может быть любой.

1. Найдите смещение S платформы к моменту полной остановки при наличии силы сопротивления ($k \neq 0$).

2. Найдите смещение S_0 платформы к моменту полной остановки при отсутствии силы сопротивления ($k = 0$).

Задача 35. Капля в тумане (2006 год)

В этой задаче исследуются различные модели поступательного движения большой капли в тумане средней плотностью ρ (без учёта плотности воздуха). В начальный момент капля имеет форму шара массой m_0 и площадью поперечного сечения S_0 и движется вертикально вниз со скоростью v_0 . Можно считать, что капельки тумана покоятся и налипают абсолютно неупруго. Силу сопротивления воздуха и броуновское движение не учитывайте. Найдите зависимость $v(t)$ скорости капли от времени в следующих четырёх случаях.

1. На каплю не действует сила тяжести; капля увеличивается только в длину, сохраняя площадь поперечного сечения.
2. На каплю не действует сила тяжести; капля увеличивается во всех направлениях, сохраняя сферическую форму.
3. Капля находится в поле тяжести g ; капля увеличивается только в длину, сохраняя площадь поперечного сечения.
4. Капля находится в поле тяжести g ; капля увеличивается во всех направлениях, сохраняя сферическую форму.

Примечание. Данная задача является модельной, то есть в ней специально исключены из рассмотрения некоторые (возможно, существенные) явления с целью исследования оставшихся в «чистом» виде.

Задача 36. Пузыри (2006 год)

В данной задаче рассматриваются пузыри, созданные с помощью раствора поверхностно активного вещества (ПАВ). Среднее расстояние между соседними молекулами раствора $a = 5 \cdot 10^{-10}$ м, на $c = 10$ молекул раствора приходится одна молекула ПАВ, размеры молекул растворителя и ПАВ можно считать одинаковыми. Коэффициент поверхностного натяжения ПАВ $\sigma = 3 \cdot 10^{-2}$ Дж/м².

1. Найдите максимальный радиус $R_{\max}$ и толщину плёнки $h_{\min}$ пузыря, которые можно выдуть из капли раствора, имеющей радиус $r = 0,5$ мм. Плёнка пузыря устойчива, только если её поверхность полностью покрыта молекулами ПАВ.
2. Оцените силу F , с которой пузыри радиусами $R_1 = 0,1$ м и $R_2 = 0,15$ м притягиваются на начальном этапе «слипания», когда плёнку между пузырями ещё можно считать плоской.
3. Определите радиус R_3 сферической мембраны, образовавшейся между пузырями из предыдущего пункта после завершения процесса «слипания», предполагая, что участки поверхностей пузырей, не затронутые «слипанием», сохранили свои формы.

Задача 37. Бросание мяча с небоскрёба (2007 год)

В безветренный день экспериментатор Глюк сбросил без начальной скорости мяч с балкона 300-го этажа небоскрёба. Затем Глюк спустился на скоростном лифте до 200-го этажа и в тот момент, когда мяч пролетал мимо балкона 200-го этажа, сбросил без начальной скорости точно такой же мяч. Потом Глюк спустился до 100-го этажа и замерил промежуток времени между моментами пролёта мячей мимо балкона 100-го этажа: $\tau = 1,5$ с. После этого Глюк спустился на первый этаж и обнаружил, что мячи упали на землю практически с тем же интервалом времени τ . Найдите высоту h второго мяча над землёй в тот момент, когда первый мяч коснулся земли. Ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с². Силу сопротивления воздуха считайте пропорциональной скорости мяча, а коэффициент пропорциональности — константой.

Задача 38. Брёвна (2007 год)

В водоёме плавает конструкция (рис. 12), состоящая из двух склеенных полых четвертинок цилиндрических брёвен радиусами r_1 и r_2 (причём $r_1 > r_2$), на которые положена половинка однородного цилиндрического бревна радиусом $(r_1 + r_2)/2$. Все брёвна имеют одинаковую длину. Плоскость соприкосновения половинки бревна с четвертинками совпадает с уровнем воды в водоёме. Определите отношение $k = r_1/r_2$ и плотность ρ верхнего бревна, при которых конструкция будет в равновесии. Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м³. Массой полых четвертинок можно пренебречь. Устойчивость положения равновесия исследовать не требуется.

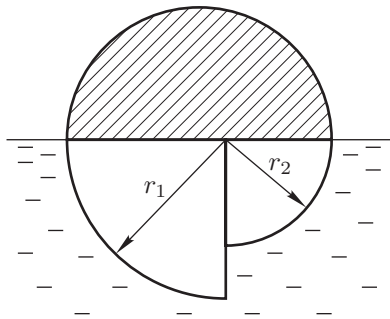


Рис. 12

Задача 39. Облако галактик (2007 год)

Согласно астрономическим наблюдениям все галактики удаляются от нашей со скоростями $\vec{v}_i = H\vec{r}_i$, где $\vec{r}_i$ — радиус-вектор галактики относительно нашей, $H = \text{const}$ — постоянная Хаббла. Скорости галактик много меньше скорости света. Гравитационная постоянная G известна.

1. Выразите скорости $\vec{v}'_i$ галактик через их радиус-векторы $\vec{r}'_i$ в системе отсчёта j -й галактики.

Рассмотрим шаровое скопление галактик, начальная плотность ρ_0 которого постоянна по всему его объёму (поскольку скопления состоят из большого числа галактик, понятие плотности для них вводится так же, как и для обычных тел, состоящих из большого числа атомов). Влияние других скоплений учитывать не требуется. Столкновениями галактик друг с другом можно пренебречь.

Расширение скопления галактик рассматривайте в рамках классической механики.

2. При каких значениях ρ_0 расширение скопления сменится сжатием?

Далее будем полагать значение ρ_0 известным, а условие из предыдущего пункта выполненным.

3. Найдите максимальный радиус $r_{\max}$ скопления, если в начальный момент оно имело радиус r_0 .

4. Найдите время τ сжатия скопления от максимального до пренебрежимо малого радиуса.

Задача 40. Палочка на клиньях (2008 год)

На горизонтальной плоскости покоятся два клина массами m_1 и m_2 с углами при основании α_1 и α_2 (рис. 13). На клинья горизонтально положили однородную палочку, после чего систему отпустили. Трения в системе нет.

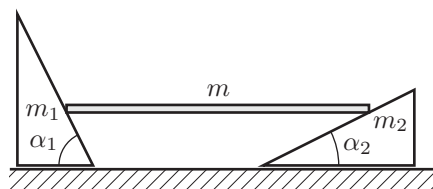


Рис. 13

1. При какой массе m палочки её концы ударятся о плоскость одновременно?

2. Полагая $\alpha_1 > \alpha_2$, определите, при каком отношении m_1/m_2 это возможно.

Задача 41. Падение «гантельки» (2008 год)

Два небольших одинаковых шара массой $m = 1$ кг каждый связали короткой нитью и поместили между ними (но не прикрепили к ним) лёгкую пружину (рис. 14).



Рис. 14

Полученную «гантельку» сбросили с самолёта. В некоторый момент в процессе падения нить оборвалась, и шары полетели независимо. Сразу после распрямления пружины кинетические энергии шаров отличались на $\Delta E = 20$ Дж. Через некоторое время скорости падающих шаров перестали изменяться. Найдите расстояние L между шарами на этом этапе падения. За время раздельного падения шаров модуль их суммарного импульса уменьшился в $n = 2$ раза. Считайте, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости шара и коэффициент пропорциональности не зависит от высоты над землёй. Вращение шаров не учитывайте. Траектории шаров могут не лежать в одной плоскости.

Задача 42. Колебания на проволоках (2008 год)

Две проволоки согнуты под одинаковыми углами и зафиксированы в одной плоскости так, что координатные оси Ox и Oy являются для них осями симметрии (рис. 15). Стороны проволочных углов образуют угол $\alpha = 30^\circ$ с осью Ox . В вершине угла каждая проволока образует небольшое закругление, плавно соединяющее стороны. Вдоль проволок могут двигаться две одинаковые бусинки. Коэффициент трения между бусинкой и проволокой $\mu = 0,1$. Бусинки соединены невесомой пружиной, длина которой в свободном состоянии равна расстоянию между вершинами углов.

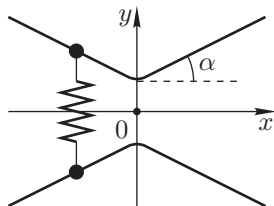


Рис. 15

1. Найдите период T колебаний системы бусинок, при которых координаты x обеих бусинок всё время равны между собой.

2. Найдите затухание γ таких колебаний. Под затуханием здесь подразумевается отношение кинетической энергии при прохождении положения равновесия к кинетической энергии по прошествии периода.

Система находится в невесомости. Если один конец точно такой же пружины зафиксировать, а к другому концу прикрепить одну из бусинок, то период вертикальных колебаний такого маятника будет $T_0 = 1$ с.

Задача 43. Дни равноденствия (2008 год)

Дни летнего и зимнего солнцестояния (в 2008 году — 21 июня и 21 декабря) делят год пополам, а летний период между днями весеннего и осеннего равноденствия (в 2008 году — 20 марта и 22 сентября) продолжительнее зимнего на $\tau \approx 7$ сут.

1. Когда расстояние от Земли до Солнца наибольшее и когда наименьшее? В качестве ответа укажите даты, ответ аргументируйте.

2. Найдите разность ΔR между наибольшим и наименьшим значениями расстояния от Земли до Солнца.

3. Найдите разность Δv между наибольшим и наименьшим значениями орбитальной скорости Земли.

Примечание. Считайте, что земной год $T \approx 365$ суток, а орбита Земли не сильно отличается от окружности радиусом $R = 1,5 \cdot 10^{11}$ м.

Задача 44. Бочка в грузовике (2009 год)

В кузове грузовика установлена цилиндрическая бочка диаметром $D = 1$ м с лёгкой крышкой, на которой сидит пассажир, плотно прижимая своим весом крышку к бочке. Бочка полностью (под самую крышку) заполнена водой. Грузовик проходит горизонтальный поворот дороги с радиусом закругления $R = 0,1$ км со скоростью $v = 54$ км/ч. Какой минимальной массой m должен обладать сидящий на крышке пассажир, чтобы вода на повороте не выплёскивалась из бочки, приподнимая крышку? На повороте бочка не опрокидывается,

крышка и пассажир с бочки не соскальзывают. Плотность воды $\rho = 1 \text{ г/см}^3$, ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Задача 45. Маятник в шахте (2009 год)

Экспериментально установлено, что период колебаний математического маятника в шахте глубиной $h = 500 \text{ м}$ на $\delta = 0,0025\%$ меньше периода колебаний такого же маятника на поверхности Земли. Оцените на основе этих данных среднюю плотность ρ слоя земной коры толщиной h от поверхности, считая Землю шаром с плотностью, зависящей только от расстояния до центра. Средняя плотность Земли $\rho_0 = 5,6 \text{ г/см}^3$, радиус Земли $R = 6400 \text{ км}$.

Задача 46. Автобусы под дождём (2010 год)

В дождливую безветренную погоду по трассе из пункта A в пункт B ехали с постоянной одинаковой скоростью два автобуса, имеющие форму параллелепипедов и отличающиеся только длиной — в 1,5 раза. За время движения из A в B их коснулись N и $1,3N$ капель дождя. Обратный путь они проделали с вдвое меньшей скоростью. Сколько капель дождя N_1 и N_2 коснулись их на обратном пути? Отклонение капель под действием потоков воздуха не учитывайте. Приводить ответы в общем виде в данной задаче не требуется.

Задача 47. Ночное насекомое (2010 год)

Некоторые насекомые приспособились летать ночью по прямой, используя лунный свет в качестве ориентира. Выбрав начальное направление, они затем поддерживают постоянный угол α между вектором своей скорости и направлением на центр Луны. Одно из таких насекомых, находясь на расстоянии $R = 10 \text{ м}$ от уличного фонаря, ошибочно приняло его за Луну и начало лететь с постоянной скоростью $v = 1 \text{ м/с}$, двигаясь в одной плоскости и поддерживая угол $\alpha = 80^\circ$. Фонарь представляет собой шар радиусом $R_0 = 10 \text{ см}$.

1. Через какое время τ насекомое натолкнётся на фонарь, если будет всё время ориентироваться на фонарь как на Луну?

2. Сколько оборотов n вокруг фонаря сделает насекомое до этого?

Задача 48. Волны в ручье (2010 год)

При обтекании воткнутой в дно ручья палки образовались неподвижные относительно берега поверхностные волны (рис. 16, 17).

1. Определите диаметр d палки.

2. Определите скорость u течения ручья.

Примечание. Зависимость скорости v поверхностных волн от длины волны λ (закон дисперсии) имеет вид

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}},$$

где $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения, $\sigma = 0,073 \text{ Н/м}$ — коэффициент поверхностного натяжения воды, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды.



Рис. 16. Короткие волны перед палкой (крупный масштаб)



Рис. 17. Длинные волны после палки (мелкий масштаб)

Задача 49. Три груза (2011 год)

Система, состоящая из трёх грузов массами m_1 , m_2 и m_3 , одного подвижного и двух неподвижных блоков (рис. 18), находится в равновесии.

1. При каких соотношениях между массами грузов это возможно?

2. Левый блок переместили влево на расстояние Δx . Выше или ниже окажется средний груз в новом положении равновесия по сравнению с первоначальным? Найдите разность высот Δy между этими положениями.

Блоки и нити невесомы. Трение в блоках отсутствует. Грузы и блоки не касаются друг друга.

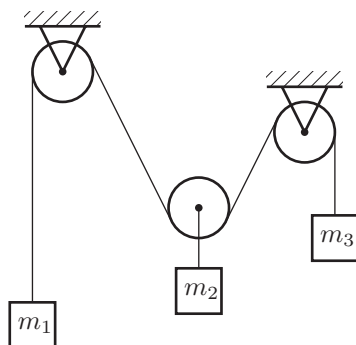


Рис. 18

Задача 50. Упругие свойства графена (2011 год)

В 2010 году А. Гейм и К. Новосёлов получили Нобелевскую премию за открытие графена, который представляет собой моноатомный слой графита толщиной $h = 0,335$ нм. В своей лекции на физтехе Костантин Новосёлов (выпускник ФКЭ МФТИ 1997 года) отметил уникальные механические свойства графена. Графен — самый упругий и самый прочный из известных на данный момент материалов: модуль Юнга графена превосходит модуль Юнга алмаза, а прочность графена почти на два порядка больше прочности специальных сталей. Кроме того, графеновая плёнка обладает огромной эластичностью. В предлагаемой ниже задаче идея опыта и численные данные взяты из статьи группы учёных из Колумбийского университета США, которые впервые изучили упругие свойства графена.

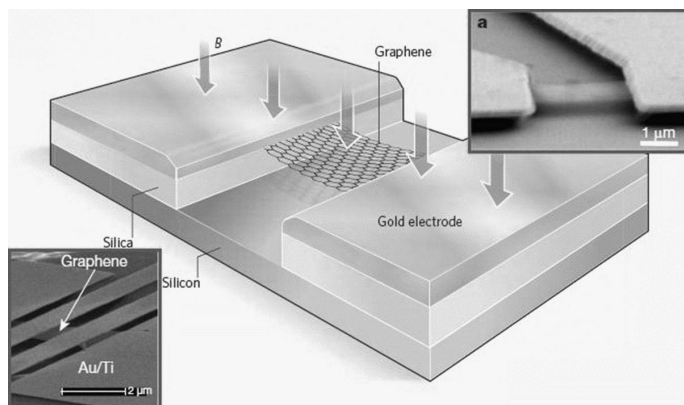


Рис. 19

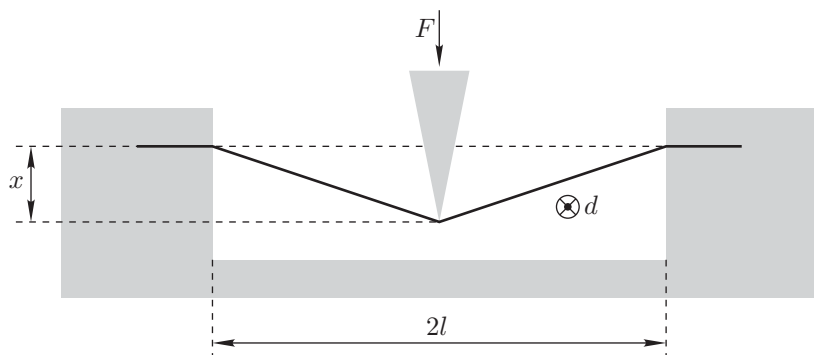


Рис. 20

Опыт по исследованию упругих свойств графена ставится следующим образом (рис. 19, 20). Алмазный зонд атомно-силового микроскопа в виде тонкого лезвия действует с силой F на середину графеновой плёнки, закреплённой (но не натянутой) на краях узкой бороздки шириной $2l = 1$ мкм. Сила давления равномерно распределена по всей ширине графеновой плёнки $d = 0,5$ мкм (размер в направлении, перпендикулярном плоскости рис. 20). Для прогиба середины плёнки на величину $x_0 = 100$ нм потребовалась сила $F_0 = 1,6$ мкН, а при прогибе центра полосы на величину $x_{\max} = 332$ нм плёнка разрывается под действием силы $F_{\max} = 48$ мкН.

Считайте, что вплоть до разрыва для плёнки справедлив закон Гука, то есть $\sigma = E\varepsilon$, где σ — механическое напряжение (отношение силы натяжения к площади поперечного сечения), E — модуль Юнга (константа, характеризующая упругость материала), ε — относительная деформация (отношение удлинения к первоначальной длине). Изменение толщины и ширины плёнки при деформации не учитывайте.

1. Найдите зависимость силы F от x для малых деформаций x .
2. Найдите модуль Юнга E графена.
3. Найдите максимальную относительную деформацию графена $\varepsilon_{\max}$. На сколько процентов можно растянуть графеновую плёнку?
4. Найдите максимальное напряжение $\sigma_{\max}$ (прочность) графена.
5. Допустим, что в аналогичном опыте испытывается на прочность скотч, изготовленный не из традиционного полиэтилена, а из материала с упругими и прочностными свойствами графена, то есть с такими же модулем Юнга, максимальной относительной деформацией и прочностью. Какая сила $F'_{\max}$ потребуется, чтобы разорвать «графеновый скотч» толщиной $H = 0,1$ мм, надавливая ребром металлической линейки на середину закреплённой полосы длиной $2L = 2$ см и шириной $D = 0,5$ см?

Задача 51. U-образная трубка (2011 год)

В тонкую высокую U-образную трубку постоянного сечения с открытыми концами налита вода, а в одно из вертикальных колен трубки поверх воды налит столб масла высотой $H = 25$ см и плотностью $\rho = 0,8$ г/см³ (рис. 21). С каким минимальным постоянным ускорением a должна поступательно двигаться трубка, чтобы верхние уровни жидкостей в вертикальных участках оказались на одной горизонтали? Жидкости из сосуда не выливаются, масло с водой не смешивается и в горизонтальный участок длиной $L = 5$ см не затекает. Капиллярные эффекты не учитывайте.

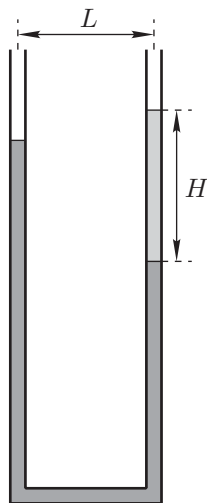


Рис. 21

Задача 52. Третий полёт Вовочки (2012 год)

После пары успешных космических полётов и перерыва на отдых председатель школьного астрономического клуба Вовочка окончательно уверовал в свои силы и рискнул отправиться в свой третий полёт в сторону Полярной звезды теперь уже на более длительный срок. Глядя в иллюминатор, он видел, как Земля вращается вокруг Солнца на фоне неподвижных звёзд. Когда угловое расстояние между Землёй и Солнцем было $\varphi = 1^\circ$, в космическом корабле из-за ошибки в расчётах закончилось топливо для двигателей и Вовочка поставил к иллюминатору фотокамеру, которая делала снимки с интервалом времени $\tau = 1$ сут. Через некоторое время он выключил фотокамеру и стал с ностальгией просматривать снимки, как в кино с частотой $\nu = 24$ кадра в секунду. Оказалось, что за время фотосессии Земля сделала $N = 5$ оборотов, а расстояние от Земли до Солнца на экране уменьшилось в $k = 3$ раза.

1. В какую сторону (по часовой стрелке или против) вращалась на экране Земля вокруг Солнца?

2. С какой угловой скоростью ω вращалась на экране Земля вокруг Солнца?

3. С какой средней скоростью v летел корабль во время фотосессии?

4. Оцените изменение Δv скорости корабля за время фотосессии.

5. Есть ли у Вовочки или хотя бы у его корабля шанс вернуться назад под действием притяжения со стороны Солнца?

Среднее расстояние от Земли до Солнца $R \approx 1$ а.е. $\approx 150 \cdot 10^6$ км.

Примечание. Можно использовать приближения $\sin x \approx x$ и $\cos x \approx 1$ для малых углов x .

Условия задач. Термодинамика

Задача 53. Ледяной покров (1995 год)

В течение нескольких недель температура воздуха была $T_1 = -20^\circ\text{C}$ и озеро покрылось льдом толщиной $h = 20$ см. На какую величину Δh увеличится толщина льда за следующие сутки при той же погоде? Температура грунта и воды на дне озера $T_2 = +4^\circ\text{C}$, так как при этой температуре плотность воды максимальна. Плотность льда $\rho = 900$ кг/м³, теплопроводность льда $k = 2,3$ Вт/(м · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг, удельная теплоёмкость льда $c_1 = 2100$ Дж/(кг · °C), удельная теплоёмкость воды $c_2 = 4200$ Дж/(кг · °C).

Задача 54. Похолодание (1996 год)

При температуре на улице $t_1 = -5^\circ\text{C}$ комнатный термометр показывает $T_1 = 25^\circ\text{C}$. Какая температура T_2 будет в доме, если наступит похолодание до $t_2 = -30^\circ\text{C}$? Все прочие условия, включая температуру батарей отопления $\tau = 70^\circ\text{C}$, считайте одинаковыми в обоих случаях.

Задача 55. Электрочайник (1997 год)

Меняя напряжение, подаваемое на электрический чайник, можно изменять потребляемую им мощность P . В зависимости от P чайник с водой можно нагреть до различных максимальных температур. Эту зависимость отражает табл. 1. Остывание нагретого чайника, выключенного из сети, описывает табл. 2. Определите объём воды, если теплоёмкость пустого чайника $C_0 = 100$ Дж/К, удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · К), плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³.

Т а б л и ц а 1

Мощность P , Вт	0	100	200	300
Температура t , °C	20	40	60	80

Т а б л и ц а 2

Время τ , с	0	60	300	600	1200	2400
Температура t , °C	80	75	60	45	30	20

Задача 56. Нагреватель (1998 год)

В калориметр поместили неизвестное вещество X массой $m = 100$ г и специальный нагреватель, который обеспечивал постоянную скорость повышения температуры $v = 1,0^\circ\text{C}/\text{с}$. В ходе эксперимента измерялась потребляемая нагревателем мощность P в зависимости от температуры T . Полученные результаты представлены в табл. 3. В ходе опыта вещество X расплавилось.

Удельная теплоёмкость вещества X не зависит от температуры в пределах одного агрегатного состояния. Общая теплоёмкость калориметра и нагревателя $C = 50$ Дж/°С. Температура окружающей среды $T_0 = 20^\circ\text{С}$.

Полагая экспериментальные данные достоверными и достаточно точными, определите следующие параметры вещества X : температуру плавления $T_{\text{пл}}$, удельные теплоёмкости $c_{\text{тв}}$ и $c_{\text{жид}}$ в твёрдом и жидком состояниях соответственно, удельную теплоту плавления λ . На какую постоянную мощность $P_{\text{пл}}$ нужно настроить нагреватель, чтобы длительное время поддерживать вещество X в калориметре при температуре плавления?

Приводить ответы в общем виде в данной задаче не требуется, однако желательно оценить погрешности полученных численных результатов.

Т а б л и ц а 3

$T, ^\circ\text{С}$	31	32	33	34	35	36	37
$P, \text{Вт}$	155	160	165	760	155	160	165

Задача 57. Пружина (1999 год)

Между двумя плоскостями с постоянными температурами T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$) находится идеальный газ с молярной массой M . Расстояние между плоскостями равно H . К верхней плоскости на невесомой пружине подвешен маленький шарик массой m , средняя плотность которого равна ρ_0 . Длина пружины в недеформированном состоянии L_0 . Коэффициент жёсткости пружины равен k . Температура линейно возрастает при удалении от нижней плоскости.

1. Найдите распределение плотности газа между плоскостями, считая, что давление газа между плоскостями везде одинаково и равно p .
2. Найдите давление в газе p , если в положении равновесия длина пружины равна L_0 .
3. Найдите частоту малых колебаний шарика, считая, что при движении шарика газ не перемешивается и не оказывает сопротивления движению шарика.

Задача 58. Скороварка (1999 год)

Известно, что в герметично закрытой кастрюле (скороварке) пища варится быстрее, вследствие того что в ней температура кипения воды выше 100°С . На сколько давление в скороварке должно быть выше атмосферного, для того чтобы температура кипения в ней стала равной 105°С ? Удельная теплота парообразования воды $r = 2250$ кДж/кг. Решите задачу, проанализировав цикл Карно с рабочим телом вода–пар. Насыщенный водяной пар считайте идеальным газом.

Задача 59. Сосуд с водой (2001 год)

В сосуде под поршнем, создающим постоянное давление $P_0 = 1$ атм, находится химически чистое вещество H_2O массой $m = 10$ г. Изобразите график зависимости общей теплоёмкости C содержимого сосуда от температуры T в интервале от $T_1 = -50^\circ\text{C}$ до $T_2 = 150^\circ\text{C}$ и поясните особенности графика.

Примечание. Ниже приведены некоторые справочные данные: плотность льда $\rho_l = 917$ кг/м³, плотность воды $\rho_w = 1000$ кг/м³, удельная теплоёмкость льда $c_l = 2100$ Дж/(кг · °C), удельная теплоёмкость воды $c_w = 4200$ Дж/(кг · °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг, удельная теплота парообразования воды $r = 2,26$ МДж/кг, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К), молярная масса воды $\mu = 18$ кг/кмоль.

Задача 60. Стопка монет (2002 год)

Из очень большого количества одинаковых золотых монет радиусом R и толщиной H каждая сложили стопку. Все соседние монеты разделили бумажными кругами радиусом R и толщиной d каждый. Боковую поверхность стопки монет с прослойками обернули несколькими слоями той же бумаги, так что общая толщина обёртки оказалась равна l . Один торец получившегося цилиндра прижали через слой бумаги толщиной d к термостату, находящемуся при температуре T , а остальная поверхность цилиндра осталась на воздухе, температура T_0 которого поддерживается постоянной (рис. 22). Через некоторое время установилось стационарное распределение температур в стопке монет. Какую тепловую мощность P получает стопка монет от термостата в этом состоянии? Коэффициент теплопроводности μ бумаги много меньше аналогичной величины для золота. Известны соотношения между размерами: $d < l \ll H < R$. Все неровности монет были предварительно спилены, так что воздушных пустот внутри цилиндра нет.

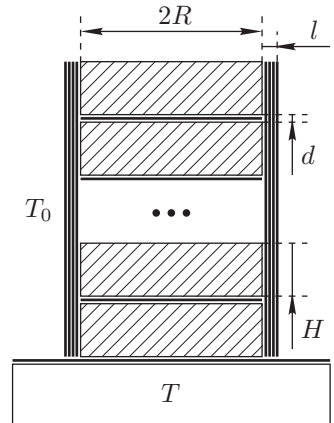


Рис. 22

Задача 61. Фотонный газ (2003 год)

С точки зрения квантовой физики электромагнитное излучение представляет собой множество хаотически движущихся и не взаимодействующих друг с другом частиц — фотонов. Другими словами, электромагнитное излучение представляет собой фотонный газ, который во многом аналогичен идеальному газу, рассматриваемому в молекулярно-кинетической теории. Есть и существенные отличия. Все фотоны движутся с одинаковой скоростью (скоростью

света в вакууме), и их число не остаётся постоянным при изменении состояния: фотоны рождаются и поглощаются. Тем не менее, ряд свойств фотонного газа можно установить, опираясь на молекулярно-кинетическую теорию идеальных газов, что и предлагается проделать в данной задаче.

1. Докажите, что давление P , оказываемое частицами идеального газа на плоскую поверхность, определяется формулой

$$P = \frac{1}{3}n \langle \vec{v} \cdot \vec{p} \rangle, \quad (1)$$

где n — число частиц в единице объёма, $\vec{v}$ — скорость частиц, $\vec{p}$ — их импульс, $\langle \vec{v} \cdot \vec{p} \rangle$ — среднее значение скалярного произведения $\vec{v} \cdot \vec{p}$.

2. Используя формулу для давления частиц идеального газа (1), докажите, что давление света P можно вычислить по формуле

$$P = \frac{1}{3}u, \quad (2)$$

где u — объёмная плотность энергии излучения.

3. Докажите, рассматривая цикл Карно для фотонного газа при малых изменениях температуры и объёма, что световое давление пропорционально четвёртой степени абсолютной температуры.
4. Используя результаты предыдущего пункта, получите закон Стефана–Больцмана для мощности излучения абсолютно чёрного тела с единицы поверхности:

$$W = \sigma T^4,$$

где σ — постоянная Стефана–Больцмана, а T — абсолютная температура. Получите соотношение между σ и коэффициентом пропорциональности между давлением и четвёртой степенью температуры. При выводе учтите, что число частиц газа, соударяющихся с единицей поверхности стенки в единицу времени, равно

$$\nu = \frac{1}{4}n \langle v \rangle,$$

где n — число частиц в единице объёма, а $\langle v \rangle$ — средний модуль скорости частиц.

5. Вычислите КПД цикла, совершаемого над фотонным газом. Цикл состоит из четырёх последовательных процессов:
 - 1) изобарическое расширение из состояния с температурой T_1 ,
 - 2) переход в состояние с температурой T_2 по закону $PV^{4/3} = \text{const}$,
 - 3) изобарическое сжатие,
 - 4) переход в исходное состояние снова по закону $PV^{4/3} = \text{const}$.

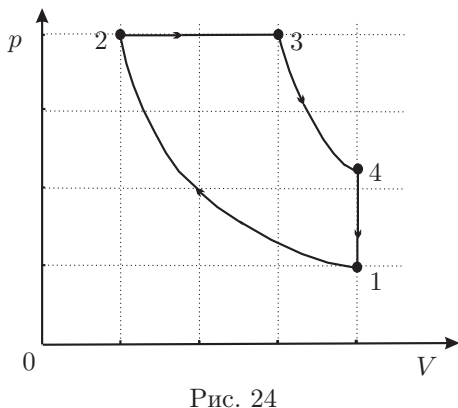
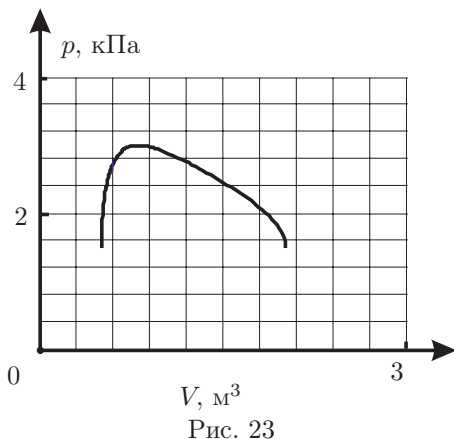
Задача 62. Процесс над газом (2004 год)

Над одним молем идеального газа совершают процесс, показанный на рис. 23. Найдите максимальную температуру газа в течение этого процесса (процесс считать квазистатическим).

Задача 63. Термодинамический цикл (2004 год)

С одним молем идеального одноатомного газа провели замкнутый цикл, изображённый на рис. 24, где 1–2 — изотерма, 2–3 — изобара, 3–4 — политропа, для которой $C = R/2$, и 4–1 — изохора. Минимальная температура, достигаемая газом в цикле, $T_{\min} = 300$ К. Политропическим процессом называется процесс, происходящий с постоянной теплоёмкостью C .

1. Укажите точки на цикле, в которых газ достигает максимальной $T_{\max}$ и минимальной $T_{\min}$ температуры, и определите $T_{\max}$.
2. Определите количество теплоты Q_+ , подведённое к газу за цикл.
3. Определите работу A газа за цикл.
4. Определите КПД цикла η и сравните с КПД идеальной тепловой машины, работающей между нагревателем и холодильником с температурами соответственно $T_{\max}$ и $T_{\min}$.



Задача 64. Чайник (2005 год)

В чайник с нагревательным элементом мощностью $P = 2200$ Вт налили $V_1 = 1,5$ л холодной воды и включили его. Когда вода закипела, он автоматически отключился. Через $\tau_1 = 60$ с его снова включили, а ещё через $\tau_2 = 6$ с вода закипела и чайник выключился. Сразу после этого его ещё раз включили, но сняв крышку. Автоматический выключатель, срабатывающий под давлением пара, перестал действовать, и вода из чайника начала выкипать. Через $\tau_3 = 240$ с после последнего включения измерили объём оставшейся воды. Он оказался равным $V_2 = 1,3$ л. Каково значение удельной теплоты парообразования воды r ? Удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · К), плотность $\rho = 1000$ кг/м³. Теплоёмкостью чайника пренебречь.

Задача 65. Грелка в аквариуме (2007 год)

Герметичный аквариум с теплоизолированными стенками содержит воду массой $M = 100$ кг. Над поверхностью воды в аквариуме имеется небольшое количество воздуха. В толще воды закрепили резиновую грелку G , имеющую форму плоского неправильного треугольника, вершины которого находятся на глубинах $h_1 = 30$ см, $h_2 = 40$ см и $h_3 = 65$ см от поверхности воды (рис. 25). Равномерно по всей поверхности грелки проделали $N = 1000$ маленьких отверстий. Горлышко грелки подсоединено через шланг S к непрерывно работающему компрессору K , который закачивает в грелку воздух, находящийся внутри аквариума над поверхностью воды. В результате этого каждое отверстие в грелке испускает в среднем один пузырёк радиусом $r = 1$ мм за время $\tau = 0,3$ с. Оцените время t , за которое вода в сосуде нагреется на $\Delta T = 1^\circ\text{C}$.

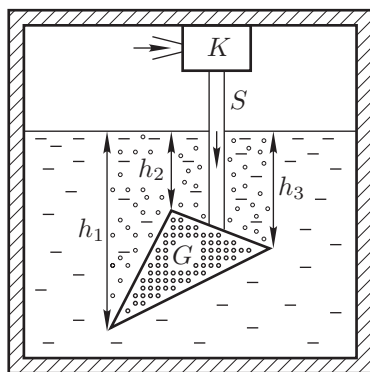


Рис. 25

Удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · °C), плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Неидеальность компрессора, вязкость воздуха и поверхностное натяжение воды не учитывайте.

Задача 66. Политропы (2007 год)

С некоторым количеством идеального газа провели ряд опытов: процессы NI , NA , NB_1 , NB_2 и NB_3 (рис. 26). Начальное состояние газа (точка N) было одинаковым во всех опытах: газ находился под давлением P_0 и занимал объём V_0 . Дополнительно было измерено отношение молярных теплоёмкостей газа при постоянном давлении и при постоянном объёме: $\gamma = C_P/C_V$. Уни-

версальная газовая постоянная R известна. Изображённые графики процессов являются качественными и не предназначены для количественных измерений.

1. В малой области вблизи некоторой точки любой квазистатический процесс можно считать линейным, то есть полагать, что давление является линейной функцией объёма: $P(V) = aV + b$. Найдите коэффициенты a_i и a_a соответственно для линейного приближения изотермы NI и адиабаты NA вблизи точки N .

2. Процессы NB_1 , NB_2 и NB_3 являются политропическими (теплоёмкость постоянна), а их сравнительные графики изображены на рис. 26. Определите знак теплоёмкостей C_1 , C_2 и C_3 в этих процессах.

3. Произвольный политропический процесс (политропа) описывается уравнением $PV^n = \text{const}$, где $n = (C - C_P)/(C - C_V)$ — постоянная политропы, C — молярная теплоёмкость в рассматриваемом процессе. Касательные к графикам процессов NI , NA и NB_2 в точке N пересекают некоторую изохору в точках I_x , A_x и B_x соответственно. Известно, что NB_x — медиана треугольника NI_xA_x . Определите величины n и C для процесса NB_2 .

4. В точках I и A газ занимает одинаковый объём αV_0 , где α — известное число. Определите КПД η тепловой машины, работающей по циклу $NIAN$.

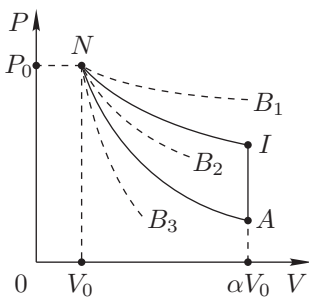


Рис. 26

Задача 67. Суп экспериментатора Глюка (2008 год)

Однажды зимой экспериментатор Глюк решил вскипятить воду на свежем воздухе (температура воздуха $t_0 = 0^\circ\text{C}$, атмосферное давление $P_0 = 101$ кПа, относительная влажность воздуха $\varphi = 25\%$). Для этого он налил в кастрюлю достаточное количество холодной воды и развёл под ней небольшой костёр. Поперечное сечение кастрюли имеет форму неправильного треугольника площадью $S = 100$ см². Стенки кастрюли тонкие, а их температура всё время равна температуре воды. Однородная треугольная золотая крышка массой $m = 20$ кг герметично закрывает кастрюлю, но не крепится к ней.

1. При какой температуре t_1 крышка в первый раз приподнимется, чтобы выпустить пар из кастрюли?

2. Какую температуру t_2 будет иметь вода после длительного, но не очень активного кипения?

3. До какой температуры t_3 должна остыть вода после этого, чтобы Глюк не смог открыть крышку, прилагая к ней вертикальную силу $F = 300$ Н?

Получать ответы в общем виде не требуется. Зависимость давления P насыщенного пара от температуры t приведена на графике (рис. 27). Ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с².

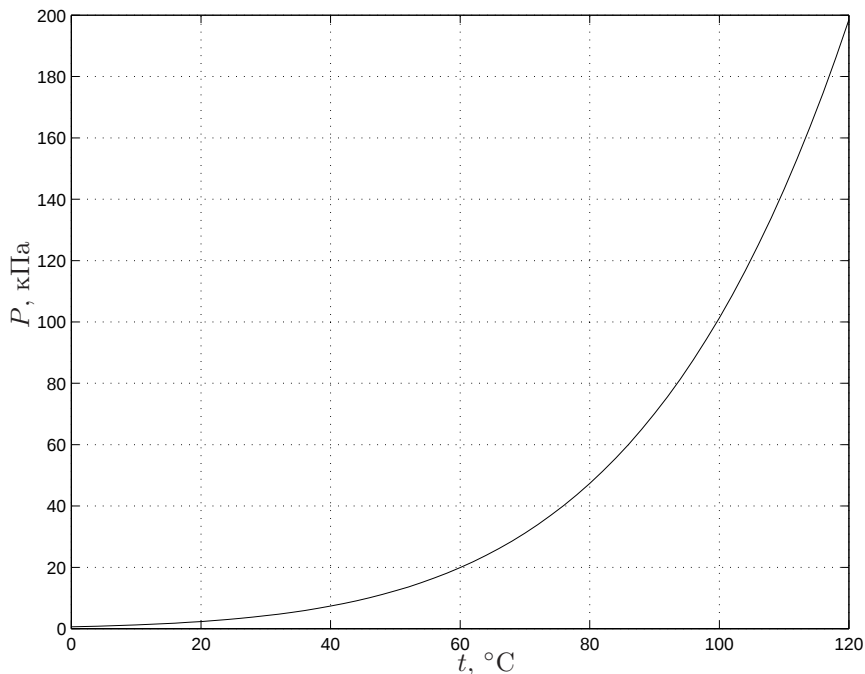


Рис. 27

Задача 68. Бытовой холодильник (2008 год)

Бытовой холодильник имеет ручку регулировки температуры в камере. Требуемая температура поддерживается с помощью специального устройства, которое периодически включает и выключает холодильную установку. Когда температура в камере поднимается выше требуемой более чем на некоторую небольшую фиксированную величину, данное устройство включает холодильную установку. Когда температура в камере опускается ниже требуемой более чем на некоторую небольшую фиксированную величину, данное устройство выключает холодильную установку.

В установившемся режиме работы холодильника в камере поддерживалась температура $T_1 = 275 \text{ К}$. Ручку регулировки температуры повернули, и через некоторое время в камере установилась температура $T_2 = 270 \text{ К}$.

1. Во сколько раз n изменилась мощность теплопередачи от окружающей среды к камере?
2. Во сколько раз p изменилась мощность теплопередачи от камеры к холодильной установке во время её работы?
3. Во сколько раз α изменилась доля времени, в течение которого работает холодильная установка?

4. Во сколько раз β изменилось время непрерывной работы холодильной установки?

Представьте ответы в общем виде и рассчитайте численные значения с точностью до третьей цифры после запятой.

Предельно низкая температура, которая может быть достигнута при непрерывной работе холодильной установки, $T_3 = 260$ К. Комнатная температура $T_0 = 295$ К. Мощность, потребляемая холодильником от электрической сети во время работы холодильной установки, постоянна. Различием температур в разных частях камеры можно пренебречь. Считайте, что холодильный коэффициент бытового холодильника в некоторое фиксированное число раз меньше аналогичной величины для идеального холодильника, работающего по циклу Карно в тех же условиях.

Примечание. Холодильный коэффициент $\mu = Q/A$, где Q — количество теплоты, отнятое за цикл у охлаждаемого тела, A — работа, совершённая за цикл над рабочим телом.

Задача 69. «Кругловатый» цикл (2009 год)

С одноатомным идеальным газом был совершён цикл (рис. 28), который в PV -координатах при выбранных масштабах по осям состоит из двух участков: четверти окружности с центром в точке $(2V; P)$ и четверти окружности с центром в точке $(V; 2P)$. Найдите термодинамический КПД η этого цикла.

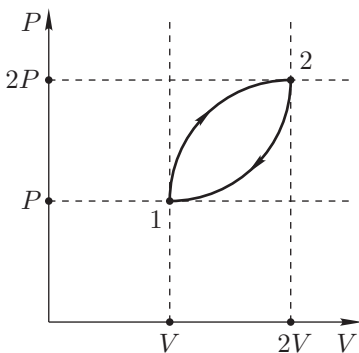


Рис. 28

Задача 70. Относительное равновесие (2009 год)

Два сосуда объёмами $V_1 = 4,0$ л и $V_2 = 1,0$ л соединены короткой трубкой, которая первоначально перекрыта вентилем. В первом сосуде находится влажный воздух под давлением $P_1 = 2,40$ атм с относительной влажностью $\varphi_1 = 90\%$, а во втором — водяной пар под давлением $P_2 = 0,85$ атм. Вентиль открывают, и в сосудах быстро устанавливается одинаковое давление. Затем при открытом вентиле медленно устанавливается термодинамическое равновесие и достигается одинаковая влажность в обоих сосудах.

1. Найдите давление P влажного воздуха после установления термодинамического равновесия.

2. Найдите относительную влажность φ воздуха после установления термодинамического равновесия.

3. Найдите минимальное давление $P_{\min}$ в первом сосуде в процессе установления термодинамического равновесия.

4. Найдите минимальную влажность $\varphi_{\min}$ в первом сосуде в процессе установления термодинамического равновесия.

Толстые металлические стенки сосудов и скомканная внутри проволока обеспечивают постоянную температуру газов $T = 373$ К. Объёмом трубки и проволоки, а также возможностью возникновения перенасыщенного пара можно пренебречь. В вопросах 1 и 2 требуются ответы в общем виде и в виде числа, а в вопросах 3 и 4 — только численные ответы.

Задача 71. Холодильник-кондиционер (2010 год)

У экспериментатора Глюка стал слабо морозить однокамерный холодильник для хранения продуктов: при работе на полную мощность в камере поддерживалась температура лишь $T_x = +10,0^\circ\text{C}$, причём (что самое страшное для не терпящего жару Глюка!) температура в комнате из-за работы холодильника поднималась до $T_1 = +30,5^\circ\text{C}$, хотя на улице было всего $T_0 = +30,0^\circ\text{C}$.

Поэтому Глюк решил переделать холодильник в кондиционер: прикрепил его снаружи к окну так, что дверца холодильника оказалась в плоскости окна (на месте предварительно вынутого стекла), после чего удалил эту дверцу. Какая температура T_2 установится в комнате теперь?

Холодильник считайте идеальным, поток тепла через дверцу (пока она была) и изменение площади оконных стёкол из-за переделки не учитывайте.

Задача 72. Водоём зимой (2011 год)

Большой открытый водоём цилиндрической формы заполнен водой глубиной $H = 1$ м при температуре $T_1 = 7^\circ\text{C}$. Внезапно пошёл снег крупными хлопьями с температурой снежинок $T_2 = 0^\circ\text{C}$. На берегу толщина слоя снега растёт со скоростью $v = 0,1$ м/ч, а его масса, отнесённая к площади, — со скоростью $\mu = 10$ кг/(м² · ч). Через какое время t поверхность водоёма покроется сухим снегом толщиной $h = 0,05$ м? Найдите изменение ΔH глубины воды к этому моменту. Плотность льда $\rho_s = 900$ кг/м³, плотность воды $\rho_w \approx 1000$ кг/м³ немного зависит от температуры и имеет максимальное значение при $T_{\max} = 4^\circ\text{C}$. Удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг. Теплопроводностью воды, снега и воздуха можно пренебречь.

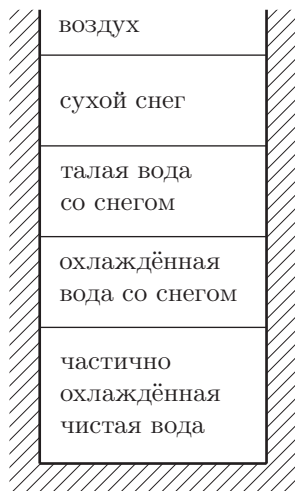


Рис. 29

Подсказка. На рис. 29 качественно показано состояние, в котором будет находиться система в искомый момент времени.

Задача 73. Абстрактный процесс (2011 год)

В ходе квазистатического изотермического процесса идеальный газ побывал ровно по одному разу во всех состояниях, в которых его давление P и объём V удовлетворяют уравнению

$$\left| \frac{P - P_0}{\Delta P} \right| + \left| \frac{V - V_0}{\Delta V} \right| = 1,$$

где P_0 , ΔP , V_0 , ΔV — известные константы соответствующей размерности, причём $P_0 > \Delta P > 0$ и $V_0 > \Delta V > 0$. В начальном состоянии в сосуде находился только газ X , а увеличение количества газа происходило только за счёт добавления газа Y . Молярные массы обоих газов одинаковы.

1. Найдите модуль работы A газа во всём процессе.
2. Во сколько раз α увеличилось количество газа к концу процесса?
3. Найдите долю β газа X в смеси в конце процесса.

Задача 74. Авторская методика заварки чая (2012 год)

Экспериментатор Глюк решил заварить холодный чай по своей авторской методике. Для этого он взял пустую кастрюлю диаметром $d = 23$ см и высотой $h = 13$ см и стал последовательно наливать в неё порции воды объёмом $\Delta V = 100$ мл каждая, причём первая порция имела температуру $t_1 = 1^\circ\text{C}$, а каждая следующая — на $\Delta t = 1^\circ\text{C}$ выше, чем предыдущая. Когда кастрюля заполнилась, Глюк высыпал в неё один грамм чая и перемешал. Какую температуру t чая предпочитает Глюк, если судить по его авторской методике? Общая теплоёмкость стенок кастрюли $C = 420$ Дж/К, а её начальная температура $t_0 = 19^\circ\text{C}$. Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³, удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · °C).

Примечание. Ответ в общем виде в данной задаче не требуется.

P.S. Как вы думаете, почему наш персонаж любит чай именно такой температуры? (Вопрос шуточный и в баллах не оценивается. ☺)

Задача 75. Тонущий стакан (2012 год)

Большой неподвижный герметичный сосуд частично заполнен водой и поддерживается при постоянной температуре T . В воду пустили плавать открытый сверху цилиндрический тонкостенный стакан радиусом r , причём края стакана оказались на h выше, а дно на H ниже уровня воды (рис. 30). Дно стакана утяжелено, так что стакан плавает вертикально. При температуре T давление насыщенных паров воды равно P . Плотность ρ_w и молярная масса μ воды известны. Коэффициент прилипания молекул пара к поверхности воды равен α .

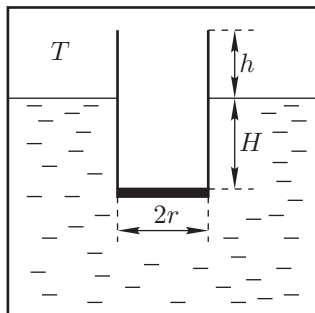


Рис. 30

1. Какая минимальная масса m воды должна накопиться в стакане, чтобы он утонул? Поверхностным натяжением можно пренебречь.
2. Найдите поток Φ молекул, покидающих поверхность воды.
3. Найдите разность концентраций Δn пара над поверхностями воды в стакане и сосуде, предполагая, что процессы диффузии протекают много быстрее процессов испарения.
4. Оцените время t , через которое стакан утонет.

Примечание. Коэффициент прилипания — это вероятность того, что молекула пара, налетевшая на поверхность воды, присоединится к воде. Поток — это количество, отнесённое к площади и времени.

Условия задач. Электричество

Задача 76. Резистор или диод (1995 год)

К клеммам B и C электрической цепи, схема которой показана на рис. 31, можно подключать либо резистор сопротивлением R , либо идеальный диод в любой полярности. Для каждого из трёх возможных подключений найдите зависимость силы тока I через амперметр от сопротивления r переменного резистора и изобразите её на графике. ЭДС $\mathcal{E}$ источника и сопротивление R каждого из постоянных резисторов известны. Внутренними сопротивлениями источника и амперметра можно пренебречь. Идеальный диод никак не препятствует прохождению тока в прямом направлении и абсолютно не пропускает ток в обратном направлении.

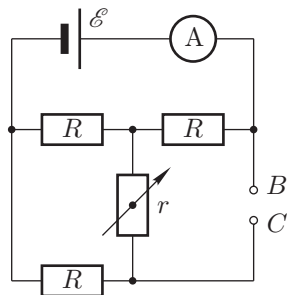


Рис. 31

Задача 77. Два кольца (1995 год)

Два одинаковых тонких кольца радиусами $R = 50$ мм имеют общую ось и расположены в параллельных плоскостях на расстоянии $d = 12$ см друг от друга. По одному кольцу распределён заряд $q_1 = 0,60$ мкКл, а по второму — заряд $q_2 = 0,82$ мкКл. Найдите работу A электростатических сил при перемещении точечного заряда $q = 3,0$ нКл из центра первого кольца в центр второго.

Задача 78. Дуговой разряд (1998 год)

В некоторых случаях мощную электрическую цепь оказывается невозможно выключить обычными способами из-за возникновения дугового разряда между размыкаемыми контактами (особенно сильно эффект проявляется при наличии катушек большой индуктивностью, но в данной задаче они не рассматриваются). Цепь, состоящую из источника ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В и резистора сопротивлением R , выключают с помощью рубильника K (рис. 32).

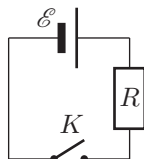


Рис. 32

1. При каких сопротивлениях R может возникнуть дуговой разряд?

2. Найдите силу тока I в дуговом разряде, если $R = 8$ Ом.

Связь между напряжением U и силой тока I , именуемая обычно ВАХ — вольт-амперная характеристика, дугового разряда имеет вид

$$U = a + \frac{b}{I}, \quad \text{где} \quad a = 10 \text{ В}, \quad b = 100 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Задача 79. Заряженное кольцо (2001 год)

Тонкий диск радиусом R и кольцо, изготовленное из проволоки малого диаметра, расположены соосно (рис. 33). По кольцу равномерно распределён такой заряд q , что силовые линии, выходящие из кольца под углом $\alpha = 45^\circ$ к оси симметрии системы, как раз касаются края диска, который не заряжен (плотность зарядов на диске везде равна 0). С какой силой будут взаимодействовать кольцо и диск, если диск также зарядить зарядом q , равномерно распределённым по поверхности диска?

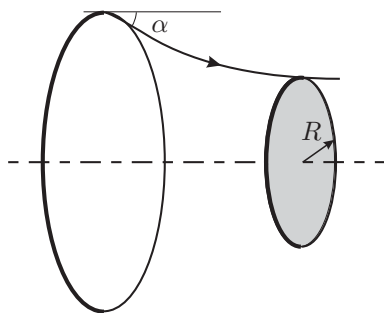


Рис. 33

Задача 80. Диоды (2002 год)

В схеме, изображённой на рис. 34, имеются четыре диода. Известно, что при любом напряжении, подведённом к выводам схемы, ток через амперметр не течёт. Вольт-амперные характеристики трёх диодов D_1 , D_2 и D_3 известны (рис. 35). Постройте вольт-амперную характеристику четвёртого диода.

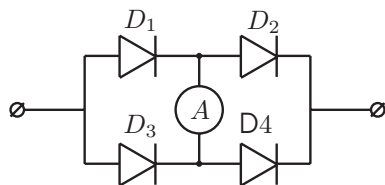


Рис. 34

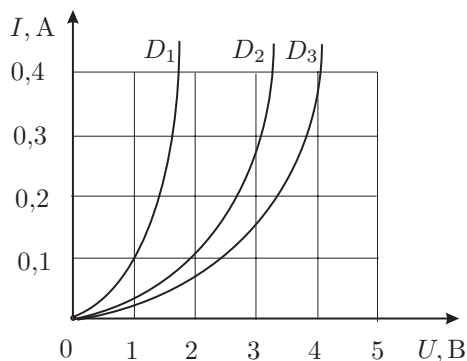


Рис. 35

Задача 81. ВАХ цепочек (2002 год)

В задаче исследуются вольт-амперные характеристики (ВАХ) цепочек, содержащих нелинейные элементы.

1. Бесконечная цепочка (рис. 36) составлена из резисторов сопротивлением R и диодов с вольт-амперной характеристикой, показанной на рисунке. Найдите вольт-амперную характеристику этой цепочки на участке $U \gg \Delta U$.

2. Цепочка, изображённая на рис. 37, состоит из N звеньев. Все элементы цепочки имеют такие же характеристики, как и в предыдущем пункте. Ток через последнее звено равен I_0 . Найдите ток I через всю цепь и напряжение U на ней. При решении задачи можно воспользоваться формулой n -го члена последовательности Фибоначчи ($a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$):

$$a_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

3. Постройте вольт-амперную характеристику бесконечной цепочки, состоящей из одинаковых диодов и одинаковых лампочек (рис. 38). Вольт-амперные характеристики диода и лампочки приведены на рис. 38 и обозначены VD и HL соответственно.

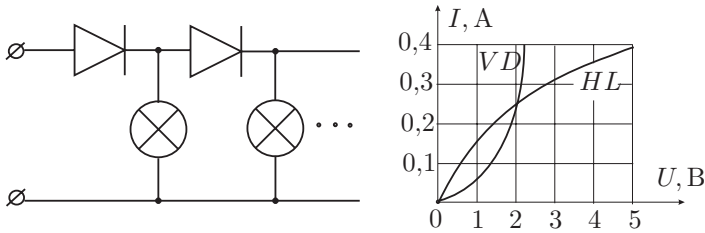


Рис. 36

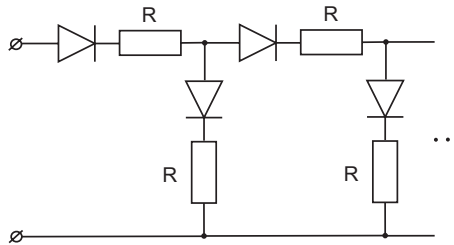


Рис. 37

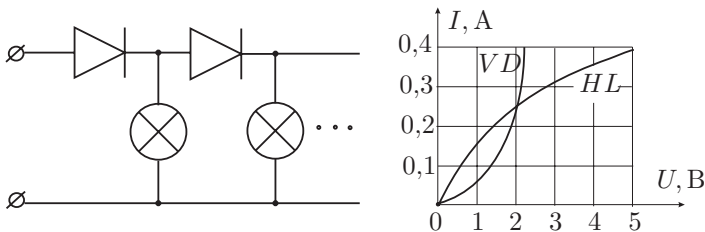


Рис. 38

Задача 82. Дрейф (2002 год)

Вблизи длинного прямолинейного провода, по которому течёт ток I , поместили частицу с зарядом q и массой m на расстоянии r_0 от провода и сообщили ей скорость v_0 , направленную против тока.

1. Найдите минимальное $r_{\min}$ и максимальное $r_{\max}$ расстояния от частицы до провода в процессе движения. На каком расстоянии от провода скорость частицы направлена перпендикулярно к нему?
2. Найдите скорость $\vec{u}$ дрейфа частицы, то есть скорость смещения вдоль провода максимально и минимально удалённых от него точек траектории при условии

$$\alpha = 2\pi \frac{mv_0}{\mu_0 q I} \ll 1,$$

где μ_0 — магнитная постоянная.

Задача 83. Шестиугольник (2003 год)

В доску в вершинах правильного шестиугольника вбиты шесть гвоздей. Все гвозди попарно соединены резисторами с сопротивлением R . Найдите сопротивление между двумя соседними гвоздями.

Задача 84. Конечная цепочка (2003 год)

В электрической цепи, изображённой на рис. 39, ЭДС источника $\mathcal{E} = 10$ В. Звено R_2 – R_3 повторяется 17 раз.

1. Найдите ток, текущий через резистор R_4 , если $R_1 = R_3 = R_4 = 3$ Ом, $R_2 = 6$ Ом.
2. Анализ сложных электрических цепей можно упростить, если участок цепи, содержащий несколько источников и резисторов, заменить одним эквивалентным источником с ЭДС $\mathcal{E}_e$ и внутренним сопротивлением R_e . Каким эквивалентным источником (укажите $\mathcal{E}_e$ и R_e) можно заменить участок A – $\mathcal{E}$ – B цепи, изображённой на рис. 39?
3. В цепи, изображённой на рис. 39, $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 1$ Ом, $R_4 = 17$ Ом. Найдите ток через резистор R_4 .

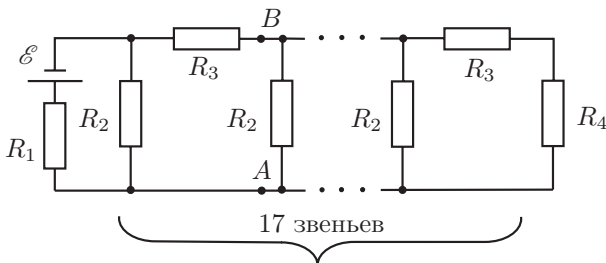


Рис. 39

Задача 85. Счётчик Гейгера (2003 год)

В задаче исследуются физические явления, имеющие место в счётчике Гейгера. Счётчиком Гейгера называют прибор, предназначенный для регистрации элементарных частиц посредством измерения тока в газе, вызванного этими частицами. Он представляет собой камеру, заполненную газом, например аргон.

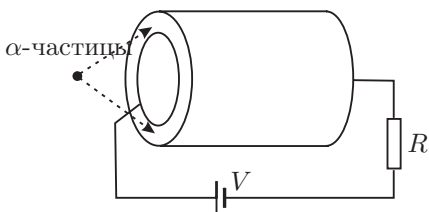


Рис. 40

В камере имеется два электрода, чаще всего в виде коаксиальных (соосных) цилиндров (рис. 40), к которым через резистор R подаётся электрическое напряжение V . Образовавшиеся при ионизации ионы и электроны движутся к противоположным электродам. Появляющийся в результате этого ток создаёт на резисторе R напряжение, которое регистрируется и даёт информацию о прошедших через камеру элементарных частицах.

Исследуйте процессы, происходящие в счётчике Гейгера при регистрации α -частиц (ядер атомов гелия). Рекомбинацией ионов, а также возникновением лавины ионов пренебречь.

1. Электроёмкость конденсатора, образованного электродами счётчика, $C = 45$ пФ, сопротивление резистора $R = 10$ МОм. Счётчик регистрирует α -частицы с энергией $E = 5,3$ МэВ. Длина их свободного пробега в газе, заполняющем счётчик, меньше размеров камеры. Энергия, необходимая для образования пары ионов, заряд каждого из которых равен одному элементарному заряду, $E_i = 35$ эВ. Как с течением времени будет изменяться напряжение на резисторе после попадания в камеру одной α -частицы? Произведение RC много больше времени движения образующихся ионов и электронов в межэлектродном пространстве.

2. Радиус внутреннего цилиндрического электрода (анода) счётчика равен $R_a = 3,0$ мм, а внешнего $R_c = 10,0$ мм. В результате пролёта ионизирующих частиц на электродах осели ионы, заряд которых, приходящийся на единицу длины цилиндров, равен λ . Получите выражение для напряжённости поля $E(r)$ и потенциала $\varphi(r)$, отсчитываемого от катода, в зависимости от расстояния r до оси цилиндров ($R_a \leq r \leq R_c$). При какой разности потенциалов между электродами произойдёт пробой газа, если он наступает при напряжённости $E_b = 3$ МВ/м?

3. На счётчик, описанный в предыдущем пункте, падает пучок α -частиц, ионизирующий каждую секунду Γ молекул. Скорость движения v возникающих в результате ионизации положительных ионов пропорциональна напряжённости поля ($v = \mu E$, где μ — подвижность ионов). Найдите установившееся распределение плотности положительных зарядов в зависимости от расстояния до оси. Рекомбинацией ионов и полем объёмных зарядов пренебречь. Считать, что в установившемся режиме заряд единицы длины цилиндров равен λ .

Задача 86. Полубесконечная цепочка (2004 год)

Определите сопротивление полубесконечной цепи между точками A и B , если сопротивление каждого звена равно R (рис. 41).

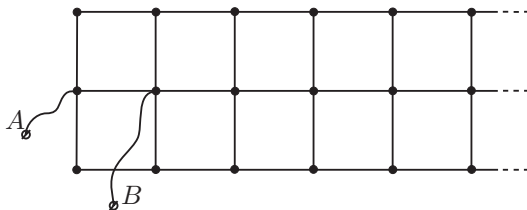


Рис. 41

Задача 87. Эффект Холла (2004 год)

Введём в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ полупроводниковую пластинку толщиной a (рис. 42), по которой течёт ток I . Между поверхностями A и B возникает напряжение U , пропорциональное току I :

$$U = R \frac{BI}{a}.$$

Описанное явление называют эффектом Холла. Величина R — коэффициент Холла. Определите коэффициент Холла в электронно-дырочном полупроводнике.

Ток в таком проводнике обусловлен как электронами, концентрация которых n , подвижность μ_n , так и дырками, концентрация которых p , а подвижность μ_p . Напомним, что подвижностью называют отношение скорости направленного движения частиц к вызывающей это движение силе, приходящейся на их единичный заряд.

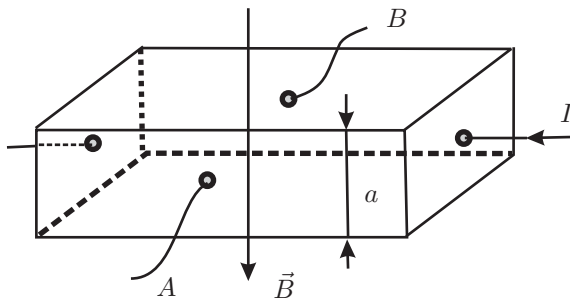


Рис. 42

Задача 88. Батарейки (2005 год)

Имеется батарейка с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и внутренним сопротивлением r_1 , а также некоторое количество одинаковых батареек с ЭДС $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1/2$. Если последовательно с батареей $\mathcal{E}_1$ подключить некоторое количество батареек $\mathcal{E}_2$ и нагрузку, то сила тока в цепи при любом количестве батареек $\mathcal{E}_2$ будет одинаковой. Если же к батарейке $\mathcal{E}_1$ параллельно подсоединить любое число батареек $\mathcal{E}_2$ и ту же нагрузку, то сила тока через неё останется равной прежнему значению. Полярности всех батарей считать одинаковыми. Найдите сопротивление нагрузки R , а также внутреннее сопротивление r_2 батареек $\mathcal{E}_2$.

Задача 89. Молекулярные кристаллы (2005 год)

В молекулярных кристаллах упорядоченно расположены сравнительно слабо связанные друг с другом структурные единицы, представляющие собой отдельные атомы (или группы сильно связанных между собой атомов). Простейшие молекулярные кристаллы могут образовывать атомы инертных газов, например аргона Ar. Кристалл аргона и изучается в данной задаче.

На сравнительно больших расстояниях друг от друга атомы инертных газов притягиваются слабыми силами, называемыми силами Ван-дер-Ваальса. При значительном сближении атомов проявляется их интенсивное отталкивание. Такое взаимодействие неплохо описывается так называемым потенциалом Леннарда-Джонса:

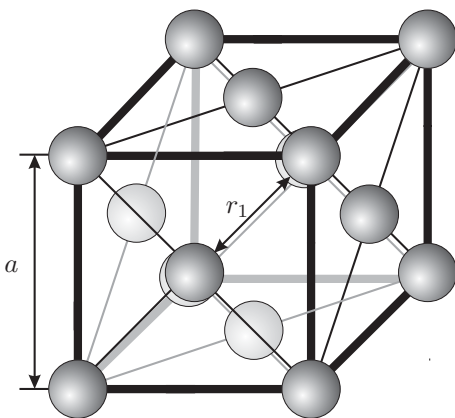


Рис. 43

$$U(r) = 4\varepsilon \left(\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right).$$

Здесь $U(r)$ — потенциальная энергия двух атомов, находящихся на расстоянии r друг от друга; ε и σ — постоянные величины, которые для атомов аргона имеют следующие значения: $\varepsilon = 0,0104$ эВ, $\sigma = 3,40$ Å.

1. Изобразите схематично вид зависимости $U(r)$.
2. Определите равновесное расстояние r_0 , на котором находились бы два атома аргона в отсутствие других атомов.

Элементарная ячейка кристалла аргона (рис. 43) представляет собой гра-
нецентрированный куб. Атомы, которые можно считать классическими части-

цами, движутся вблизи узлов решётки, совпадающих с вершинами куба и центрами его граней. Кинетическая энергия атомов мала по сравнению с потенциальной энергией. В этом приближении приемлема показанная на рис. 43 модель элементарной ячейки, состоящей из неподвижных шаров, расположенных в узлах решётки.

3. Покажите, что энергия взаимодействия атома аргона с кристаллом E (энергия связи) может быть представлена в виде

$$E = 4\varepsilon \left(A \left(\frac{\sigma}{r_1} \right)^{12} - B \left(\frac{\sigma}{r_1} \right)^6 \right),$$

где r_1 — расстояние между ближайшими соседями. Найдите численные значения коэффициентов A и B , учитывая только вклад от шести групп ближайших атомов (в каждую группу входят атомы, находящиеся на равном расстоянии от рассматриваемого атома).

4. Определите постоянную решётки a (рис. 43) для кристалла аргона.
5. Найдите модуль всестороннего сжатия κ кристалла аргона, то есть величину $\kappa = -V \frac{dp}{dV}$, характеризующую изменение его объёма dV при изменении внешнего давления на dp .

Задача 90. Колебания в цепи с диодами (2005 год)

Цепь состоит из двух конденсаторов ёмкостями C_1 и C_2 , двух катушек индуктивностями L_1 и L_2 , двух идеальных диодов D_1 и D_2 и ключа K (рис. 44). В момент замыкания ключа (время $t = 0$) ток в цепи не тёк, конденсатор C_1 был не заряжен, а конденсатор C_2 имел начальное напряжение U_0 .

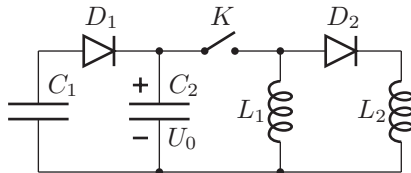


Рис. 44

1. Найдите длительность τ переходного процесса, то есть момент времени τ , начиная с которого процесс станет периодическим.
2. Определите период T колебаний в установившемся режиме после завершения переходного процесса.
3. Найдите напряжения U_1 и U_2 на конденсаторе C_2 и укажите его положительно заряженную обкладку в моменты времени, когда соответственно в первый и второй раз после замыкания ключа тока через него не будет.

4. Определите амплитуду A колебаний напряжения на конденсаторе C_2 в установившемся режиме после завершения переходного процесса.

5. Подытожьте ответы на предыдущие вопросы, качественно изобразив график зависимости напряжения U на конденсаторе C_2 от времени t в промежутке от 0 до $\tau + T$. Отметьте на графике координаты характерных точек (максимумов, минимумов, точек пересечения с осями).

Задача 91. Миниатюрный кипятильник (2006 год)

В теплоизолированной пробирке с пренебрежимо малой теплоёмкостью находится $m_1 = 1,0$ г воды и $m_2 = 1,5$ г льда в состоянии термодинамического равновесия. В пробирку помещают миниатюрный кипятильник, который подключён к источнику постоянного напряжения с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В и внутренним сопротивлением $r = 10$ Ом. Вольт-амперная характеристика (ВАХ) кипятильника приведена на графике (рис. 45). Определите, через какое время t вода в пробирке закипит. Удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг $\cdot$ $^{\circ}$ С), удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг.

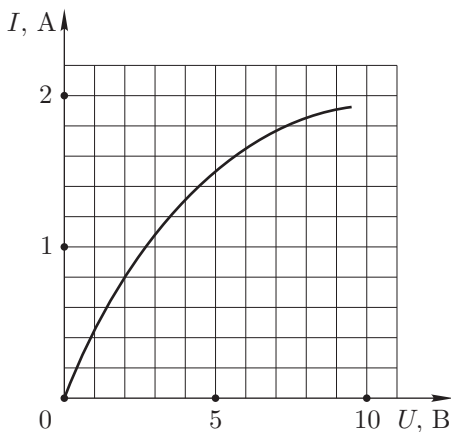


Рис. 45

Задача 92. Схема (2006 год)

Определите сопротивление R цельной проволочной конструкции между точками A и B (рис. 46), если сопротивление каждого участка проволоки, соединяющего любые две соседние точки из девяти отмеченных, равно r .

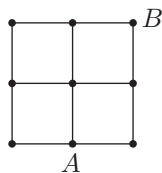


Рис. 46

Задача 93. Диод (2006 год)

В данной задаче рассматривается работа вакуумного диода, состоящего из разогретого сферического катода радиусом r и анода радиусом R , между которыми приложено напряжение U (рис. 47).

1. Пусть заряженная частица с зарядом q и скоростью u_1 переходит из области с потенциалом φ_1 в область с потенциалом φ_2 (рис. 48), причём скорость $\vec{u}_1$ направлена под углом α к нормали границы раздела потенциалов. Определите скорость u_2 и направление движения частицы в области с потенциалом φ_2 .

2. Предположим, что из катода в результате термоэмиссии вылетают электроны с одинаковыми скоростями v_0 во все стороны. Какое тормозящее напряжение U_0 необходимо приложить между электродами, чтобы ток в цепи перестал течь? Модуль заряда электрона равен e .

3. Во многих приложениях важно знать вольт-амперную характеристику используемого элемента или прибора цепи. Предположим, что с единицы поверхности катода в единицу времени изотропно во все стороны вылетает n электронов с одинаковыми скоростями v_0 . Определите аналитический вид вольт-амперной характеристики $I(U)$ рассматриваемого диода. Модуль заряда электрона равен e . Поле пространственных зарядов не учитывайте. Постройте схематичный график зависимости $I(U)$ с указанием характерных точек.

Примечание. Элемент телесного угла, показанный на рис. 49, равен

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi.$$

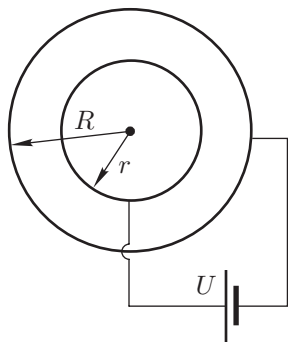


Рис. 47

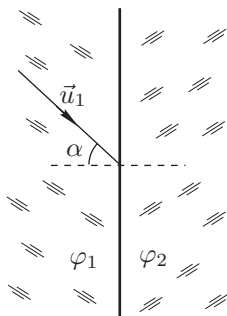


Рис. 48

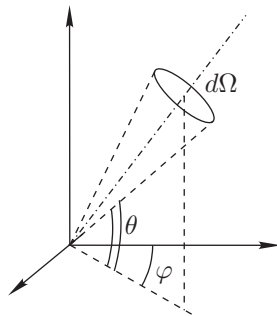


Рис. 49

Задача 94. Электрическая сеточка (2007 год)

Каждый резистор в цепи (рис. 50) имеет сопротивление $R = 100$ Ом. Все амперметры одинаковые, а их внутренние сопротивления много меньше R .

1. Найдите сопротивление R_{BC} цепи между точками B и C .

2. Источник постоянного напряжения с ЭДС $\mathcal{E} = 24$ В подключили плюсом к точке B и минусом к точке C . Найдите силы тока через каждый амперметр. В качестве ответа пометьте стрелочкой направление тока через каждый амперметр и подпишите рядом численное значение силы тока, выраженное в мА (само обозначение «мА» не указывайте, чтобы не загромождать схему).

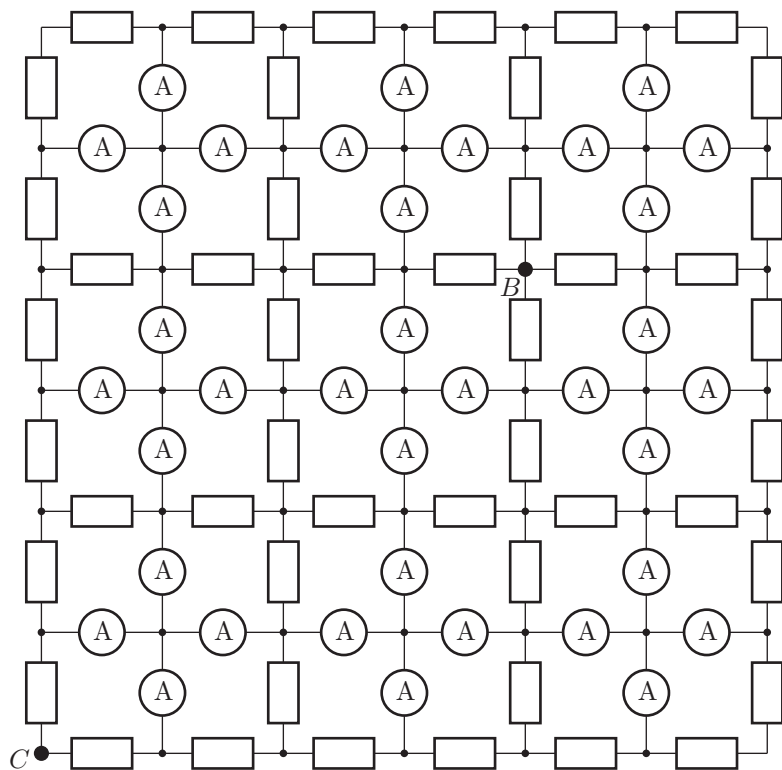


Рис. 50

Задача 95. Диск Корбино (2007 год)

В качестве датчика магнитного поля можно использовать устройство, изображённое на рис. 51 и 52 и называемое диском Корбино. Образец в форме диска радиусом r_2 с концентрическим отверстием радиусом r_1 изготовлен из полупроводника, а к его цилиндрическим поверхностям прилегают кольца из хорошего проводника.

1. Кольца подключают к источнику постоянного напряжения U . Определите распределение напряжённости E электрического поля в образце, пренебрегая зависимостью E от координаты вдоль оси диска.

2. Образец целиком вносят в область однородного магнитного поля так, что плоскость диска оказывается перпендикулярна индукции B магнитного поля. Найдите сопротивление R образца, измеренное между кольцами, если в отсутствие магнитного поля оно было равно R_0 . Именно наличие зависимости $R(B)$ позволяет использовать данное устройство в качестве измерителя поля. Считайте, что сопротивление образца обусловлено только электронами с по-

движностью μ , концентрация которых не изменяется под действием внешних электрических и магнитных полей.

Примечание. Подвижность равна отношению скорости v дрейфа носителей заряда под действием внешнего электрического поля к напряжённости E этого поля: $\mu = v/E$.

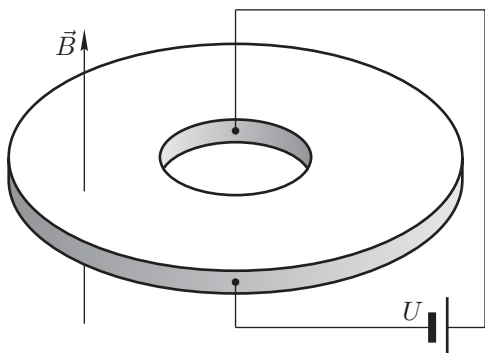


Рис. 51

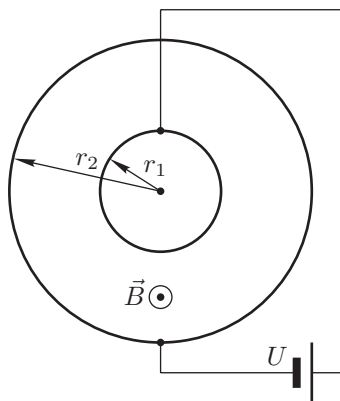


Рис. 52

Задача 96. Олимпийская эмблема (2008 год)

Из пяти кусков проволоки сопротивлением r каждый сделали пять одинаковых колец, которые затем соединили подобно олимпийской эмблеме (рис. 53). Точка A и пять точек соединения делят центральное кольцо на шесть равных дуг. Определите сопротивление R между точками A и B цепи. Сопротивлением в точках контакта можно пренебречь. Kontakтами являются не все пересечения колец, а только те, которые помечены жирными точками.

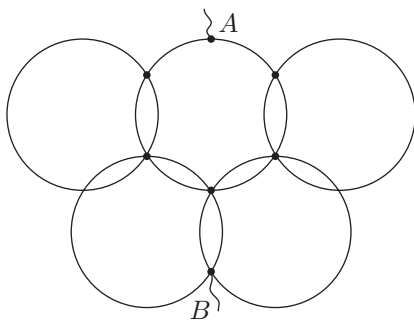


Рис. 53

Задача 97. Заземлённый контур (2008 год)

Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивностью L и конденсатора ёмкостью C , заземлили через резистор малым сопротивлением R (рис. 54). Ко второму выводу контура подключили проводящую сферу радиусом r . Конденсатор зарядили до напряжения U_0 и замкнули ключ. Непосредственно перед замыканием ключа колебаний в цепи не было. Конденсатор и сфера находятся далеко друг от друга.

1. Определите период T колебаний в цепи.
2. Найдите максимальную силу тока $I_{\max}$ в катушке в процессе колебаний.
3. Вычислите добротность Q колебательной системы.

Можно пренебречь сопротивлением катушки, проводов и сферы, а также считать, что количество теплоты, выделяющейся на резисторе за период колебаний, много меньше энергии, запасённой в контуре.

Примечание. Добротность определяется формулой $Q = 2\pi W / \Delta W_T$, где W — полная энергия, запасённая в системе, ΔW_T — потери этой энергии за период.

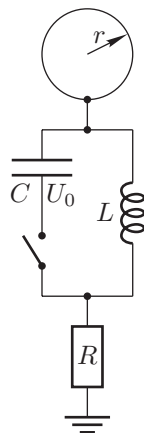


Рис. 54

Задача 98. Заряженный ртутный пузырь (2009 год)

Экспериментатор Глюк, нарушая технику безопасности на космической станции, выдул с помощью тонкой пластмассовой трубочки ртутный пузырь и подал на него высокое напряжение U (относительно бесконечно удалённой точки). Через некоторое время система пришла в равновесие, при этом трубочка оставалась в пузыре и была открытой с обоих концов (рис. 55). Найдите установившийся радиус r ртутного пузыря. Коэффициент поверхностного натяжения ртути σ известен.

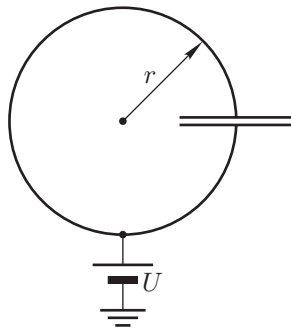


Рис. 55

Задача 99. Электрогаз (2010 год)

На проводящий шар, покрытый тонким слоем изолятора и находящийся в гелиевой среде, подают напряжение U в течение достаточно большого времени, из-за чего на него «налипают» однозарядные ионы. Затем этот шар переносят в большой пустой сосуд и быстро снимают напряжение. Найдите температуру T ионного газа в сосуде.

Задача 100. Треугольный фрактал (2010 год)

Из куска тонкой проволоки сопротивлением $R_0 = 6$ Ом изготовили плоскую фигуру, состоящую из большого числа равносторонних треугольников, стороны каждого из которых, начиная со второго, являются средними линиями предыдущего треугольника (рис. 56). Вычислите сопротивление R полученной фигуры между точками A и B . Все точки соединения хорошо пропаяны.

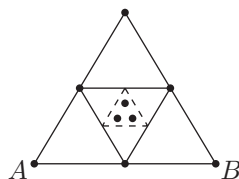


Рис. 56

Задача 101. Алмазный детектор (2010 год)

В современных лабораториях для регистрации элементарных частиц широко используются алмазные детекторы ионизирующего излучения. Рассматриваемый детектор представляет собой пластину из монокристалла алмаза типа 2А (такие алмазы добывают в Якутии) толщиной $d = 300$ мкм с напылёнными на боковые поверхности электродами и подключается к цепи, как показано на рис. 57. Взаимодействие падающего на детектор потока α -частиц с алмазом приводит к образованию электронно-дырочных пар (свободных электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне).

Характерная длина пробега α -частицы в детекторе $\lambda = 13$ мкм. Средняя энергия образования электронно-дырочной пары $\delta = 13$ эВ. Подвижности электронов и дырок в алмазе можно считать одинаковыми и равными $\mu = 0,2$ м²/(В·с). Время жизни электронно-дырочных пар $\tau = 10$ нс.

1. При какой минимальной ЭДС $\mathcal{E}_{\min}$ источника детектор будет работать в режиме спектрометра (то есть через измерительную цепь будет протекать весь образовавшийся в детекторе заряд, пропорциональный энергии α -частицы)? Источник считайте идеальным, а сопротивление R — достаточно малым.

2. Определите кинетическую энергию W одной α -частицы, от которой осциллограф зарегистрировал при $R = 50$ Ом прямоугольный импульс напряжением $U = 0,65$ мВ и длительностью $T = 5$ нс.

3. Найдите ЭДС $\mathcal{E}$ источника в предыдущем опыте.

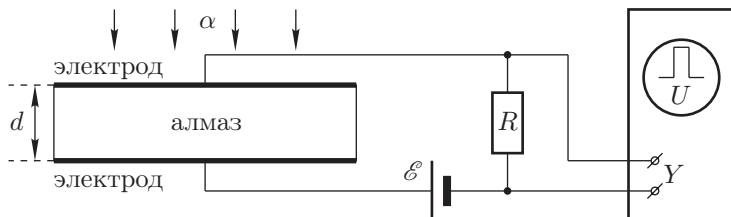


Рис. 57

Примечание. Подвижность равна отношению скорости v дрейфа носителей заряда под действием внешнего электрического поля к напряжённости E

этого поля: $\mu = v/E$. Элементарный заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, массы протона и нейтрона $m_p \approx m_n \approx m = 1,7 \cdot 10^{-27}$ кг, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 102. Неизвестная цепь (2011 год)

Некоторая электрическая цепь имеет два вывода и состоит только из источников постоянного напряжения и резисторов. Когда к выводам цепи подключили идеальный вольтметр, он показал напряжение U_0 . После подключения к выводам цепи резистора сопротивлением R_1 вольтметр стал показывать напряжение U_1 . Какое напряжение U_2 покажет вольтметр, если к выводам цепи подключить дополнительно (не отключая первый резистор) резистор сопротивлением R_2 ?

Задача 103. Подвижность носителей в графене (2011 год)

В 2010 году А. Гейм и К. Новосёлов получили Нобелевскую премию за открытие графена, который представляет собой монослой графита толщиной $h = 0,335$ нм. Графен обладает уникальными электронными свойствами, в частности, высокая подвижность носителей тока делает его перспективным материалом для широкого использования в нанoeлектронике взамен традиционных кремниевых элементов. Данные к предлагаемой ниже задаче взяты из статьи «Электронный транспорт в графене» (Морозов С. В., Новосёлов К. С., Гейм А. К.), опубликованной в журнале «Успехи физических наук» (номер 7 за 2008 год).

Электропроводность графена исследуется следующим образом (рис. 58). Графеновая плёнка длиной L и шириной $H = L/2$ (размер в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка) находится на хорошо проводящей кремниевой подложке, покрытой слоем окиси кремния толщиной $d = 300$ нм с диэлектрической про-

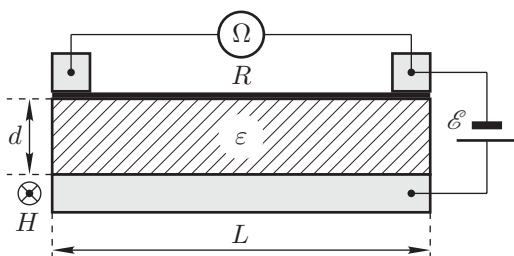


Рис. 58

ницаемостью $\varepsilon = 4,5$. Концентрация собственных свободных носителей тока в графене очень мала, однако если между графеновой плёнкой и кремниевой подложкой приложить напряжение $\mathcal{E}$, то можно значительно увеличить концентрацию электронов (как говорят, допировать электронами), управляя таким образом сопротивлением R графеновой плёнки (именно так устроен полевой транзистор). Измеряемое омметром сопротивление плёнки оказалось обратно пропорционально напряжению $\mathcal{E}$, причём $R = 0,8$ кОм при $\mathcal{E} = 10$ В. Рассчитайте по этим данным подвижность μ носителей заряда.

Примечание. Подвижность равна отношению скорости v дрейфа носителей заряда под действием внешнего электрического поля к напряжённости E этого поля: $\mu = v/E$.

Задача 104. Простенькая схема (2012 год)

Экспериментатор Глюк собрал цепь из одинаковых идеальных источников постоянного напряжения, конденсаторов различных ёмкостей и резисторов, сопротивления которых указаны на схеме (рис. 59). Далее Глюк подключил идеальный амперметр поочерёдно к двум парам точек цепи. После каждого подключения амперметра Глюк ждал достаточно долго, чтобы ток перестал изменяться, и только после этого записывал показания. Результаты измерений: $I_{A1} = 20 \text{ мА}$, $I_{A2} = 720 \text{ мА}$.

1. Определите, к каким точкам Глюк подключал амперметр в каждом из опытов.
2. Чему будет равна установившаяся сила тока I_{A3} через идеальный амперметр, если его подключить к точкам A и B (рис. 59)?

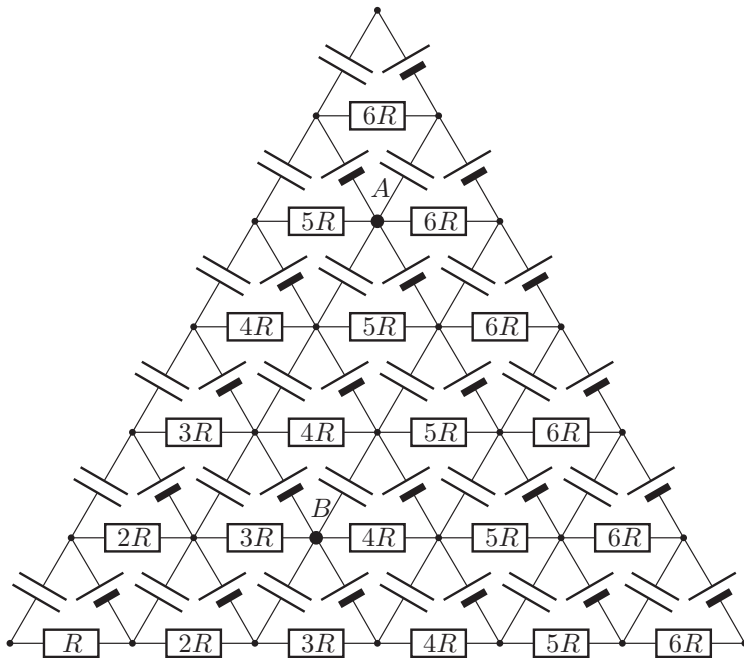


Рис. 59

Задача 105. Микроэлектромеханическое устройство (2012 год)

Микроэлектромеханические системы (МЭМС) — это устройства, сочетающие одновременно электрические и механические функции. Они нашли широкое применение за счёт миниатюрности и технологий производства, полностью совместимых со стандартными полупроводниковыми циклами. Данная задача посвящена одному из самых распространённых электромеханических преобразователей — электростатическому.

В качестве модели рассмотрим плоский конденсатор, имеющий пластины площадью S , одна из которых неподвижна, а другая прикреплена к пружине с жёсткостью k и может перемещаться в вертикальном направлении (рис. 60). Обкладки конденсатора подключены к источнику регулируемого постоянного напряжения. В начальном состоянии напряжение источника равно нулю, а верхняя пластина покоится на расстоянии d от нижней. Электрическим сопротивлением цепи можно пренебречь во всех случаях.

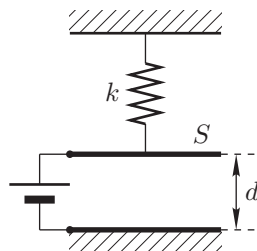


Рис. 60

1. Определите электростатическую силу F_1 , действующую на верхнюю пластину конденсатора со стороны нижней сразу после резкой подачи на конденсатор напряжения U_1 .

2. Напряжение на конденсаторе плавно и медленно увеличивают от нулевого значения. При каком напряжении U_2 пластины схлопнутся?

3. Какое минимальное напряжение U_3 нужно резко подать на конденсатор, чтобы его пластины схлопнулись, если сразу после зарядки конденсатора цепь будет разомкнута?

4. Какое минимальное напряжение U_4 нужно резко подать на конденсатор, чтобы его пластины схлопнулись, если поданное напряжение далее будет поддерживаться постоянным?

Задача 106. Униполярный электродвигатель (2012 год)

На рис. 61 показана схема реально работающего униполярного электродвигателя. Ротором двигателя является насаженный на проводящую ось O_1O_2 сильный постоянный магнит из непроводящего материала в форме однородного диска, покрытого тонким слоем металла. При подключении к магниту источника постоянного напряжения с помощью скользящего контакта K магнит начинает быстро вращаться.

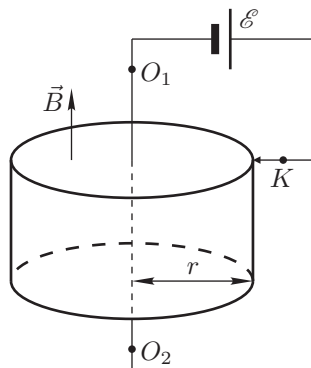


Рис. 61

Радиус ротора $r = 2$ см, сила трения между скользящим контактом и ротором $F_0 = 9$ мН (трением в оси можно пренебречь), ЭДС источника $\mathcal{E} = 1,5$ В, полное сопротивление электрической цепи $R = 1,5$ Ом. Считайте, что магнитное поле вблизи оснований диска однородно, направлено вдоль оси диска и имеет индукцию $B = 1$ Тл.

1. Укажите направление вращения ротора.

2. Найдите установившуюся частоту $\nu_{\max}$ вращения ротора без учёта трения.

3. Найдите установившуюся частоту ν вращения ротора с учётом трения.

Условия задач. Оптика

Задача 107. Зеркала (1996 год)

Два плоских квадратных зеркала имеют одну общую сторону и образуют двугранный прямой угол. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием f и диаметром $2f$ касается обоих зеркал, а её главная оптическая ось проходит через линию пересечения зеркал перпендикулярно ей. На главной оптической оси на расстоянии $1,5f$ от центра линзы находится точечный источник света S . Найдите положение его изображения S' , созданного лучами, вышедшими из линзы в сторону источника.

Задача 108. Котлован (1999 год)

Человек, стоя на краю высокого обрыва, смотрит на ровное плоское дно котлована шириной L , заполненного водой глубиной h (рис. 62). Высота обрыва H . Размеры котлована удовлетворяют неравенствам $L \gg H \gg h$. Показатель преломления воды равен n . Как зависит от расстояния до обрыва видимая глубина котлована?

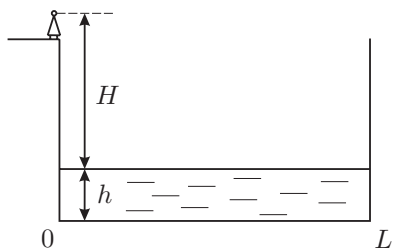


Рис. 62

Задача 109. Световой зайчик (2000 год)

Человек, стоящий на расстоянии h от длинной ровной стены, освещает её лучом фонарика, вращая фонарик в горизонтальной плоскости слева направо с постоянной угловой скоростью ω . Учитывая конечность скорости распространения света c , найдите, как с точки зрения человека будут изменяться со временем положение светового зайчика на стене и скорость его движения.

Задача 110. Сферическое зеркало (2001 год)

Солнечные лучи падают на вогнутое сферическое зеркало диаметром D параллельно его оси симметрии. Радиус кривизны поверхности зеркала $R \gg D$. В фокальной плоскости зеркала перпендикулярно его оси симметрии помещён непрозрачный экран радиусом r . Как зависит средняя освещённость светового пятна на экране от радиуса экрана?

Задача 111. Аквариум (2004 год)

Пучок света, проходя через пустой сферический аквариум, испытывает преломление на поверхностях сфер, разделяющих стеклянные стенки с воздухом,

подобно преломлению на границах линз оптической системы. В задаче исследуются характеристики аквариума как оптической системы. Можно использовать формулу сферической поверхности:

$$\frac{n_1}{a} - \frac{n_2}{b} = \frac{n_1 - n_2}{R}.$$

Здесь n_1 и n_2 — показатели преломления первой и второй (по ходу луча) сред, разделённых этой поверхностью, а величины a , b и R — взятые со знаками «плюс» или «минус» расстояния от поверхности сферы до источника S , его изображения S_1 и центра сферы O (рис. 63). Знак «плюс» берётся, если расстояние отсчитывается по ходу луча, а «минус» в противоположном случае.

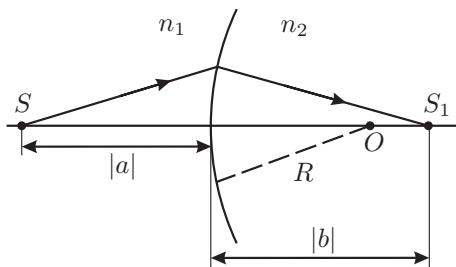


Рис. 63

1. Найдите для узкого пучка света фокусное расстояние стенки пустого аквариума. Толщина стенки $\delta = 5$ мм, радиус аквариума $R = 10$ см, показатель преломления стекла $n = 1,6$.

2. Найдите фокусное расстояние всего аквариума, который отличается от рассмотренного в первом пункте лишь тем, что имеет толщину $\delta = R/2$ (толстый аквариум).

3. На расстоянии $2R$ от центра толстого аквариума помещают точечный источник света. На каком расстоянии s от внешней поверхности аквариума наблюдатель, находящийся с противоположной от источника стороны, увидит изображение светящейся точки?

Задача 112. Стеклянная призма (2006 год)

Стеклянная призма, основание которой имеет ромбическую форму, находится в воздушном пространстве (рис. 64), причём у призмы $\angle BAD = \angle BCD = \theta$. Узкий луч жёлтого света падает в плоскости рисунка параллельно диагонали AC на грань AB призмы. Луч испытывает полное внутреннее отражение от граней AD и DC и выходит из призмы через грань BC . При решении задачи считайте, что для жёлтого света показатель преломления стекла $n = 1,60$, а для воздуха $n' = 1$.

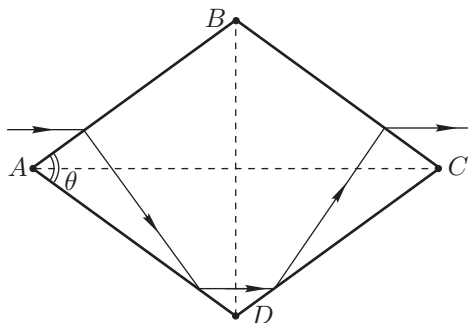


Рис. 64

1. При каком значении угла θ раствора призмы (как функции показателя преломления n) полное отклонение луча от своего первоначального направления будет нулевым? Найдите численное значение θ , выраженное в градусах и минутах.

Оставим расположение призмы в пространстве и направление падающего луча прежними, но изменим характер падающего излучения. Пусть теперь падающий луч состоит из жёлтого дублета ртути. Дублет состоит из волн с длинами 579,1 нм и 577,0 нм. Показатели преломления стекла для этих длин волн равны соответственно $n = 1,60$ и $n + \Delta n$, где $\Delta n = 1,3 \cdot 10^{-4}$. Луч света, выходящий из призмы, направляется соосно в астрономический телескоп, настроенный на бесконечное расстояние.

2. Определите угловое расстояние ε между двумя изображениями, видимыми в телескопе, как функцию n и Δn . Найдите также численное значение ε .

3. Известно, что фокусное расстояние объектива телескопа $f = 0,4$ м. Найдите линейное расстояние между двумя изображениями, видимыми в фокальной плоскости объектива.

Задача 113. Холмс выбирает костюм (2007 год)

Шерлок Холмс, стоя перед плоским зеркалом в примерочной, обнаружил, что не видит в зеркале пола, хотя себя видит целиком (вплоть до низа ботинок) и нижний край зеркала касается пола. На какой высоте x от пола находится изображение в зеркале верхнего края цилиндра (шляпы) Холмса? Край цилиндра выше уровня глаз Холмса на $h = 30$ см. Выходя из примерочной, Холмс заметил, что перестал видеть свои глаза в зеркале, когда отошёл от него в $n = 3$ раза дальше. Величину n Холмс определил, подсчитав соответствующие плитки паркета на полу. Пол ровный и горизонтальный. Во время опытов Холмс стоял вертикально.

Примечание. Для произвольного угла α справедливы формулы

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Задача 114. Без окон и дверей (2009 год)

Для съёмок фильма построили пустой павильон без окон и дверей. Серые бетонные стены, пол и потолок павильона отражают падающий на них свет диффузно во все стороны с коэффициентом отражения $R = 10\%$ для всех длин волн. Внутри павильона подвешен точечный источник света. Для увеличения освещённости режиссёр самолично заменил источник света на новый, имеющий в $\alpha = 2$ раза большую яркость, и перекрасил стены, пол и потолок в белый цвет, за счёт чего коэффициент отражения вырос в $\beta = 4$ раза. Во сколько раз γ увеличилась средняя освещённость павильона?

Задача 115. Детектор перед зеркалом (2009 год)

На плоское зеркало падает под углом φ к нормали плоская (идущая от бесконечно удалённого источника) монохроматическая световая волна с длиной волны λ . С помощью маленького детектора регистрируется сигнал, пропорциональный интенсивности света в точке наблюдения.

1. Найдите частоту ν_1 переменного сигнала, если зеркало неподвижно, а детектор движется со скоростью $v \ll c$, направленной под углом α к плоскости зеркала, но не обязательно лежащей в плоскости падения.

2. Какова в этом случае максимальная частота $\nu_{1\max}$ при всевозможных значениях φ и α ? При каких φ_1 и α_1 она достигается?

3. Найдите частоту ν_2 переменного сигнала, если детектор неподвижен, а зеркало движется поступательно со скоростью $u \ll c$, лежащей в плоскости падения и перпендикулярной лучам падающей волны.

4. Какова в этом случае максимальная частота $\nu_{2\max}$ при всевозможных значениях φ ? При каком φ_2 она достигается?

Эффект Доплера в данной задаче не рассматривается.

Задача 116. Авторские очки (2010 год)

Автор задачи, желая разобраться в работе широко рекламируемых очков с большим количеством регулярно расположенных отверстий («дырчатых очков»), проделал в непрозрачном экране недалеко друг от друга две небольшие дырочки (расстояние между ними $l \sim 1,5$ мм, их диаметры $d \sim 0,5$ мм), расположил этот экран в непосредственной близости от глаза точно напротив зрачка и стал рассматривать через эти две дырочки яркую светящуюся точку.

В результате эксперимента было обнаружено, что изображение источника на сетчатке удваивается (рис. 65), если источник расположен ближе $a_1 = 25$ см или дальше $a_2 = 42$ см от глаза, и сливается в одно пятнышко (рис. 66) при промежуточных положениях источника. Объясните наблюдаемые эффекты и определите оптическую силу D необходимых автору очков. Считайте, что хрусталик глаза в процессе опыта расслаблен и его оптическая сила не изменяется.



Рис. 65



Рис. 66

Задача 117. Прямые углы в линзе (2011 год)

На координатной плоскости (рис. 67) ось Ox совпадает с главной оптической осью тонкой линзы, а ось Oy лежит в плоскости линзы. Предметом является треугольник ABC с прямым углом при вершине C , а изображением — треугольник $A'B'C'$ с прямым углом при вершине C' , являющейся изображением точки C . Фокусное расстояние линзы f , а также координаты x и y точки C известны, причём $x < 0, y \neq 0$. Найдите тангенсы углов наклона отрезков CA и CB к положительному направлению оси Ox .

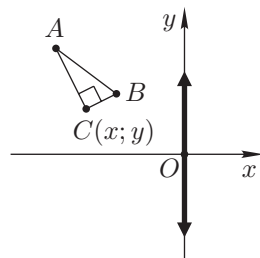


Рис. 67

Примечание. Линза может быть как собирающей ($f > 0$), так и рассеивающей ($f < 0$).

Задача 118. Отражения (2012 год)

Два круглых зеркала диаметром $D = 1$ м расположены друг напротив друга в почти параллельных плоскостях, угол между которыми $\varphi = 0,001$. Отрезок, соединяющий центры зеркал, имеет длину $a = 0,2$ м и перпендикулярен биссекторной плоскости двугранного угла φ между плоскостями зеркал. Какое максимальное число N отражений от зеркал может испытать луч света в такой системе? Явления, связанные с волновой природой света, в данной задаче не рассматриваются.

Примечание. Для $x \ll 1$ можно считать, что $\operatorname{tg} x \approx \sin x \approx x$, $\cos x \approx 1 - x^2/2$. При $nx \ll 1$ справедливо соотношение $(1 + x)^n \approx 1 + nx$.

Задача 119. Прибрежные волны на море (2012 год)

Под каким углом β подойдут к прямому пологому берегу гребни (фронты) волн, если на глубине $H = 700$ м волны имели длину $\lambda = 50$ м, а их гребни образовывали с берегом угол $\alpha = 15^\circ$? Глубина моря вблизи берега $h = 0,5$ м.

Примечание. Закон дисперсии (зависимость фазовой скорости v от длины волны λ) морских волн имеет вид

$$v = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{th}(kz)},$$

где g — ускорение свободного падения, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, z — глубина моря в рассматриваемой точке, а гиперболический тангенс th — функция, определяемая формулой

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Можно использовать предельные случаи закона дисперсии: на «глубокой» воде (при $z \gg \lambda$) $v \approx \sqrt{g/k}$; на «мелкой» воде (при $z \ll \lambda$) $v \approx \sqrt{gz}$.

Решения задач. Механика

Задача 1. Шарик и стержень (1995 год)

1. Для решения задачи нужно проанализировать три этапа движения: опускание шарика, столкновение шарика со стержнем; последующий подъём шарика и отклонение стержня. На первом и третьем этапах сохраняется механическая энергия, а на втором — момент импульса системы относительно точки подвеса.

Пусть v_0 — скорость шарика непосредственно перед его ударом о стержень, тогда закон сохранения энергии в процессе опускания шарика имеет вид

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgs_1,$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{2gs_1}.$$

Из теории вращательного движения твёрдого тела известно, что момент инерции стержня массой M и длиной L относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно стержню, определяется по формуле $I = ML^2/3$. Пусть v — скорость шарика и конца стержня сразу после абсолютно неупругого удара, тогда закон сохранения момента импульса относительно точки подвеса имеет вид

$$mv_0L = mvL + I \cdot \frac{v}{L},$$

откуда

$$v = \frac{3mv_0}{3m + M}.$$

Предположим, что после удара шарик и стержень не взаимодействуют друг с другом, тогда высоты h_1^* и H_1^* их подъёма можно найти из двух независимых уравнений, записанных согласно закону сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh_1^* \quad \text{и} \quad \frac{I}{2} \left(\frac{v}{L} \right)^2 = Mg \cdot \frac{H_1^*}{2},$$

откуда

$$h_1^* = \frac{v^2}{2g} \quad \text{и} \quad H_1^* = \frac{v^2}{3g}. \quad (3)$$

Из неравенства $h_1^* > H_1^*$ следует, что шарик поднялся выше стержня, однако это противоречит тому, что шарик двигался за стержнем, значит, предположение об отсутствии взаимодействия после удара неверно.

Таким образом, шарик и стержень будут двигаться на данном этапе как одно целое (то есть $h_1 = H_1$), а закон сохранения энергии примет вид

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{I}{2} \left(\frac{v}{L} \right)^2 = mgh_1 + Mg \cdot \frac{H_1}{2},$$

откуда

$$h_1 = H_1 = \frac{(3m + M)v^2}{3g(2m + M)} = \frac{6m^2 S_1}{(2m + M)(3m + M)}.$$

2. Рассуждая аналогично предыдущему пункту, обозначим через v_0 скорость конца стержня непосредственно перед его ударом о шарик, тогда закон сохранения энергии в процессе опускания стержня имеет вид

$$\frac{MgS_2}{2} = \frac{I}{2} \left(\frac{v_0}{L} \right)^2,$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{3gS_2}.$$

Пусть v — скорость шарика и стержня сразу после удара, тогда закон сохранения момента импульса относительно точки подвеса имеет вид

$$I \cdot \frac{v_0}{L} = mvL + I \cdot \frac{v}{L},$$

откуда

$$v = \frac{Mv_0}{3m + M}.$$

Поскольку теперь стержень не мешает движению шарика, шарик поднимется после удара на бóльшую высоту. Для нахождения h_2 и H_2 подставим новое значение v в полученные в первом случае формулы (3) для h_1^* и H_1^* :

$$h_2 = \frac{v^2}{2g} = \frac{3}{2} S_2 \left(\frac{M}{M + 3m} \right)^2, \quad H_2 = \frac{v^2}{3g} = S_2 \left(\frac{M}{M + 3m} \right)^2.$$

Примечание. Отметим, что закон сохранения импульса шарика и стержня во время удара не выполняется, так как в этот момент возникает большая сила реакции в шарнире. Эта сила является внешней и потому изменяет импульс системы, однако её плечо относительно точки подвеса равно нулю, поэтому закон сохранения момента импульса был применён правильно. В существовании реакции шарнира легко убедиться экспериментально: достаточно взять длинную палку (кочергу, лом и т. п.) за один конец, раскрутить её за этот конец и ударить другим концом по твёрдой опоре, тогда рука, играющая роль шарнира, в полной мере почувствует рассматриваемую силу.

Примерная система оценивания

Применение законов сохранения в первом случае	2
Проверка наличия взаимодействия после удара в первом случае	1
Ответ для h_1	1
Ответ для H_1	1
Применение законов сохранения во втором случае	2
Проверка наличия взаимодействия после удара во втором случае	1
Ответ для h_2	1

Ответ для H_2 1

Задача 2. За пределами третьей космической скорости (1995 год)

Поскольку скорость v_0 космического корабля задана относительно Земли, для перехода в другую систему отсчёта потребуется орбитальная скорость Земли v_e относительно Солнца. Центростремительное ускорение Земли создаётся гравитационной силой притяжения Солнца, поэтому из второго закона Ньютона

$$m \frac{v_e^2}{R} = \gamma \frac{Mm}{R^2}$$

находим

$$v_e = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}.$$

Обозначим через μ массу корабля. Сразу отметим, что применять закон сохранения энергии «по-простому» в виде

$$\frac{\mu(v_e + v_0)^2}{2} - \gamma \frac{\mu m}{r} - \gamma \frac{\mu M}{R} = \frac{\mu v^2}{2}$$

неправильно, так как при такой записи не учитывается изменение кинетической энергии движения Земли относительно Солнца, вызванное взаимодействием с кораблём, а это изменение оказывается существенным. Изменением энергии большого тела (в данном случае Земли) можно пренебрегать только в инерциальной системе отсчёта, в которой это тело изначально покоилось. Данный факт описан в литературе как «Парадокс большого тела».

Чтобы избежать указанной ошибки и упростить рассуждения, используем условие $r \ll R$ и разобьём движение космического корабля на два этапа:

1) процесс удаления корабля от поверхности Земли приблизительно вдоль орбиты Земли (то есть без изменения расстояния до Солнца) на расстояние, большое по сравнению с r , но малое по сравнению с R ;

2) процесс удаления корабля от Солнца из точки на орбите Земли, расположенной далеко от Земли (то есть уже без взаимодействия с Землёй), на расстояние, большое по сравнению с R .

Первый этап движения рассмотрим относительно Земли, тогда закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{\mu v_0^2}{2} - \gamma \frac{m\mu}{r} = \frac{\mu v_1^2}{2},$$

откуда находим скорость корабля в конце первого этапа движения:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\gamma \frac{m}{r}}.$$

Эта же скорость, рассчитанная относительно Солнца:

$$v_2 = v_e + v_1 = \sqrt{\gamma \frac{M}{R}} + \sqrt{v_0^2 - 2\gamma \frac{m}{r}},$$

является скоростью корабля в начале второго этапа движения. Закон сохранения энергии на этом этапе в новой системе отсчёта имеет вид

$$\frac{\mu v_2^2}{2} - \gamma \frac{M\mu}{R} = \frac{\mu v^2}{2},$$

откуда находим искомую конечную скорость корабля:

$$v = \sqrt{v_2^2 - 2\gamma \frac{M}{R}} = \sqrt{v_0^2 - 2\gamma \frac{m}{r} - \gamma \frac{M}{R} + 2\sqrt{\gamma \frac{M}{R}} \sqrt{v_0^2 - 2\gamma \frac{m}{r}}}.$$

Все подкоренные выражения положительны, так как по условию значение v_0 больше третьей космической скорости, то есть корабль действительно покинет пределы Солнечной системы.

Примерная система оценивания

Расчёт орбитальной скорости Земли.....	1
Идея разбиения движения на два этапа.....	1
Закон сохранения энергии на первом этапе.....	2
Переход в новую систему отсчёта.....	1
Закон сохранения энергии на втором этапе.....	2
Ответ.....	3

Задача 3. Планета (1996 год)

Пусть m — масса маятника, v и N — соответственно скорость груза и сила натяжения нити, когда она образует некоторый угол φ с вертикалью, тогда из второго закона Ньютона в проекции на направление нити (рис. 68)

$$m \cdot \frac{v^2}{L} = N - mg \cos \varphi$$

выражаем

$$N = mg \cos \varphi + \frac{mv^2}{L}.$$

При возрастании $|\varphi|$ значения $\cos \varphi$ и v^2 уменьшаются, поэтому сила натяжения нити будет максимальной в положении равновесия ($\varphi = 0$), а минимальной — в крайних точках ($\varphi = \alpha$), то есть

$$N_{\max} = mg + \frac{mv^2}{L}, \quad N_{\min} = mg \cos \alpha.$$

С учётом условия $N_{\max} = kN_{\min}$ отсюда следует, что $gL + v^2 = kgL \cos \alpha$. Решая это уравнение совместно с законом сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgL(1 - \cos \alpha),$$

находим

$$\cos \alpha = \frac{3}{k + 2} = \frac{1}{2}.$$

Отметим, что найденный угол $\alpha = 60^\circ$ не является малым, однако в решении не используется приближение малых колебаний.

При вращении маятника его груз движется в горизонтальной плоскости по окружности радиусом $R = L \sin \alpha$ с циклической частотой $\omega = 2\pi/T$ (рис. 69). Запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикаль и на радиус:

$$0 = N \cos \alpha - mg, \quad m \cdot \omega^2 R = N \sin \alpha,$$

откуда после подстановки $\cos \alpha$, R и ω получаем

$$g = \frac{12\pi^2 L}{(k + 2)T^2} = 3,7 \text{ м/с}^2.$$

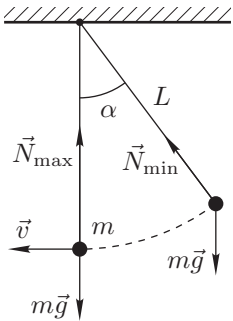


Рис. 68

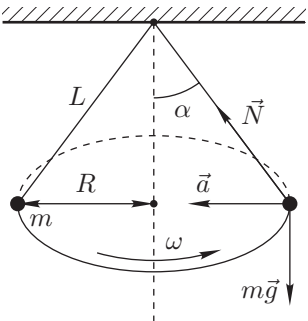


Рис. 69

Примерная система оценивания

Обоснование рассмотрения положения равновесия и крайних точек.....	1
Полная система исходных уравнений для первого эксперимента.....	3
Полная система исходных уравнений для второго эксперимента.....	3
Ответ в общем виде.....	2
Численный ответ	1

Задача 4. Космический корабль (1996 год)

Качественный вид траектории космического корабля в системе отсчёта, в которой астероид изначально покоился, показан на рис. 70, где v_0 и v — скорости корабля до и после взаимодействия с астероидом, u — скорость астероида, возникшая из-за притяжения к кораблю. Система, состоящая из корабля и астероида, является изолированной, поэтому для неё можно записать законы сохранения импульса и энергии (потенциальная энергия гравитационного взаимодействия в итоге осталась прежней):

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v} + M\vec{u}, \tag{4}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}. \tag{5}$$

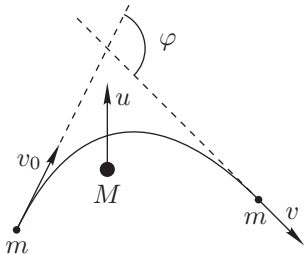


Рис. 70

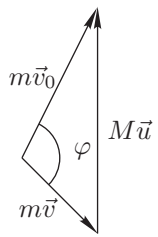


Рис. 71

Применив теорему косинусов к треугольнику (рис. 71), составленному из векторов импульсов согласно уравнению (4), получим

$$(Mu)^2 = (mv_0)^2 + (mv)^2 - 2(mv_0)(mv) \cos \varphi. \tag{6}$$

Введём обозначение $x = M/m$ и исключим u , решая уравнения (5) и (6) совместно:

$$x(v_0^2 - v^2) = v_0^2 + v^2 - 2v_0v \cos \varphi,$$

откуда после подстановки $v = v_0(1 - k)$ находим искомое отношение:

$$x = \frac{M}{m} = \frac{1 + (1 - k)^2 - 2(1 - k) \cos \varphi}{1 - (1 - k)^2} = 3,0625 \approx 3.$$

Примерная система оценивания

Закон сохранения импульса.....	2
Закон сохранения энергии.....	2
Решение системы уравнений.....	3
Ответ в общем виде.....	2
Численный ответ.....	1

Задача 5. Сосуд (1996 год)

Ускорение a сосуда возникает за счёт разницы между реактивной силой тяги $F_{\text{тяги}}$ струи воды, выливающейся из отверстия (рис. 72), и силой трения скольжения $F_{\text{тр}}$ сосуда о поверхность стола. Приведём два способа нахождения $F_{\text{тяги}}$: статический и динамический. В обоих случаях сосуд считается неподвижным.

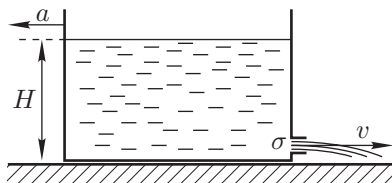


Рис. 72

1. В статической модели предполагается, что гидростатическое давление воды на уровне отверстия определяется формулой $P = \rho g H$, то есть не изменяется после начала движения воды. Тогда сосуд с водой действует на выливающуюся из отверстия воду с силой $F = P\sigma = \rho g H\sigma$, которая по третьему закону Ньютона равна искомой реактивной силе тяги, то есть $F_{\text{тяги}} = F = \rho g H\sigma$. Можно прийти к такому же выражению, рассматривая нескомпенсированную силу давления воды на участок стенки сосуда, противоположный отверстию.

2. В динамической модели расчёт проводится через скорость v вытекающей воды. За малый промежуток времени Δt через отверстие выльется вода массой $\Delta m = \rho\sigma v\Delta t$. Пренебрегая потерями энергии из-за явления вязкости и изменением кинетической энергии оставшейся в сосуде воды, запишем закон сохранения энергии системы:

$$\Delta m g H = \frac{\Delta m}{2} v^2,$$

откуда

$$v^2 = 2gH.$$

Из закона изменения импульса вытекшей воды $\Delta m v = F\Delta t$ найдём силу давления $F = \rho\sigma v^2 = 2\rho g H\sigma$, которая по третьему закону Ньютона равна искомой реактивной силе тяги, то есть $F_{\text{тяги}} = F = 2\rho g H\sigma$.

Видно, что результаты, полученные в двух моделях, различаются в 2 раза! В силу сомнительности основного предположения статической модели второй результат следует считать более правильным, однако и динамическая модель даёт лишь приближённый результат. Поскольку точное определение v требует применения методов из курса гидродинамики, которые выходят за рамки программы олимпиады, а по условию нужно лишь оценить искомые величины, оба расчёта можно считать верными в рамках данной задачи.

Сразу после выскальзывания пробки масса воды в сосуде $m = \rho H S$, сила трения между сосудом и столом $F_{\text{тр}} = \mu(M + m)g$. Из второго закона Ньютона

$$(M + m)a = F_{\text{тяги}} - F_{\text{тр}}$$

находим

$$\mu = \frac{2\rho H\sigma}{M + \rho H S} - \frac{a}{g}.$$

Поскольку при увеличении коэффициента трения μ ускорение a убывает, сосуд останется в покое при любых коэффициентах трения из диапазона

$$\mu_0 \geq \frac{2\rho H \sigma}{M + \rho H S}.$$

Примерная система оценивания

Любая корректная оценка для $F_{\text{тяги}}$	3
Выражение для m	1
Выражение для $F_{\text{тр}}$	1
Второй закон Ньютона для сосуда с водой.....	1
Ответ для μ	2
Ответ для μ_0	1
Знак именно «больше или равно», а не «равно» в ответе для μ_0	1

Задача 6. Эхолот (1997 год)

В соответствии с условиями задачи морское дно в месте отплытия корабля приближённо можно рассматривать в виде двух наклонных плоскостей AB и BC (рис. 73), углы наклона которых α и β . Подтверждением плоской модели у самого берега служат приведённые в условии результаты акустических измерений:

$$\frac{h_1}{L_1} = \frac{150}{100} \approx \frac{h_2}{L_2} = \frac{200}{140} \approx \frac{h_3}{L_3} = \frac{300}{250} \approx 1,4.$$

Полученное отношение равно $\text{tg } \alpha$. Отсюда следует, что у берега дно опускается под углом $\alpha \approx 55^\circ$ к горизонту.

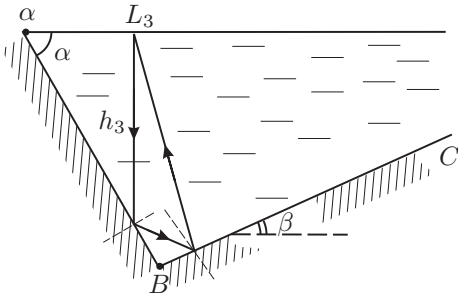


Рис. 73

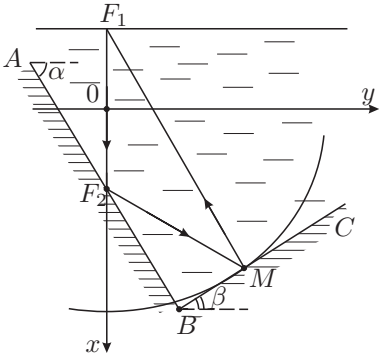


Рис. 74

Происхождение второго отражённого сигнала эхолота ясно из показанного стрелками на рис. 74 хода акустического луча. Нужно найти положение плоскости BC . Точка, в которой происходит отражение луча, должна быть расположена, с одной стороны, так, чтобы было обеспечено зарегистрированное эхолотом время прохождения через неё акустического луча. С другой стороны, необходимо, чтобы угол падения акустического луча на плоскость BC был

равен углу его отражения¹. Этим условиям удовлетворяет точка M , принадлежащая участку эллипса, изображённого на рис. 74, где F_1 и F_2 — фокусы эллипса. Расстояние F_1F_2 равно h_3 (рис. 73). Заданная в условии величина h_4 получается аналогично h_1 , h_2 и h_3 умножением скорости звука на половину интервала времени между принятым и отправленным эхолотом сигналами, то есть

$$h_4 = \frac{1}{2}(F_1F_2 + F_2M + MF_1) = \frac{1}{2}(h_3 + 2a) = \frac{1}{2}h_3 + a, \quad (7)$$

где a — большая полуось эллипса. Поскольку нормаль эллипса $\vec{n}$ в точке M является биссектрисой угла F_2MF_1 , искомая плоскость BC — касательная к эллипсу в этой точке. Найдём тангенс угла наклона касательной:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{dx}{dy}, \quad (8)$$

где x и y — координаты точки эллипса M . Они связаны уравнением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (9)$$

Дифференцируя уравнение (9), получим

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a^2}{b^2} \frac{y}{x}. \quad (10)$$

Большая полуось эллипса находится из уравнения (7):

$$a = h_4 - \frac{1}{2}h_3 = 250 \text{ м.} \quad (11)$$

Численные вычисления целесообразно использовать в связи с громоздкостью выражений в общем виде. Найдём малую полуось эллипса:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{h_4^2 - h_4h_3} = 200 \text{ м.} \quad (12)$$

Координаты x и y точки M удовлетворяют не только уравнению эллипса (9), но и, как следует из рис. 74, соотношению

$$x = -\frac{y}{\operatorname{tg} 2\alpha} + \frac{h_3}{2} = 0,364y + 150, \quad (13)$$

где x и y измеряются в метрах. Подставляя соотношение (13) в формулу (9), получим квадратное уравнение для нахождения y :

$$2,712 \cdot 10^{-5}y^2 + 1,747 \cdot 10^{-3}y - 0,640 = 0.$$

¹При этом звук, как указано в условии, отражается ото дна не только под углом падения, но также и по всем остальным направлениям. Однако условие «угол падения равен углу отражения» обеспечивает минимальное времени прохождения звукового сигнала, которое и окажется временем регистрации этого сигнала.

Отсюда $y = 125$ м, и из формулы (13) находим $x = 195$ м. С найденными значениями из уравнения (10) получаем $\beta = 45^\circ$.

Задача 7. Два груза (1997 год)

Скользя вдоль стержня, грузы многократно сталкиваются друг с другом и с полом. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что при абсолютно упругом столкновении двух тел одинаковых масс происходит обмен импульсами. Поэтому задача эквивалента задаче о движении вдоль стержня одного груза, многократно отскакивающего от пола.

Найдём вначале высоту H_1 , на которую подскочит груз после первого удара о пол, и время t_1 , спустя которое он там окажется. Для этого применим закон изменения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mg(H_1 - H) + F(H + H_1), \quad (14)$$

где m — масса груза, g — ускорение свободного падения. Отсюда находим

$$H_1 = \frac{mv^2 + 2H(mg - F)}{2(mg + F)} \approx H + \frac{v^2}{2g}, \quad (15)$$

если учесть, что $F \ll mg$. Время t_d падения груза с высоты H является корнем уравнения

$$H = vt_d + \frac{a_d t_d^2}{2},$$

где $a_d = g - \frac{F}{m} \approx g$ — ускорение падающего груза. Находим

$$t_d = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2gH}}{g}. \quad (16)$$

Время t_u последующего подъёма до высоты H_1 составляет

$$t_u = \sqrt{\frac{2H_1}{g + \frac{F}{m}}} \approx \sqrt{\frac{2H_1}{g}}, \quad (17)$$

так что $t_1 = t_u + t_d$. Это по порядку величины составляет $\sqrt{2H_1/g}$.

При последующих многократных отскоках от пола высота подъёма h будет становиться всё меньше, пока h не обратится в нуль. Если время Δt между двумя подскоками много меньше времени затухания колебаний груза, то h можно приблизительно считать непрерывной функцией времени. За малый промежуток времени $dt = \Delta t$ высота подскоков уменьшается на dh . Величину dh можно найти из закона изменения энергии:

$$-mgdh = F \cdot 2h, \quad -dh = \frac{2F}{mg}h. \quad (18)$$

Время между двумя ближайшими подскоками составляет

$$dt = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (19)$$

Из формул (18) и (19) получим

$$-\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{F}{mg}\sqrt{\frac{g}{2}}dt.$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии $t = 0$ и $h = H_1$, получим

$$h = \left(\sqrt{H_1} - \frac{Ft}{2m\sqrt{2g}} \right)^2,$$

откуда следует, что при $h = 0$ выполняется равенство

$$t = \tau = \frac{2m\sqrt{2gH_1}}{F}. \quad (20)$$

Полное время движения груза $t_f = \tau + t_1$. Сравнивая равенства (20) и (17), приходим к заключению, что

$$\frac{t_1}{\tau} \approx \frac{F}{mg} \ll 1,$$

так что получаем искомое полное время движения:

$$t_f = \tau = \frac{2m\sqrt{2gH + v^2}}{F}.$$

В задаче рассмотрена колебательная система, в которой происходят затухающие колебания. Однако они отличаются от привычных квазигармонических затухающих колебаний: график их вовсе не похож на синусоиду, а затухание происходит за конечный промежуток времени (рис. 75).

Задача 8. Кирпичи (1997 год)

Стопка кирпичей не опрокинется, если центр масс всех кирпичей, лежащих сверху каждого, не окажется правее его края. Для нахождения удовлетворяющих этому условию сдвигов кирпичей на рис. 76 покажем координаты x_i центров масс кирпичей. Верхнему кирпичу соответствует $i = 1$.

Координаты отсчитываются от края верхнего кирпича. Кирпич с номером i сдвинут относительно $(i + 1)$ -го на величину Δ_i . Координата x_{ci} центра масс стопки кирпичей, лежащих выше $(i + 1)$ -го, определяется соотношением

$$x_{ci} = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i x_k,$$

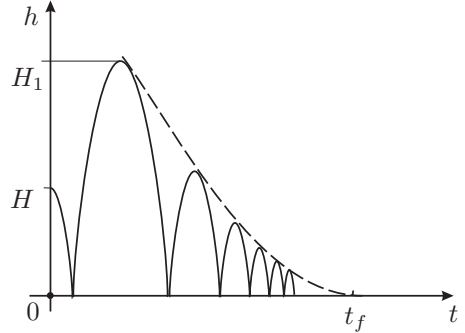


Рис. 75

поскольку все кирпичи имеют одинаковые массы. Условие равновесия кирпичей для предельных сдвигов можно записать так:

$$x_{ci} = x_{i+1} - \frac{a}{2}, \quad \text{или} \quad x_{i+1} = \frac{a}{2} + \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i x_k. \quad (21)$$

Находим смещение i -го кирпича:

$$\Delta_i = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i x_k - \frac{1}{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} x_k. \quad (22)$$

Преобразуем это выражение, выделив последнее слагаемое в первой сумме и используя условие (21):

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \frac{1}{i} \left(\sum_{k=1}^{i-1} x_k + x_i \right) - \frac{1}{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} x_k = \\ &= \frac{-1}{(i-1)i} \sum_{k=1}^{i-1} x_k + \frac{x_i}{i} = \\ &= \frac{1}{i} \left(x_i - \frac{1}{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} x_k \right) = \frac{a}{2i}. \end{aligned}$$

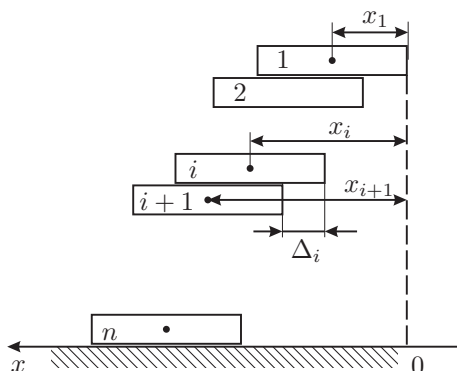


Рис. 76

Итак, смещения кирпичей начиная с верхнего образуют последовательность

$$\Delta_i = \frac{a}{2i} = \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{6}, \dots \quad (23)$$

Найдём смещение нижнего кирпича с номером n относительно верхнего:

$$\Delta(n) = \sum_{i=1}^n \Delta_i.$$

В задаче требуется подобрать такое n , что $\Delta(n) \geq a/2$. Находя суммы $n = 2, 3, 4$ членов последовательности (23), получаем

$$\Delta(2) = 0,75a; \quad \Delta(3) = 0,92a; \quad \Delta(4) = 1,04a > a.$$

Таким образом, требованию задачи удовлетворяет стопка из пяти кирпичей, смещения которых друг относительно друга равны

$$\frac{a}{2}, \quad \frac{a}{4}, \quad \frac{a}{6}, \quad \frac{a}{8}.$$

Если продолжать наращивать число кирпичей таким же образом, то смещение верхнего кирпича относительно нижнего может стать сколь угодно большим, поскольку

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty.$$

В самом деле, при большом числе слагаемых можно приближённо принять, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \approx \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n,$$

а логарифм стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$.

Задача 9. Два бруска (1998 год)

После пережигания нити брусок m_2 начнёт двигаться под действием силы упругости, а брусок m_1 останется в покое, так как сила упругости будет компенсироваться реакцией стенки. Брусок m_1 придёт в движение только тогда, когда сила сжатия пружины сменится силой растяжения, то есть при обращении в нуль деформации пружины. Пусть v — скорость бруска m_2 в этот момент времени, тогда по закону сохранения энергии до этого момента

$$\frac{k\Delta L^2}{2} = \frac{m_2 v^2}{2},$$

откуда

$$v = \Delta L \sqrt{\frac{k}{m_2}}.$$

При максимальном растяжении пружины скорости брусков сравниваются, поэтому обозначим их через u . Запишем законы сохранения импульса и энергии в процессе движения от нулевого до максимального растяжения пружины:

$$m_2 v = (m_1 + m_2) u,$$

$$\frac{m_2 v^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Решая записанные уравнения совместно, находим искомое растяжение:

$$x = \frac{\Delta L}{\sqrt{1 + m_2/m_1}} = 1 \text{ см.}$$

Примерная система оценивания

Закон сохранения энергии на первом этапе.....	2
Равенство скоростей при максимальном растяжении.....	1
Закон сохранения импульса на втором этапе	2

Закон сохранения энергии на втором этапе.....	2
Ответ в общем виде.....	2
Численный ответ	1

Задача 10. Пробирка (1998 год)

Согласно условию направим ось x вертикально вниз и выберем 0 в положении равновесия пробирки. В этом положении внешние силы компенсируют друг друга, а при смещении пробирки на x вниз изменяется только сила Архимеда (за счёт изменения объёма погруженной части на $\Delta V = Sx$), поэтому возникает результирующая сила, равная изменению силы Архимеда:

$$F = -\rho g \Delta V = -\rho g Sx, \quad (24)$$

где знак минус отражает направление силы F вверх, то есть против оси x .

Пусть x и a — координата и ускорение пробирки в произвольный момент времени t , тогда с учётом выражения (24) второй закон Ньютона имеет вид

$$ma = -\rho g Sx,$$

откуда

$$a + \frac{\rho g S}{m} \cdot x = 0. \quad (25)$$

Из теории колебаний известно, что уравнение $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где $\ddot{x}$ — вторая производная зависимости x от времени t (например, если x — координата, то $\ddot{x}$ — ускорение), описывает незатухающие гармонические колебания:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (26)$$

где ω — циклическая частота, задаваемая исходным уравнением, A и φ — соответственно амплитуда и начальная фаза, зависящие от начальных условий.

Таким образом, из уравнения (25) следует, что пробирка будет совершать гармонические колебания по закону (26) с циклической частотой $\omega = \sqrt{\rho g S/m}$. Продифференцируем зависимость $x(t)$ для нахождения скорости пробирки:

$$v(t) = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi). \quad (27)$$

В начальный момент времени пробирка имела координату x_0 и скорость v_0 , а из общих формул (26) и (27) при $t = 0$ следует, что

$$x_0 = A \sin \varphi \quad \text{и} \quad v_0 = A\omega \cos \varphi,$$

откуда

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad \text{и} \quad \varphi = \arctg \left(\frac{\omega x_0}{v_0} \right),$$

причём при нахождении φ было использовано условие $v_0 > 0$ и достаточно для описания колебаний лишь одного значения из множества всех решений.

После подстановки найденных ω , A и φ в уравнение (26) окончательно получим

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{\rho g S}{m}} \cdot t + \arctg \left(\frac{\omega x_0}{v_0} \right) \right).$$

Примерная система оценивания

Выражение для результирующей силы	1
Второй закон Ньютона для пробирки	1
Утверждение о гармонических колебаниях пробирки	1
Нахождение ω	2
Нахождение A	2
Нахождение φ	2
Окончательный ответ	1

Задача 11. Камень (1999 год)

Для описания движения камня выберем декартову систему координат так, как показано на рис. 77.

К камню приложены сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления $\vec{F}$, направленная навстречу скорости $\vec{v}$. Запишем уравнения второго закона Ньютона в проекциях на координатные оси:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x, \quad (28)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -kv_y - mg. \quad (29)$$

Перепишем эти уравнения иначе, учтя, что $v_x dt = dx$, $v_y dt = dy$:

$$mdv_x = -kdx, \quad (30)$$

$$mdv_y = -kdy - mgdt. \quad (31)$$

Для установившегося движения $v = u = \text{const}$, где $\vec{u}$ — установившаяся скорость камня, поэтому из формул (28) и (29) следует, что $u_x = 0$, а

$$u_y = -mg/k, \quad (32)$$

то есть установившаяся скорость $\vec{u}$ направлена так, как показано на рис. 77. Для нахождения L проинтегрируем уравнение (30) для всего движения камня:

$$mv_x|_{v_0}^0 = -kx|_0^L,$$

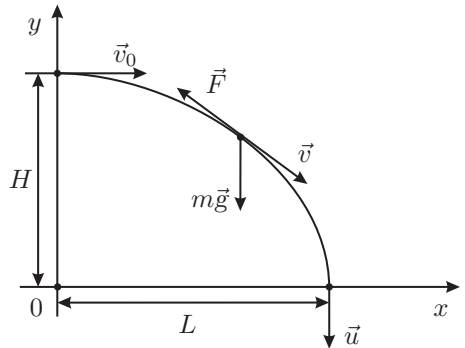


Рис. 77

откуда

$$L = \frac{mv_0}{k}.$$

Для нахождения времени τ проинтегрируем уравнение (31) с учётом (32):

$$mv_y|_0^{u_y} = -ky|_H^0 - mg\tau, \quad \text{или} \quad \tau = \frac{kH}{mg} + \frac{m}{k}. \quad (33)$$

При каких H возможна описанная в задаче ситуация? Оценим время, в течение которого скорость достигает установившегося значения. Для этого в формуле (28) положим

$$m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \sim -kv_0.$$

Отсюда $\Delta t \sim m/k$. За это время камень опустится вниз на расстояние

$$H_1 \sim \frac{g\Delta t^2}{2}.$$

Ясно, что должно выполняться условие $H \gtrsim H_1$, так что описанная в задаче ситуация, для которой получен ответ (33), будет иметь место при

$$H \gtrsim \frac{g}{2} \left(\frac{m}{k} \right)^2.$$

Задача 12. Катушка (1999 год)

Пусть T — сила натяжения нити в верхней точке её вертикальной части (рис. 78), ε — угловое ускорение катушки, $m = \rho x$ — масса свисающей части нити, $I_x = \rho(L-x)R^2$ — момент инерции нити, намотанной на катушку, тогда второй закон Ньютона для свисающей части нити, уравнение вращательного движения катушки с намотанной на неё нитью и кинематическая связь имеют соответственно вид

$$ma = mg - T, \quad (I + I_x)\varepsilon = TR, \quad a = \varepsilon R.$$

Решая записанную систему, получаем

$$a = \frac{gR^2\rho x}{I + R^2\rho L}. \quad (34)$$

Пусть $\omega = v/R$ — угловая скорость вращения катушки, тогда из закона сохранения энергии катушки и нити

$$mg \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(I + I_x)\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

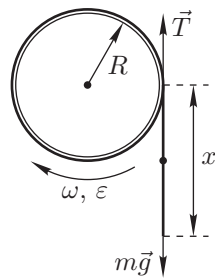


Рис. 78

находим

$$v = Rx \sqrt{\frac{g\rho}{I + R^2\rho L}}.$$

Таким образом, и ускорение a , и скорость v пропорциональны x .

Примечание. Пропорциональность a и x на первый взгляд может показаться ошибочной, так как ускорение в любом случае не может превысить g . Однако поскольку длина свисающей части нити $x \leq L$, даже при $x = L$ из формулы (34) получаем $a < g$, то есть противоречия нет.

С учётом последнего предложения из текста условия рассмотрение отрыва нити от катушки выходит за рамки данной задачи, поэтому мы предлагаем читателям исследовать это любопытное явление самостоятельно.

Примерная система оценивания

Полная система уравнений для поиска ускорения.....	3
Ответ для a	3
Закон сохранения энергии катушки и нити.....	2
Ответ для v	2

Задача 13. Обруч (2000 год)

Двигаясь из состояния покоя, центр обруча начинает набирать скорость. Пусть в некоторый момент времени она равна v . Для нахождения v применим закон изменения энергии:

$$mgR(1 - \cos \alpha) = \frac{mv_m^2}{2}, \quad (35)$$

где α — угол, на который к рассматриваемому моменту повернётся обруч, а v_m — скорость, которую приобретёт груз. По закону сложения скоростей

$$\vec{v}_m = \vec{v}_{mo} + \vec{v},$$

где $\vec{v}$ — скорость центра обруча O , а $\vec{v}_{mo}$ — скорость груза относительно O (рис. 79).

В отсутствие проскальзывания модуль скорости v_{mo} равен модулю скорости v и равен произведению угловой скорости ω на радиус обруча:

$$v_{mo} = v = \omega R. \quad (36)$$

Поэтому из векторного треугольника скоростей (рис. 79) следует, что

$$v_m^2 = 2v^2(1 + \cos \alpha).$$

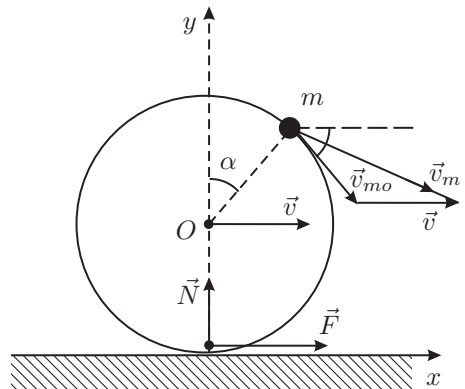


Рис. 79

Подставляем соотношение (36) и это выражение в формулу (35):

$$v = \sqrt{gR} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \quad \text{и} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right). \quad (37)$$

При каком же угле α возможно проскальзывание? Для ответа на этот вопрос нужно сравнить силу трения $\vec{F}$ с максимальной силой трения покоя, равной μN , где $\vec{N}$ — сила реакции (рис. 79). Обруч катится без проскальзывания, пока $F \leq \mu N$. Применим к обручу с грузом закон изменения импульса в проекциях на оси x и y (рис. 79):

$$\frac{d(mv(1 + \cos \alpha))}{dt} = F \leq \mu N, \quad (38)$$

$$\frac{d(-mv \sin \alpha)}{dt} = -mg + N. \quad (39)$$

Выполним дифференцирование в левой части уравнений (38) и (39), используя полученные ранее выражения (36) и (37), а также не забывая, что $\omega = d\alpha/dt$. Получаются простые соотношения:

$$mg \cos \alpha \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \leq \mu N, \quad (40)$$

$$N = mg \cos \alpha. \quad (41)$$

Проанализируем их. Возможны две ситуации, при которых обруч перестанет катиться без проскальзывания. Во-первых, может обратиться в нуль сила реакции N , то есть обруч оторвётся от поверхности. Это случится, как видно из равенства (41), при $\alpha = \pi/2$. Тогда из соотношений (37) получим $v = v_{\max} = \sqrt{gR}$. Во-вторых, обруч может начать скользить по поверхности. Тогда $N \neq 0$ и (40) становится равенством

$$\mu = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right),$$

а из соотношений (37) получаем $v = v_{\max} = \mu \sqrt{gR}$. Коэффициент трения μ обычно меньше 1. Поэтому реализуется обычно вторая ситуация.

Задача 14. Маятник Максвелла (2000 год)

На рис. 80 и 81 изображён маятник Максвелла перед и при прохождении нижней точки своей траектории. В силу условия $r \ll H$ можно пренебречь отклонением нити от вертикали и изменением потенциальной энергии маятника между указанными состояниями, то есть далее будем считать, что ось O маятника движется с некоторой постоянной по модулю скоростью v по окружности радиусом r с центром в точке B .

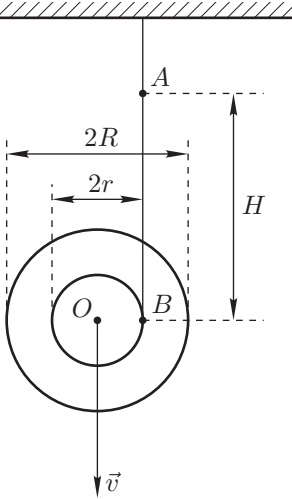


Рис. 80

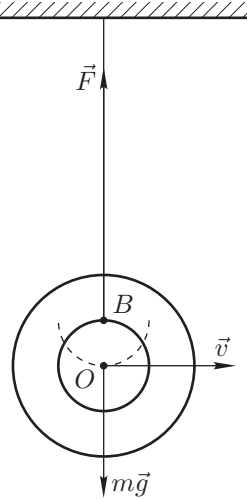


Рис. 81

Пусть ω — угловая скорость вращения маятника, u — скорость точек обода маховика относительно его оси, тогда из уравнения кинематической связи

$$\frac{v}{r} = \omega = \frac{u}{R}$$

находим

$$v = u \cdot \frac{r}{R}. \quad (42)$$

Из условия $r \ll R$ следует, что $v \ll u$, поэтому можно пренебречь кинетической энергией поступательного движения центра масс маятника по сравнению с кинетической энергией вращательного движения маховика относительно центра масс и записать закон сохранения энергии в виде

$$mgH = \frac{mu^2}{2},$$

откуда

$$u^2 = 2gH. \quad (43)$$

Используя уравнения (42) и (43) совместно, выражаем

$$v^2 = 2gH \cdot \frac{r^2}{R^2}. \quad (44)$$

Согласно второму закону Ньютона в проекции на вертикальную ось при прохождении маятником нижней точки окружности имеем

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = F - mg,$$

откуда с учётом уравнения (44) находим искомую силу:

$$F = mg \left(1 + \frac{2rH}{R^2} \right).$$

Примечание. Раскрутившись при опускании, маховик продолжает вращение по инерции, наматывая нить на стержень и поднимаясь за счёт этого. Такие периодические перемещения вниз и вверх могут продолжаться достаточно долго, оправдывая название устройства — маятник Максвелла.

Примерная система оценивания

Иллюстрация понимания физических процессов	1
Обоснование использованных приближений	1
Уравнение кинематической связи для вращения	2
Закон сохранения энергии для опускания маятника	2
Второй закон Ньютона для маятника в нижней точке	2
Ответ	2

Задача 15. Бочка (2001 год)

Пусть бочку катят вдоль координатной оси x , направленной перпендикулярно плоскости рис. 82. Координата y точки следа находится под отверстием, положение которого в плоскости дна характеризуется координатой y_1 .

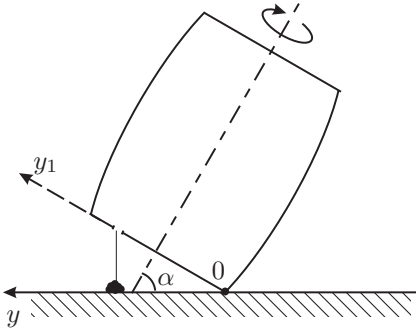


Рис. 82

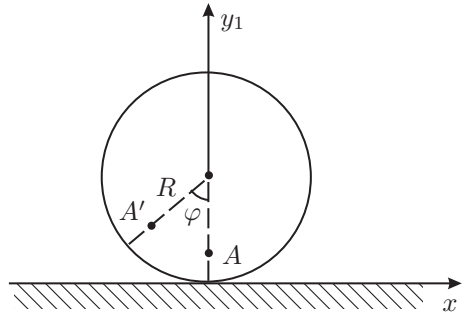


Рис. 83

Из рис. 82 видно, что $y = ky_1$, где $k = \sin \alpha$. Таким образом, след представляет собой проекцию траектории отверстия в плоскости дна на горизонтальную плоскость. Найдём вначале уравнение траектории движения отверстия в плоскости дна. На рис. 83 изображено начальное положение отверстия A и его положение A' после поворота на угол φ . Выразим через этот угол координаты x и y_1 отверстия:

$$x = \varphi R - r \sin \varphi = R \left(\varphi - \frac{r}{R} \sin \varphi \right), \quad (45)$$

$$y_1 = R - r \cos \varphi = R \left(1 - \frac{r}{R} \cos \varphi \right). \quad (46)$$

Уравнения (45) и (46) задают траекторию в параметрическом виде. Для траектории песочного следа вместо y_1 нужно брать $y = ky_1$. Можно приблизительно нарисовать оставляемый песком след, выявив характерные точки по уравнениям (45) и (46). На рис. 84 представлены построенные с помощью системы MathCad графики параметрически заданной функции $y = y(x)$ при $r = R$ (сплошная кривая) и при $r = R/2$ (пунктирная кривая). Первая кривая называется циклоидой, вторая — укороченной циклоидой.

Для определения положения центра масс следа воспользуемся формулами для его координат:

$$x_c = \frac{1}{M} \int x \, dm; \quad y_c = \frac{1}{M} \int y \, dm. \quad (47)$$

В данном случае $dm = \rho d\varphi$, где ρ — масса песка, высыпавшегося за время поворота на единичный угол. При равномерном качении бочки эта величина постоянна, а $M = 2\pi\rho$ — масса песка, высыпавшегося за один оборот. Подставляем координаты x и y , найденные с помощью формул (45) и (46), в соотношения (47) и интегрируем:

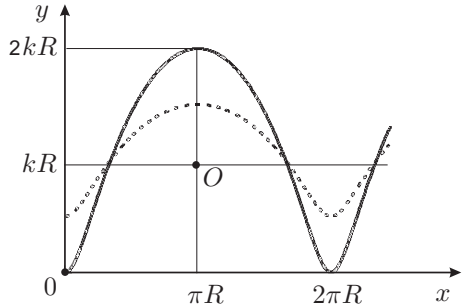


Рис. 84

$$x_c = \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} R\rho \left(\varphi - \frac{r}{R} \sin \varphi \right) d\varphi = \pi R.$$

$$y_c = \frac{k}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} R\rho \left(1 - \frac{r}{R} \cos \varphi \right) d\varphi = R \sin \alpha.$$

Итак, положение центра масс песочного следа определяется координатами $x_c = \pi R$ и $y_c = R \sin \alpha$. Это положение отмечено точкой O на рис. 84. Оно является проекцией центра дна на горизонтальную плоскость и не зависит от r .

Задача 16. Канал (2001 год)

Обозначим через v скорость шарика в точке выхода из канала и направим ось x вдоль скоростей v_0 и v , а ось y — перпендикулярно оси x в горизонтальной плоскости. Для системы, состоящей из бруска и шарика, запишем закон сохранения энергии и закон сохранения импульса в проекциях на оси:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}, \quad (48)$$

$$x: \quad mv_0 = mv + Mu_x, \quad (49)$$

$$y : \quad 0 = 0 + Mu_y, \quad (50)$$

где u_x и u_y — соответствующие проекции искомой скорости u бруска. Из уравнения (50) следует, что $u_y = 0$, а отсюда $u_x = u$. Перепишем уравнения (48) и (49) в виде

$$m(v_0^2 - v^2) = Mu^2, \quad (51)$$

$$m(v_0 - v) = Mu. \quad (52)$$

Одно из решений полученной системы очевидно:

$$v_0 - v = 0, \quad u = 0. \quad (53)$$

Другое решение находим, поделив уравнение (51) на (52), что можно сделать, если не выполняется условие (53):

$$v_0 + v = u, \quad v_0 - v = \frac{M}{m}u,$$

откуда

$$u = \frac{2m}{M+m}v_0, \quad v = \frac{m-M}{M+m}v_0. \quad (54)$$

Однако из равенств (54) следует, что $v < u$ (а при $m < M$ даже $v < 0$), то есть шарик вылетает из канала в обратном направлении, что противоречит условию задачи. Таким образом, решение (53) единственное, и конечный ответ: $u = 0$.

Странный результат, не правда ли? Неужели шарик не оказывает никакого воздействия на брусок? Конечно, оказывает! В процессе движения шарика в канале скорости шарика и бруска изменяются как по модулю, так и по направлению, причём брусок может даже вращаться в горизонтальной плоскости. Однако к концу взаимодействия их скорости принимают исходные значения, а вращение бруска прекращается.

Примечание. Обратите внимание на множество ограничений в условии задачи и попробуйте самостоятельно установить, какие логические шаги решения опираются на каждое из этих ограничений.

Примерная система оценивания

Закон сохранения энергии	2
Закон сохранения импульса	2
Нахождение двух решений системы	2
Отбрасывание постороннего корня	2
Численный ответ	2

Задача 17. Автомобиль (2001 год)

Пусть масса автомобиля равна m . Рассмотрим вначале простейший способ избежать столкновения — просто резко затормозить. Для нахождения тормозного пути применим закон изменения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \mu mgL.$$

Отсюда находим тормозной путь:

$$L = \frac{v_0^2}{2\mu g}. \quad (55)$$

Второй способ избежать столкновения — заставить автомобиль поворачивать с возможно меньшим радиусом кривизны R , который и представляет собой минимальное расстояние до препятствия. Поскольку центр масс гоночного автомобиля расположен низко, опасностью его опрокидывания можно пренебречь. Размерами автомобиля также можно пренебречь по сравнению с расстоянием до препятствия. Тогда к автомобилю можно применить второй закон Ньютона:

$$\frac{mv_0^2}{R} = \mu mg,$$

откуда

$$R = \frac{v_0^2}{\mu g}. \quad (56)$$

Этот способ избежать столкновения в два раза менее эффективен по сравнению с первым.

Проанализируем третий способ. Поворот автомобиля обеспечивают силы трения покоя, действующие перпендикулярно скорости. Поскольку центр масс гоночного автомобиля расположен достаточно низко, можно считать, что вес автомобиля поровну распределяется между передними и задними колёсами. Силы трения покоя будем полагать почти равными их предельным значениям. Тогда сумма сил трения покоя, действующих на передние колёса, которая перпендикулярна скорости автомобиля, равна $F = \mu mg/2$. Суммарная сила трения $\vec{F}$, действующая на задние колёса, тоже близка к предельному значению. Угол, который она образует с направлением скорости $\vec{v}$, можно менять посредством тормоза и руля. Приближение к стенке будет самым медленным, если предельная сила трения $\vec{F}$, действующая на задние колёса, направлена перпендикулярно стенке. Далее рассматривается именно этот наиболее благоприятный вариант.

Силу $\vec{F}$ целесообразно разложить на две составляющие: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Составляющая $\vec{F}_1$ направлена навстречу скорости $\vec{v}$, а $\vec{F}_2$ — перпендикулярно к ней. Для модулей сил справедливы равенства $F_1 = F \cos \alpha$, а $F_2 = F \sin \alpha$, где α — угол между скоростью $\vec{v}$ и первоначальной скоростью $\vec{v}_0$, направленной перпендикулярно стене. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на касательное и нормальное направления:

$$m\dot{v} = -F_1 = -F \cos \alpha, \quad (57)$$

$$\frac{mv^2}{R} = F_2 + F = F(1 + \sin \alpha). \quad (58)$$

Точка над символом здесь и далее обозначает производную по времени; R — локальный радиус поворота, удовлетворяющий соотношению

$$v = \dot{\alpha}R. \quad (59)$$

Из уравнений (58) и (59) следует, что

$$mv = F \frac{(1 + \sin \alpha)}{\dot{\alpha}}. \quad (60)$$

Сравнивая соотношения (60) и (57), получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1 + \sin \alpha}{\dot{\alpha}} \right) = -\cos \alpha.$$

Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1 + \sin \alpha}{\dot{\alpha}} \right) &= -\frac{d(\sin \alpha)}{d\alpha}, \\ \frac{d}{d\alpha} \left(\dot{\alpha} \frac{1 + \sin \alpha}{\dot{\alpha}} \right) - \frac{1 + \sin \alpha}{\dot{\alpha}} \frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha} &= -\frac{d(\sin \alpha)}{d\alpha}, \\ \frac{d\dot{\alpha}}{\dot{\alpha}} &= \frac{2d(\sin \alpha)}{1 + \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Решаем это уравнение при начальном условии $\alpha = \alpha_0 = 0$; $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0$, где, в соответствии с уравнением (59), $\dot{\alpha}_0 = v_0/R_0$, R_0 — начальный радиус поворота, который находим по формуле (58): $R_0 = mv_0^2/F$. Интегрируя, получим

$$\ln \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\alpha}_0} = 2 \ln \left(\frac{1 + \sin \alpha}{1 + \sin \alpha_0} \right), \quad \text{или} \quad \dot{\alpha} = \frac{v}{R} = \frac{v_0}{R_0} (1 + \sin \alpha)^2.$$

С учётом уравнения (58) отсюда находим

$$v = \frac{v_0}{1 + \sin \alpha}. \quad (61)$$

В ближайшей к стене точке траектории $\alpha = \pi/2$, и из формулы (61) получаем величину скорости v_f в этой точке:

$$v_f = \frac{v_0}{2}. \quad (62)$$

На какое расстояние S автомобиль приблизится к стене? Это расстояние можно подсчитать так:

$$S = \int v \cos \alpha \, dt,$$

где $v \cos \alpha$ — перпендикулярная к стене составляющая скорости. Выразим косинус из уравнения (57) и, используя формулу (62), получим

$$S = - \int v \cdot \dot{v} \frac{m}{F} dt = - \frac{m}{F} \int_{v_0}^{v_f} v dv = - \frac{m}{2F} (v_f^2 - v_0^2) = \frac{3}{4} \frac{v_0^2}{\mu g}.$$

Сравнивая полученный результат с формулами (55) и (56), видим, что при повороте эффективнее тормозить, но лучше всего сразу нажать на тормоза.

Задача 18. Упругий жгут (2001 год)

Для решения задачи нужно проанализировать движение системы. Запишем для установившегося движения шарика по окружности уравнение второго закона Ньютона:

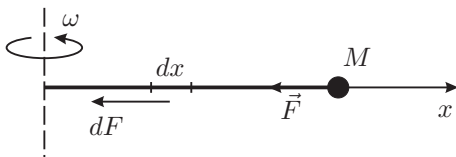


Рис. 85

$$M\omega^2 L = F, \quad (63)$$

где F — сила упругости, приложенная к шарiku (рис. 85). Поскольку деформация жгута неоднородна, для нахождения F следует рассмотреть движение его малого элемента длиной dx и массой dm (рис. 85).

Длина этого элемента в недеформированном состоянии равна dx_0 . Запишем для него второй закон Ньютона:

$$dm\omega^2 x = dF(x), \quad (64)$$

где x — координата выбранного элемента, $dF(x)$ — действующая на него сила упругости. Масса элемента $dm = \rho_0 S dx_0 = \rho(x) S dx$, где ρ_0 — плотность недеформированного жгута, а $\rho(x)$ — плотность жгута в точке x . В соответствии с законом Гука

$$F(x) = -SE \frac{dx - dx_0}{dx_0} = -SE \left(\frac{\rho_0}{\rho(x)} - 1 \right). \quad (65)$$

Подставляя dm в уравнение (64), получим

$$\rho(x) S \omega^2 x dx = ES \rho_0 \frac{d\rho}{\rho^2(x)},$$

или

$$x dx = A \frac{d\rho}{\rho^3(x)}, \quad (66)$$

$$A = \frac{E \rho_0}{\omega^2}. \quad (67)$$

Проинтегрировав уравнение (66) от x до L , получим

$$x^2 - L^2 = A \left(\frac{1}{\rho^2(L)} - \frac{1}{\rho^2(x)} \right). \quad (68)$$

Величину $\rho(L)$ выразим из уравнения (63), подставив в него соотношение (65):

$$\frac{1}{\rho(L)} = \frac{1}{\rho_0} \left(1 + \frac{M\omega^2 L}{ES} \right). \quad (69)$$

Из формул (68) и (69) получим

$$\frac{1}{\rho^2(x)} = \frac{1}{A} (a^2 - x^2), \quad \text{где} \quad a^2 = A \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{ML}{AS} \right)^2 + L^2.$$

Функция $\rho(x)$ позволяет выразить массу жгута следующим образом:

$$m = S \int_0^L \rho(x) dx = S \int_0^L \frac{\sqrt{A} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (70)$$

Вычислим интеграл в формуле (70) и подставим $m = \rho_0 S L_0$:

$$\rho_0 S L_0 = S \sqrt{A} \arcsin \frac{L}{a},$$

или

$$\sin \left(\frac{\rho_0 L_0}{\sqrt{A}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{AL^2} \left(\frac{A}{\rho_0} + \frac{ML}{S} \right)^2}}. \quad (71)$$

Формула (71) содержит в неявном виде искомую зависимость L от ω , поскольку $A \sim \omega^{-2}$ согласно формуле (67).

Проанализируем эту зависимость. При $\omega \rightarrow 0$ ($A \rightarrow \infty$) получаем $L_0 \approx L$. Естественно, при медленном вращении жгут деформируется незначительно.

При $L \rightarrow \infty$ в правой части формулы (71) получается $\left(1 + \frac{M^2}{AS^2} \right)^{-1/2}$. Левую часть преобразуем с помощью тригонометрического тождества

$$\sin \alpha = \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right)^{-1/2}.$$

Тогда получим

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\rho_0 L_0}{\sqrt{A}} \right) = \frac{\sqrt{AS}}{M},$$

или, после подстановки (67),

$$\operatorname{tg} \left(\omega L_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{E}} \right) = S \frac{\sqrt{\rho_0 E}}{M \omega}. \quad (72)$$

Таким образом, когда угловая скорость стремится к критическому значению, являющемуся решением уравнения (72), длина нити неограниченно увеличивается. Проще осознать эту особенность для невесомой нити. При $\rho_0 \rightarrow 0$ из формулы (72) получаем

$$M \omega^2 L_0 = S E. \quad (73)$$

Уравнение движения шарика в этом случае имеет вид

$$M \omega^2 L = \frac{S E}{L_0} (L - L_0) = f(L). \quad (74)$$

Корень этого уравнения и определяет длину L при установившемся движении. Графическое решение этого уравнения представлено на рис. 86 (рядом с обозначениями углов указаны значения их тангенсов).

Наклон прямой, проходящей через начало координат, увеличивается с ростом ω . При достижении критического значения, совпадающего с решением уравнения (73), прямые оказываются параллельными, то есть $L \rightarrow \infty$. Сила упругости не в состоянии обеспечить необходимое центростремительное ускорение.

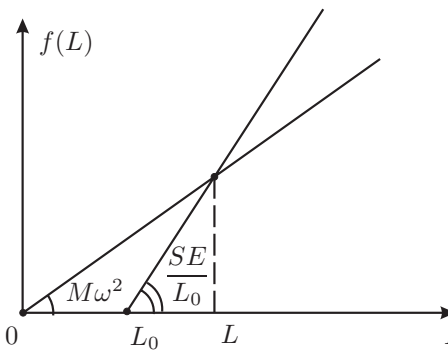


Рис. 86

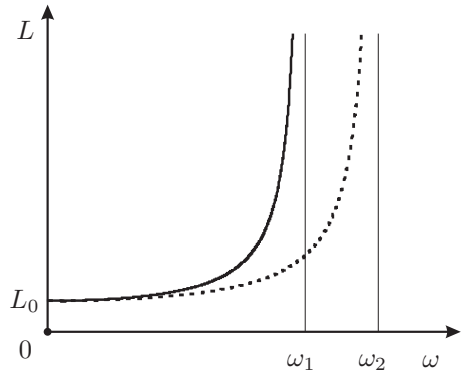


Рис. 87

Наглядное представление функциональных зависимостей дают графики. Построить графики функций, заданных неявно или громоздкими выражениями, помогает компьютер. На рис. 87 изображены полученные с помощью MathCAD график функции $L(\omega)$, построенный по формуле (71) (сплошная линия), и график аналогичной зависимости, даваемой формулой (74) (штрихованная линия). Видно, что различие в поведении массивного жгута и невесомого проявляются только вблизи критических угловых скоростей ω_1 и ω_2 (рис. 87). Для невесомого жгута эта скорость ω_2 больше.

Задача 19. Две частицы (2002 год)

Обе частицы, рассматриваемые в задаче, движутся с постоянными ускорениями, равными ускорению свободного падения $\vec{g}$. Проекции их скоростей на горизонтальную x и вертикальную y оси следующие:

$$\begin{aligned} v_{1x} &= v_0 \cos \alpha, & v_{1y} &= v_0 \sin \alpha - g\tau \\ v_{2x} &= v_0 \cos 2\alpha, & v_{2y} &= v_0 \sin 2\alpha - g\tau. \end{aligned} \quad (75)$$

Индекс 1 относится к частице, начальная скорость которой направлена под углом α к горизонту, а индекс 2 — к другой частице. Так как скорости в момент времени τ оказались сонаправленными, получаем

$$\frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{v_{2y}}{v_{2x}},$$

или, после подстановки соотношений (75),

$$\operatorname{tg} \alpha - \frac{g\tau}{v_0 \cos \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha - \frac{g\tau}{v_0 \cos 2\alpha}.$$

Из этого уравнения после тригонометрических преобразований получим ответ:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{v_0}{g} \frac{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\left(\frac{1}{\cos 2\alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} \right)}, \\ \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos 2\alpha \cos \alpha}, \\ \frac{1}{\cos 2\alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} &= \frac{2 \cos(\alpha/2) \cos(3\alpha/2)}{\cos 2\alpha \cos \alpha}, \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{v_0 \cos(\alpha/2)}{g \sin(3\alpha/2)}. \quad (76)$$

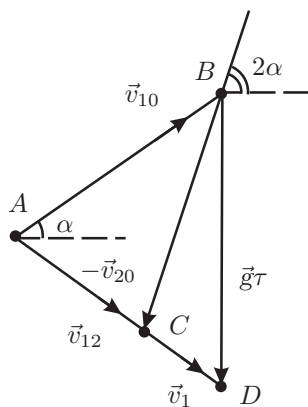


Рис. 88

Задачу можно решить и другим способом, не требующим тригонометрических преобразований. Для этого нужно рассмотреть движение одной частицы относительно другой. Из закона сложения ускорений (аналогично закону сложения скоростей) следует, что частицы движутся друг относительно друга с постоянной скоростью. Скорость $\vec{v}_{12}$ первой частицы относительно второй составляет

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}, \quad (77)$$

где индексом 0 отмечены начальные значения скоростей. В момент времени τ скорости $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_{12}$ сонаправлены. Имея это в виду, изобразим (рис. 88) треугольник скоростей ABC , соответствующий формуле (77), а также треугольник ABD , отражающий равенство

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{10} + \vec{g}\tau.$$

Так как $AB = BC = v_0$, имеем $\angle BAC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, а $\angle ADB = \frac{3\alpha}{2}$.

Применяем к $\triangle ABD$ теорему синусов:

$$\frac{v_0}{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)} = \frac{g\tau}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Отсюда сразу следует ответ (76). Таким образом, переход в другую систему отсчёта позволил использовать геометрию вместо проведения тригонометрических преобразований.

Задача 20. Плоское движение (2002 год)

1. Плоское непоступательное движение абсолютно твёрдого тела в любой момент времени можно рассматривать как поворот вокруг некоторой точки, называемой мгновенным центром вращения.

Мгновенный центр должен лежать на перпендикуляре к скорости каждой точки, проходящем через неё. На основании этого свойства абсолютно твёрдого тела выполнены построения на рис. 89. Мгновенный центр O лежит на пересечении перпендикуляра к $\vec{v}_A$, проведённого из точки A , и перпендикуляра к заданной прямой, проведённого из точки B . Если угловая скорость тела равна ω , то $v_A = \omega \cdot OA$, $v_C = \omega \cdot OC$. Следовательно, $v_C = v_A \cdot OC/OA$. Измерив по рисунку OC , OA , а также скорость v_A , получим

$$v_C = 3,1 \text{ м/с}.$$

Здесь и далее скорость точки C изображена в произвольном масштабе.

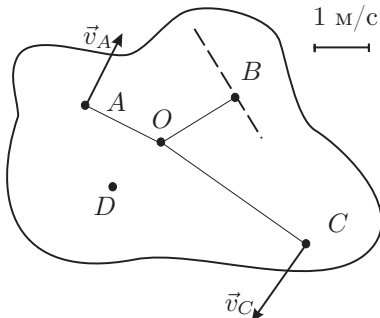


Рис. 89

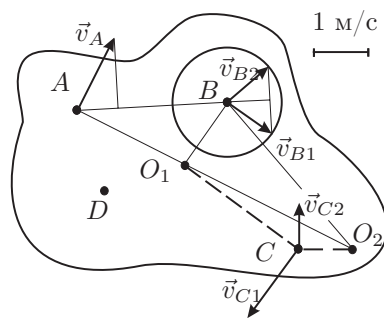


Рис. 90

2. Для скорости точки B можно указать лишь изображённую на рис. 90 окружность, на которой находится конец вектора $\vec{v}_B$. Направление вектора $\vec{v}_B$ можно найти исходя из того, что для абсолютно твёрдого тела проекции скоростей двух точек на соединяющую их прямую должны быть равны, иначе расстояние между точками изменилось бы. Отложив на прямой AB от точки B отрезок, равный проекции $\vec{v}_A$ на AB , получим два возможных направления скорости точки B : $\vec{v}_{B1}$ и $\vec{v}_{B2}$ (рис. 90). Для каждого из этих двух возможных направлений построим соответствующие им мгновенные центры вращения O_1 , O_2 и найдём две возможные скорости $\vec{v}_{C1}$ и $\vec{v}_{C2}$ тем же способом, который применялся в пункте 1. Направления скоростей показаны на рис. 90, а модули следующие:

$$v_{C1} = 1,7 \text{ м/с} \quad \text{и} \quad v_{C2} = 0,3 \text{ м/с}.$$

3. В третьем пункте задано, что модули скоростей точек B и C равны. Если совпадают и их направления, то тело движется поступательно. В этом случае искомая скорость точки D , как и всех других точек, равна $\vec{v}_A$. Если же скорости $\vec{v}_B$ и $\vec{v}_C$ не сонаправлены, то следует построить мгновенный центр и поступать так, как в пункте 1.

Мгновенный центр лежит на перпендикуляре к скорости $\vec{v}_A$, проведённом из точки A , а также на перпендикуляре к отрезку BC , проходящем через середину этого отрезка. Именно так построена точка O на рис. 91. Искомая скорость $\vec{v}_D$ перпендикулярна OD и равна по модулю

$$v_D = v_A \frac{OD}{OA} = 1,0 \text{ м/с}.$$

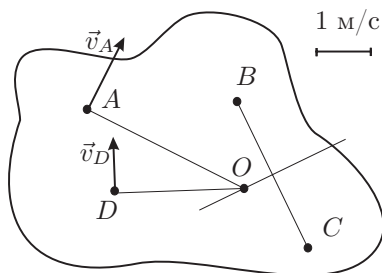


Рис. 91

Таким образом, ответ задачи неоднозначен. Аналогичная ситуация имела место в пункте 2.

Задача 21. Камни (2002 год)

Если пренебречь сопротивлением воздуха, то можно считать, что оба камня движутся с постоянным ускорением, равным ускорению свободного падения $\vec{g}$. Для описания их движения введём декартову систему координат так, как показано на рис. 92.

Если через промежуток времени t камни столкнутся, то можно приравнять их координаты:

$$vt \cos \beta = L + v_0 t \cos \alpha, \quad (78)$$

$$vt \sin \beta - \frac{gt^2}{2} = H + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (79)$$

Из этих уравнений найдём

$$v = v_0 \frac{\sin \alpha - \frac{H}{L} \cos \alpha}{\sin \beta - \frac{H}{L} \cos \beta}, \quad (80)$$

$$t = \frac{L}{v_0 \cos \alpha} \left(\frac{\frac{H}{L} - \operatorname{tg} \alpha}{\frac{H}{L} - \operatorname{tg} \beta} - 1 \right)^{-1}. \quad (81)$$

Время движения до столкновения удобно выразить через скорость $\vec{v}_r$ движения одного камня относительно другого (рис. 92):

$$t = \frac{\sqrt{L^2 + H^2}}{v_r}.$$

При фиксированных величине и направлении вектора $\vec{v}_0$ и заданном направлении вектора $\vec{v}$ из векторного треугольника скоростей, показанного на рис. 92, видно, что меньшим v_r соответствует меньшая скорость v . Таким образом, минимальной скорости v соответствует минимальное значение v_r и, следовательно, максимальное время t . Ещё одно условие ограничивает возможность столкновения камней. Камень, пущенный вдогонку, должен уда-

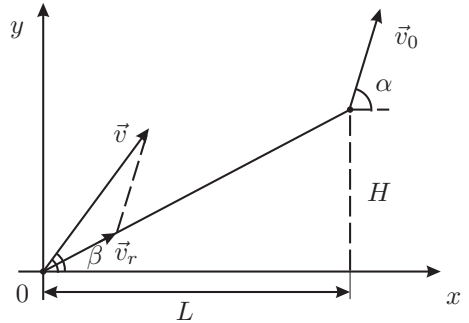


Рис. 92

литься от начала координат по горизонтали на расстояние, большее L . Дальность его полёта равна $v^2 \sin 2\beta / g$. Поэтому должно быть обеспечено условие

$$v^2 \sin 2\beta \geq Lg. \quad (82)$$

Итак, нужно найти такие значения v и β , которые удовлетворяют равенству (80), неравенству (82) и обеспечивают наибольшее значение (81). Подставляя выражение (80) в (82), получим неравенство

$$2 \frac{v_0^2}{Lg} \left(\sin \alpha - \frac{H}{L} \cos \alpha \right)^2 \operatorname{tg} \beta - \left(\operatorname{tg} \beta - \frac{H}{L} \right)^2 \geq 0.$$

Обозначив

$$\frac{v_0^2}{Lg} \left(\sin \alpha - \frac{H}{L} \cos \alpha \right)^2 = a$$

и $\operatorname{tg} \beta = \xi$, получим

$$\xi^2 - 2 \left(\frac{H}{L} + a \right) \xi + \frac{H^2}{L^2} \leq 0.$$

Это неравенство выполняется, если

$$\frac{H}{L} + a - \sqrt{a^2 + 2a \frac{H}{L}} \leq \xi \leq \frac{H}{L} + a + \sqrt{a^2 + 2a \frac{H}{L}}.$$

Как видно из формулы (81) при $\alpha = 0^\circ$, большие значения t обеспечиваются меньшими значениями $\xi = \operatorname{tg} \beta$. Поэтому нужно выбрать для ξ меньшее значение. Получим

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{L} + a - \sqrt{a^2 + 2a \frac{H}{L}} \quad \text{при} \quad \alpha = 0^\circ. \quad (83)$$

Аналогично из формулы (81) при $\alpha = 60^\circ$ видим, что большие значения t обеспечиваются большими значениями $\xi = \operatorname{tg} \beta$. Поэтому нужно выбрать для ξ большее значение. Получим

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{L} + a + \sqrt{a^2 + 2a \frac{H}{L}} \quad \text{при} \quad \alpha = 60^\circ. \quad (84)$$

Таким образом, ответы на поставленные в условии вопросы содержатся в формулах (83), (84) и (80). Подставляя численные значения, находим

$$\alpha = 0^\circ, \quad \beta \approx 11^\circ, \quad v \approx 16,4 \text{ м/с.}$$

$$\alpha = 60^\circ, \quad \beta \approx 58^\circ, \quad v \approx 10,5 \text{ м/с.}$$

Задача 22. Пластина (2002 год)

Вблизи поверхности смачиваемой пластины вода приподнимается, образуя вогнутый мениск (рис. 93).

На пластину с обеих сторон действуют силы поверхностного натяжения $\vec{F}_t$. Модуль результирующей силы $\vec{F}$, приложенной к пластине, как видно из рис. 93, составляет

$$F = 2F_t \cos \theta = 2\sigma L \cos \theta.$$

Об этой силе и идёт речь в первом пункте задачи.

Для ответа на вопрос второго пункта приравняем давление в воде на уровне её поверхности вдали от пластины и в точке с координатой x (рис. 93):

$$p_a = p_a - p + \rho g y. \quad (85)$$

Здесь p_a — атмосферное давление, p — разность давлений на вогнутой и выпуклой сторонах искривлённой поверхности жидкости, $\rho g y$ — давление столба

воды на глубине y . Дополнительное давление, создаваемое искривлённой поверхностью жидкости, составляет

$$p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\sigma}{R}. \quad (86)$$

Здесь $R_1 = R$ — радиус кривизны сечения в плоскости рисунка для точки x , а $R_2 = \infty$, так как соответствующее ему сечение представляет собой прямую линию. Подставляя выражение (86) в формулу (85) и выражая R по формуле, приведённой в условии, получим

$$\rho g y = \frac{\sigma y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}. \quad (87)$$

Сделаем преобразование

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{dy'}{dy} = y' \frac{dy'}{dy} = \frac{1}{2} \frac{d}{dy} (y')^2,$$

приведём уравнение (87) к виду

$$y dy = \frac{\sigma}{2\rho g} \frac{d(y')^2}{(1 + (y')^2)^{3/2}}. \quad (88)$$

Проинтегрируем последнее уравнение с учётом того, что при $y = h$ имеем $y' = -\operatorname{ctg} \theta$. В результате интегрирования найдём

$$h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g} (1 - \sin \theta)}.$$

Этот же результат можно было получить, не прибегая к интегрированию. Достаточно записать условие равновесия жидкости, поднятой вблизи пластины.

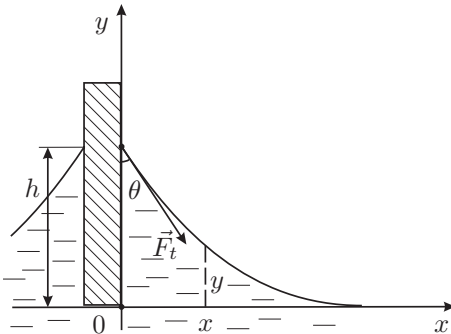


Рис. 93

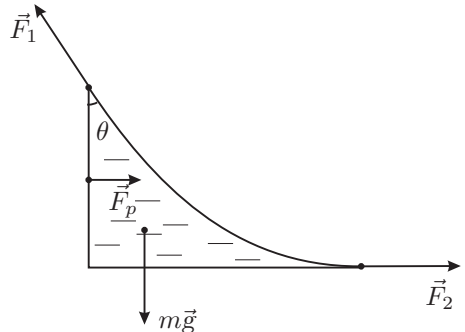


Рис. 94

На рис. 94 показаны силы, приложенные к этому элементу жидкости: $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ — силы поверхностного натяжения, $m\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{F}_p$ — средняя сила давления со стороны пластины. В проекциях на горизонтальное направление получим

$$\sigma L - \sigma L \sin \theta = \frac{\rho g h}{2} L h,$$

откуда

$$h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}} (1 - \sin \theta).$$

В третьем пункте задачи требуется найти функцию $y(x)$, описывающую мениск, изображённый на рис. 93. Для этого нужно проинтегрировать уравнение (88), учтя, что при $y = 0$ имеем $y' = 0$. Преобразуем его:

$$y' = \frac{dy}{dx} = - \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \rho g \frac{y^2}{2\sigma}\right)^2} - 1},$$

откуда

$$- \frac{\left(1 - \frac{\rho g y^2}{2\sigma}\right)}{\sqrt{\frac{\rho g y^2}{\sigma} - \frac{\rho^2 g^2 y^4}{4\sigma^2}}} dy = dx.$$

Для интегрирования последнего уравнения используем подстановку

$$y = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \sin \varphi.$$

Тогда получаем

$$x = - \int \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \cdot \frac{1 - 2 \sin^2 \varphi}{\sin \varphi} d\varphi = - \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + C.$$

Возвращаемся к переменной y :

$$x = - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\rho g y^2}{4\sigma}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\rho g y^2}{4\sigma}}} \right) - 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \sqrt{1 - \frac{\rho g y^2}{4\sigma}} + C, \quad (89)$$

где постоянная интегрирования C находится из того, что если $x = 0$, то $y = h$:

$$C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \sin \theta}}{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sin \theta}} \right) + \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}} \sqrt{1 + \sin \theta}.$$

Для наглядного представления функции $y(x)$, неявно заданной громоздким выражением (89), следует построить её график. Это можно сделать, прибегнув к помощи компьютера. Системы компьютерной математики прекрасно справляются с подобными задачами. Одной из самых простых для начинающего пользователя и достаточно мощной системой является MathCAD. С её помощью и получен рис. 95, где изображён график искомой функции, отражающий форму мениска. Поскольку интерес представляет лишь характер поведения функции, конкретные численные значения параметров задавались произвольно. Варьирование угла θ моделировалось изменением значения постоянной C .

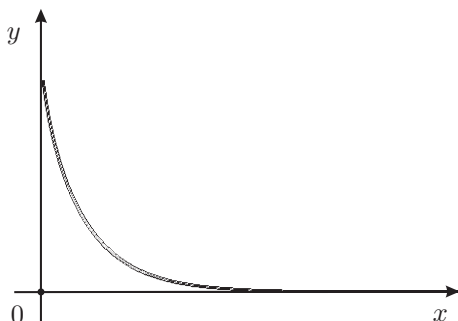


Рис. 95

Задача 23. На планете Туй (2003 год)

Поскольку и семена, и шарик языка движутся относительно планеты Туй с постоянным ускорением $\vec{g}$, целесообразно перейти в систему отсчёта, которая тоже движется с тем же ускорением относительно планеты. В этой системе отсчёта и семена, и шарик языка движутся равномерно и прямолинейно (рис. 96).

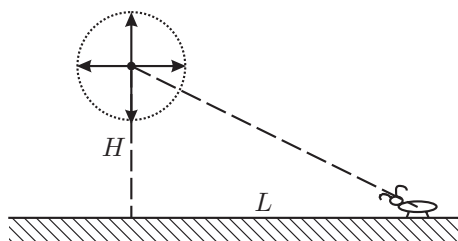


Рис. 96

Спустя время t от начала движения семени окажутся в точках, удалённых от места разрыва плода Маа на расстояние $v_0 t$. За это же время шарик языка животного Да должен оказаться в центре изображённой на рис. 96 сферы радиуса $l = v_0 t$, а мгновенно выпущенные щупальцы минимальной длины l «слижут» все семена на поверхности этой сферы. Цель будет достигнута, если путь, пройденный шариком языка за это время t , окажется равным гипотенузе изображённого на рис. 96 треугольника. Отсюда находим

$$t = \frac{\sqrt{L^2 + H^2}}{v}.$$

Минимальная длина щупалец должна быть равна

$$l = v_0 t = \frac{v_0}{v} \sqrt{L^2 + H^2},$$

а угол, который составляет скорость шарика языка $\vec{v}$ с горизонтом в момент выбрасывания,

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{H}{L} \right).$$

Нельзя ли животному Да обойтись более короткими щупальцами, если выпускать их раньше, чем шарик языка достигнет точки разрыва плода Маа? Пусть шарик раскрывается в момент времени $t - \Delta t$, где Δt — время упреждения. Тогда, чтобы достать в этот момент самые далёкие семена, нужны щупальцы длиной

$$l_1 = v\Delta t + v_0(t - \Delta t) = v_0t + (v - v_0)\Delta t. \quad (90)$$

Если $v > v_0$, то минимальное значение $l_1 = l$. Именно этот случай и рассмотрен выше. Если же семена разлетаются быстрее, чем выбрасывается язык ($v < v_0$), то минимальная величина l_1 достигается, как видно из формулы (90), при $t = \Delta t$. Тогда

$$l_1 = vt = \sqrt{H^2 + L^2}.$$

Таким образом, Да должен по внешнему виду плода определить, быстро или медленно будут разлетаться семена, и решить, выпускать ли щупальца сразу в момент разрыва или же вначале выстрелить шарик языка в разрывающийся плод. А читатель должен обратить внимание на то, что при решении задач с абстрактным содержанием (в которых не заданы численные значения) следует анализировать все возможные варианты.

Задача 24. Конус (2003 год)

Площадь основания конуса $S = \pi R^2$, его объём $V = SH/3 = \pi R^2 H/3$, сила Архимеда, действующая на конус, $F_A = \rho g V = \rho g \pi R^2 H/3$.

По своей природе сила Архимеда равна векторной сумме сил давления жидкости на поверхность помещённого в неё тела, то есть в нашем случае

$$\vec{F}_A = \vec{F} + \vec{F}_0, \quad (91)$$

где F — искомая сила, а F_0 — сила давления жидкости на основание конуса.

В силу симметрии основания и однородности поля тяжести среднее давление $P_{\text{ср}}$ на основание равно давлению на уровне центра основания, то есть $P_{\text{ср}} = P_0 + \rho g L$, поэтому $F_0 = P_{\text{ср}} S = (P_0 + \rho g L) \pi R^2$.

Сила F_A направлена вертикально вверх, а F_0 — перпендикулярно основанию конуса, то есть вдоль его оси, под углом α к горизонту. Применив теорему косинусов к треугольнику (рис. 97), составленному из векторов сил согласно уравнению (91), получим

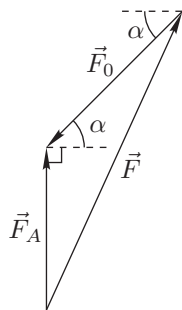


Рис. 97

$$F^2 = F_A^2 + F_0^2 - 2F_A F_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right),$$

откуда

$$F = \sqrt{F_A^2 + F_0^2 + 2F_A F_0 \sin \alpha} = \\ = \pi R^2 \sqrt{\frac{1}{9} \rho^2 g^2 H^2 + (P_0 + \rho g L)^2 + \frac{2}{3} \rho g H (P_0 + \rho g L) \sin \alpha}.$$

Примечание. Обратите внимание на то, что сила давления жидкости на часть поверхности погружённого в неё тела зависит от внешнего давления P_0 и глубины погружения L , а при суммировании векторов сил давления по всей поверхности получается сила Архимеда, которая уже не зависит от P_0 и L .

Примерная система оценивания

Связь силы Архимеда с силами давления	2
Выражение для F_A	2
Выражение для F_0	2
Ответ	4

Задача 25. Проволочная скобка (2003 год)

На рис. 98 показан момент времени, когда нить ещё не порвалась, но вот-вот порвётся.

В этот момент расстояние от груза до линии, вдоль которой перемещаются концы нити, равно x . Символом u обозначена скорость груза в этот момент времени. Проекции скорости груза и конца одного из отрезков (любого) нити на сам этот отрезок должны быть одинаковыми, так как нить нерастяжима. Таким образом,

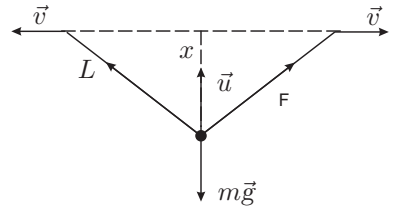


Рис. 98

$$u = v \frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{x} \approx v \frac{L}{x}. \quad (92)$$

Из заданного в условии соотношения $F \gg mg$ можно предположить, что угол, который составляют нити в момент разрыва, будет близок к 180° . Это означает, что скорость груза в этот момент будет примерно равна $u = vL/x$.

Для нахождения x в момент разрыва нити запишем второй закон Ньютона:

$$m \frac{du}{dt} = 2F \frac{x}{L} - mg. \quad (93)$$

Естественно предположить, что в момент разрыва первое слагаемое в правой части равенства (93) играет определяющую роль, то есть

$$2F \frac{x}{L} \gg mg. \quad (94)$$

Будем решать задачу в этом приближении. Из формулы (92) найдём

$$\frac{du}{dt} = v \frac{L}{x^2} u = \frac{v^2 L^2}{x^3}. \quad (95)$$

Подставляя выражения (95) и (94) в формулу (93), получим

$$x = \left(\frac{v^2 L^3 m}{2F} \right)^{1/4}. \quad (96)$$

Подсчитав численное значение x по формуле (96), убеждаемся в справедливости сделанного предположения (94):

$$2F \frac{x}{L} = 1 \text{ Н} \gg 0,01 \text{ Н} = mg.$$

Максимальную высоту подъёма скобки теперь нетрудно определить из закона сохранения энергии, используя формулы (92) и (96):

$$H = \frac{u^2}{2g} = \frac{v}{2g} \sqrt{\frac{2FL}{m}} \approx 5 \text{ м.}$$

Задача 26. Цунами (2003 год)

Пусть цунами перемещается вдоль оси x со скоростью v . Рассмотрим движение частиц воды в системе отсчёта, связанной с горбом волны (рис. 99).

Вдали от горба в сечении 1 вода относительно этой системы отсчёта движется со скоростью v в направлении, противоположном оси x . В области горба горизонтальная составляющая скорости частиц воды равна u . Вследствие несжимаемости жидкости массы воды, проходящей за время Δt через сечения 1 и 2, равны:

$$\rho h b v \Delta t = \rho h_1 b u \Delta t,$$

где ρ — плотность воды, b — толщина рассматриваемого слоя воды в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка. Из полученного соотношения следует, что

$$u = v \frac{h}{h_1}. \quad (97)$$

Применим к воде рассматриваемого слоя, которая заключена в объёме между сечениями 1 и 2, закон изменения импульса за время Δt :

$$\rho v b h v \Delta t - \rho u b h v \Delta t = \frac{1}{2} (-\rho g h^2 b + \rho g h_1^2 b) \Delta t, \text{ или } h v (v - u) = \frac{g}{2} (h_1 - h) (h + h_1),$$

где g — ускорение свободного падения, а множитель $1/2$ учитывает линейное уменьшение давления с высотой.

Подставляя в последнее выражение соотношение (97) и учитывая, что высота волны существенно меньше глубины водоёма, то есть $h+h_1 \approx 2h$, получим

$$v \approx \sqrt{gh}.$$

Этот результат ограничен требованием малости глубины h по сравнению с длиной волны λ . В противном случае в волновое движение вовлекается только слой воды глубиной порядка λ . Тогда скорость волны выражается приближённой формулой

$$v \sim \sqrt{g\lambda}, \quad \text{или, точнее,} \quad v = \sqrt{g \frac{\lambda}{2\pi}}.$$

Скорость волн, о которых идёт речь во втором пункте, уменьшается при приближении к берегу в соответствии с полученным выше результатом:

$$v(x) = \sqrt{gx \operatorname{tg} \alpha}, \quad (98)$$

где α — угол наклона к горизонту морского дна. Эта зависимость приводит к искривлению линии (волнового луча), вдоль которой распространяется волна. Изменение направления волнового луча определяется соотношением, которое чаще всего используется для оптических волн:

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2}, \quad (99)$$

где φ_1 и φ_2 — углы падения и преломления луча на границе сред, скорости распространения волн в которых равны соответственно v_1 и v_2 . Соотношение (99) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\sin \varphi_1}{v_1} = \frac{\sin \varphi_2}{v_2} = \frac{\sin \varphi}{v} = \text{const.} \quad (100)$$

В таком виде формула (100) применима и к непрерывному изменению угла φ (искривлению луча), если скорость волны плавно изменяется от точки к точке.

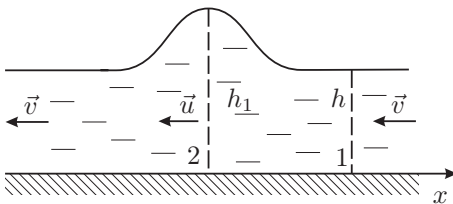


Рис. 99

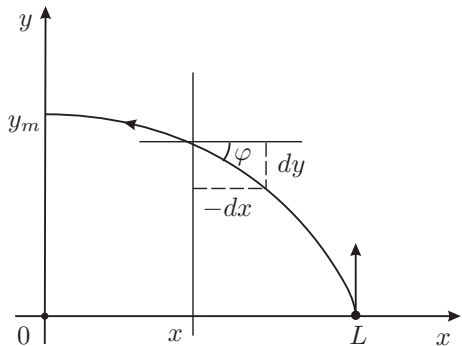


Рис. 100

Для определения положения точки на поверхности моря введём декартову систему координат так, чтобы ось y была направлена вдоль берега, а ось x проходила через точку с координатой $x = L$, в которой произошёл взрыв, вызвавший волны. Рассмотрим искривление луча, попадающего в точку берега с координатой y_m , наиболее удалённую от места взрыва (рис. 100). Из этого рисунка видно, что

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{dy}{dx}. \quad (101)$$

В соотношение (99) подставим выражение (98) и учтём, что при $x \rightarrow L$ угол падения φ стремится к $\pi/2$:

$$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{gx \operatorname{tg} \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{gL \operatorname{tg} \alpha}},$$

откуда

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{x}{L}}.$$

Последнее выражение позволяет переписать уравнение (101) в виде

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{x}{L - x}}.$$

Остаётся проинтегрировать это уравнение:

$$y_m = - \int_L^0 \sqrt{\frac{x}{L - x}} dx.$$

Используя подстановку $x = L \sin^2 \beta$, получим

$$y_m = L \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \beta}{\cos \beta} 2 \cos \beta \sin \beta d\beta = L \int_0^{\pi/2} 2 \sin^2 \beta d\beta = L \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, длина участка берега, до которого дойдут волны, порождённые взрывом, равна $2y_m = \pi L$.

Задача 27. Отскок вращающейся шайбы (2004 год)

Применим к шайбе закон изменения энергии, а также закон изменения импульса в проекциях на ось x , направленную вдоль стенки, и ось y , перпендикулярную к ней:

$$\frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} - \frac{mv_{0x}^2}{2} - \frac{mv_{0y}^2}{2} = -\mu N \Delta S, \quad (102)$$

$$mv_x - mv_{0x} = -\mu N \Delta t, \quad (103)$$

$$mv_y - mv_{0y} = N \Delta t. \quad (104)$$

Здесь $v_x = v \sin \psi$, $v_y = v \cos \psi$, $v_{0x} = v_0 \sin \varphi$, $v_{0y} = v_0 \cos \varphi$, N — сила нормальной реакции стенки, ΔS — смещение шайбы вдоль стенки за время удара Δt . Предполагая, что шайба в течение всего времени Δt скользит по стенке, величину ΔS можно приблизительно выразить так:

$$\Delta S = \frac{1}{2}(v_x + v_{0x})\Delta t.$$

Подставляя это значение, можно из уравнений (102) и (103) получить соотношение $v_y^2 = v_{0y}^2$. Следовательно, при ударе сохраняется модуль нормальной к стенке составляющей скорости ($v_y = v_{0y}$). Тогда из уравнений (103) и (104) получим

$$\frac{v_x - v_{0x}}{2v_y} = -\mu, \quad \text{или} \quad \frac{v_x}{v_y} = \frac{v_{0x}}{v_y} - 2\mu,$$

или

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi - 2\mu. \quad (105)$$

Найдём скорость шайбы после удара о стенку:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0 \cos \varphi \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \varphi - 2\mu)^2}.$$

Из формулы (105) следует, что быстро вращающаяся шайба отскочит от стенки в перпендикулярном к ней направлении ($\psi = 0$), если $\mu = (\operatorname{tg} \varphi)/2$, и в обратном направлении ($\psi = -\varphi$), если $\mu = \operatorname{tg} \varphi$.

В течение времени столкновения шайба скользит по стене, в результате чего под действием силы трения скольжения скорость вращения шайбы уменьшается. Для нахождения изменения угловой скорости следует применить закон изменения момента импульса:

$$I \frac{d\omega}{dt} = -\mu N R.$$

Интегрируем это уравнение:

$$I(\omega - \omega_0) = -\mu N R \Delta t.$$

Учтём уравнение (104):

$$I(\omega - \omega_0) = -2\mu m R v_0 \cos \varphi.$$

Отсюда, подставляя $I = mR^2/2$, найдём

$$\omega = \omega_0 - \frac{4\mu v_0 \cos \varphi}{R}.$$

Ответ справедлив при заданном в условии ограничении $\omega_0 > 4\mu v_0 \cos \varphi / R$, накладываемом на ω_0 . Если

$$\mu \geq \frac{\omega_0 R}{4v_0 \cos \varphi},$$

то шайба в процессе столкновения перестанет вращаться.

Задача 28. Склеенный обруч (2004 год)

Для ответа на первый вопрос задачи следует применить закон сохранения энергии:

$$(m_2 - m_1)g \cdot 2y_0 = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (106)$$

где y_0 — расстояние от оси обруча до центра масс его половинок, I — момент инерции обруча относительно точки опоры, $\omega = v_0/R$ — начальная угловая скорость вращения обруча. Для определения величины y_0 воспользуемся формулой, по которой находится координата центра масс, отсчитываемая от диаметра половины обруча:

$$y_0 = \frac{1}{m} \int y \, dm,$$

где m — масса половинки обруча, а y — расстояние от элемента dm до диаметра. Из рис. 101 видно, что $y = R \sin \varphi$, $dm = m \cdot d\varphi / \pi$. Поэтому получим

$$y_0 = \frac{R}{\pi} \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi = \frac{2R}{\pi}. \quad (107)$$

Входящий в уравнение (106) момент инерции I равен сумме моментов инерции каждой половинки: $I = I_1 + I_2$. Моменты инерции половин относительно оси обруча составляют $I_{10} = m_1 R^2$, $I_{20} = m_2 R^2$. По теореме Штейнера эти моменты можно связать с моментами инерции I_{1c} и I_{2c} относительно центров масс. Получаем

$$\begin{aligned} I_{10} &= m_1 R^2 = I_{1c} + m_1 y_0^2, \\ I_{20} &= m_2 R^2 = I_{2c} + m_2 y_0^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$I_{1c} = m_1 R^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right), \quad I_{2c} = m_2 R^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right).$$

По той же теореме Штейнера найдём

$$I_1 = I_{1c} + m_1 (R + y_0)^2, \quad I_2 = I_{2c} + m_2 (R - y_0)^2.$$

Складывая I_1 и I_2 , получим искомый момент инерции обруча:

$$I = I_1 + I_2 = 2R^2 \left(m_1 \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) + m_2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \right). \quad (108)$$

Подставим полученные выражения (107) и (108) в уравнение (106):

$$(m_2 - m_1)g \frac{4R}{\pi} = \frac{1}{2} 2R^2 \left(m_1 \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) + m_2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \right) \frac{v_0^2}{R^2},$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{4(m_2 - m_1)gR}{m_1(\pi + 2) + m_2(\pi - 2)}}.$$

Как видим, чем больше разность $m_2 - m_1$, тем больше нужно сообщить скорость, для того чтобы обруч сделал полный оборот. Однородный обруч ($m_2 = m_1$) будет в отсутствие проскальзывания равномерно катиться после сообщения ему сколь угодно малой скорости v_0 .

Для нахождения периода малых колебаний системы нужно привести динамическое уравнение к виду $\ddot{x} = -\omega^2 x$ (точка означает дифференцирование по времени), и тогда $T = 2\pi/\omega$. Динамическое уравнение можно получить, записав выражение для энергии системы при небольшом отклонении её от положения равновесия. Для рассматриваемого обруча при повороте его на малый угол φ от положения равновесия получим

$$E = (m_2 - m_1)gy_0(1 - \cos \varphi) + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2, \quad (109)$$

где $\dot{\varphi} = \omega$. В отсутствие трения энергия сохраняется, то есть $\dot{E} = 0$. Дифференцируя уравнение (109) и учитывая малость угла φ , получим

$$(m_2 - m_1)gy_0 \sin \varphi \dot{\varphi} + I\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = 0, \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} = -\frac{(m_2 - m_1)gy_0}{I}\varphi.$$

Следовательно,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{(m_2 - m_1)gy_0}}.$$

Подставляя сюда выражения (107) и (108), получим ответ:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \sqrt{\pi \frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1}} - 2.$$

Если $m_2 \rightarrow m_1$, то $T \rightarrow \infty$. Это и означает, что колебательное движение обруча сменяется его вращением.

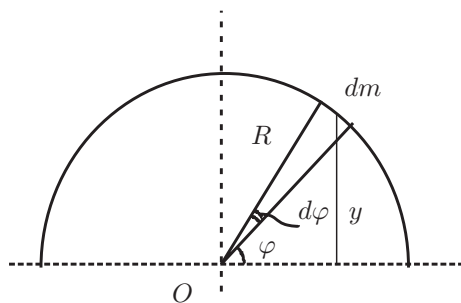


Рис. 101

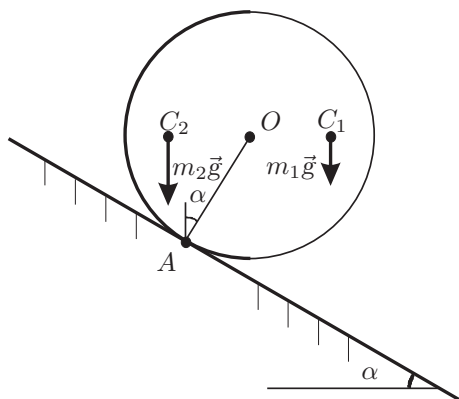


Рис. 102

При наклоне опорной плоскости качению препятствует тяжёлая половина обруча: момент её силы тяжести относительно точки опоры при малых углах наклона уравнивает момент силы тяжести лёгкой половины. Когда угол наклона становится таким, что центры масс половин C_1 и C_2 оказываются на одном горизонтальном уровне (рис. 102), момент силы $m_2\vec{g}$ относительно точки A достигает максимального значения. При дальнейшем увеличении угла α он уже не может компенсировать увеличивающийся момент силы $m_1\vec{g}$. Равенство моментов сил $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ относительно точки A для критического положения, изображённого на рис. 102, и определяет максимальный угол наклона $\alpha = \alpha_{\max}$:

$$\alpha_{\max} = \arcsin \left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right).$$

Задача 29. Шайба в клетке, или треугольный бильярд (2005 год)

Соударение шайбы со стенкой происходит абсолютно упруго, поэтому из законов сохранения энергии и проекции импульса на направление стенки следует, что при ударе скорость шайбы не изменяется по модулю, а её угол отражения равен углу падения. Поскольку шайба ведёт себя подобно световому лучу, а стенка — зеркалу, воспользуемся оптическими методами и терминологией. Построить изображение в оптической системе с зеркалом можно с помощью отражения всех элементов системы в область «зазеркалья» вместо обычного отражения реальных лучей в зеркале. В рамках этого метода становится возможным рассматривать прямые лучи, а не ломанные из-за отражений.

На рис. 103 показан исходный треугольник ABC и его многократные отражения относительно сторон. Изображения целевой вершины C выделены жирными точками, а траектории шайбы из точки D проведены тонкими линиями. Точки C_1, C_2, C_3 и C_4 — это все те изображения вершины C , в которые шайба может попасть, испытав не более шести соударений со стенками. В этом

легко убедиться, так как согласно используемому методу отражение шайбы от стенки выглядит как прохождение шайбы сквозь изображение стенки.

Поскольку на отрезке DC_4 лежит точка A_0 , являющаяся изображением вершины A , шайба прекратит движение до попадания в точку C_4 , которую исключаем из рассмотрения. Выберем начало системы координат в точке D и проведём оси x и y в направлении точек B и C соответственно, тогда координаты изображений целевой вершины в единицах $l/2$ будут следующими:

$$C_1 \left(3; 2\sqrt{3} \right), \quad C_2 \left(3; 4\sqrt{3} \right), \quad C_3 \left(6; \sqrt{3} \right).$$

Искомые углы найдём через эти координаты x и y по формуле $\varphi = \arctg(y/x)$:

$$\varphi_1 = \arctg \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \approx 49,1^\circ,$$

$$\varphi_2 = \arctg \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \right) \approx 66,6^\circ,$$

$$\varphi_3 = \arctg \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \approx 16,1^\circ.$$

Ближайшее к точке старта изображение целевой вершины — это точка C_1 , поэтому искомое минимальное время составляет

$$t_{\min} = \frac{DC_1}{v} = \frac{l\sqrt{21}}{2v} \approx 2,3 \cdot \frac{l}{v}.$$

Примерная система оценивания

Идея отражения системы в целом, а не луча	3
Значение φ_1	1
Значение φ_2	1
Значение φ_3	1
Отсутствие других φ при наличии трёх верных	1
Ответ для $t_{\min}$	3

Задача 30. Верёвка (2005 год)

Верёвка движется равномерно. Следовательно, сумма сил, приложенных к ней, а также к её части, равна нулю. К верёвке приложены следующие силы (рис. 104): $\vec{T}_0$ — сила, удерживающая верхний конец верёвки на одной высоте; $\rho \vec{g}l_1$ и $\rho \vec{g}l_2$ — силы тяжести её двух частей; $\vec{N}$ — сила нормальной реакции со стороны горизонтальной поверхности; $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила трения этой поверхности.

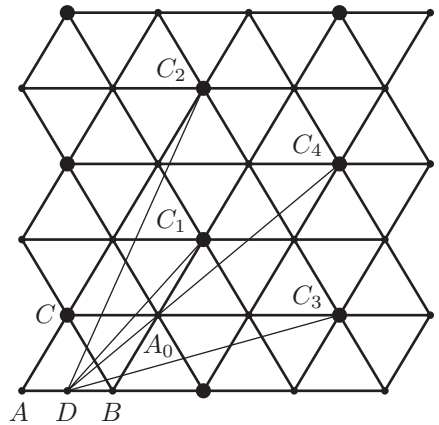


Рис. 103

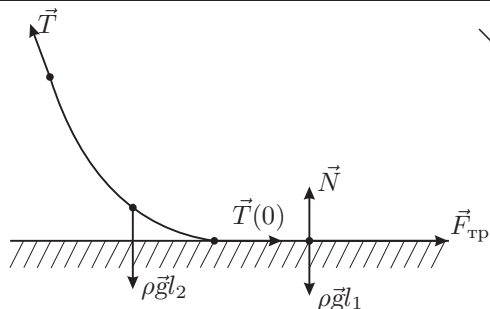


Рис. 104

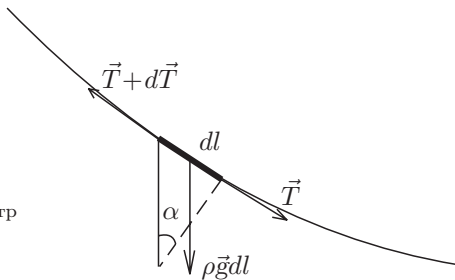


Рис. 105

Запишем условие равновесия для части верёвки, висящей в воздухе:

$$\vec{T}_0 + \rho \vec{g} l_2 + \vec{T}(0) = 0,$$

где $\vec{T}(0)$ — сила, действующая со стороны части верёвки, лежащей на поверхности. Из этого условия получим

$$T_0 = \sqrt{(\rho g l_2)^2 + (T(0))^2}. \quad (110)$$

Чтобы найти $T(0)$, запишем условие равновесия малого элемента верёвки длиной dl (рис. 105):

$$T + dT = T + \rho g dl \sin \alpha.$$

Отсюда следует, что

$$dT = \rho g dh,$$

то есть для силы натяжения $T(h)$ в точке верёвки, находящейся на высоте h над поверхностью, имеем

$$T_0 - T(h) = \rho g (H - h).$$

Отсюда получаем значение силы натяжения в самой нижней точке той части верёвки, которая не соприкасается с поверхностью:

$$T(0) = T_0 - \rho g H. \quad (111)$$

Такая же по модулю сила в соответствии с третьим законом Ньютона действует и на горизонтальную часть верёвки. Условия равновесия этой части имеют вид

$$\rho g l_1 = N,$$

$$T(0) = F_{\text{тр}} = kN = k\rho g l_1. \quad (112)$$

Из системы уравнений (110), (111) и (112) получим ответ:

$$l_2 = \sqrt{H(H + 2kl_1)}.$$

Проанализируем полученный результат в предельном случае $k \rightarrow 0$. Видим, что $l_2 \rightarrow H$, то есть при малом трении не лежащая на поверхности часть верёвки располагается почти вертикально, что вполне соответствует интуитивно ожидаемому результату.

Задача 31. Дискретная модель движения лавины (2005 год)

Как компактно описать множество последовательных столкновений нарастающей цепочки с очередным брусом? Поскольку все эти процессы аналогичны, рассмотрим один из них: столкновение цепочки уже слипшихся n брусков с очередным $(n + 1)$ -м брусом. Обозначим скорость цепочки сразу после соударения с n -м брусом v_n . Найдём скорость цепочки после столкновения с $(n + 1)$ -м брусом v_{n+1} . Для этого следует применить закон сохранения энергии цепочки при движении её к $(n + 1)$ -му бруску и закон сохранения импульса при очередном столкновении. Получим

$$v_{n+1}^2 = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 (v_n^2 + 2gL \sin \alpha). \quad (113)$$

Применяя это рекуррентное соотношение, при $v_1 = 0$ получим

$$\begin{aligned} v_2^2 &= \frac{2gL \sin \alpha}{2^2}, \\ v_3^2 &= \frac{2gL \sin \alpha}{3^2} (1^2 + 2^2), \\ v_4^2 &= \frac{2gL \sin \alpha}{4^2} (1^2 + 2^2 + 3^2), \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_{n+1}^2 &= \frac{2gL \sin \alpha}{(n+1)^2} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2). \end{aligned} \quad (114)$$

Как подсчитать входящую в формулу (114) сумму квадратов натуральных чисел? Для конкретных значений n можно воспользоваться компьютером, таблицами или формулой

$$\sum_1^n n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Можно при больших n эту сумму приближённо заменить интегралом:

$$\sum_1^n n^2 \approx \int_0^n x^2 dx = \frac{n^3}{3}. \quad (115)$$

В самом деле, приведём результаты вычислений:

n	5	10	50	100	400
$\sum_1^n n^2$	55	385	$4,29 \cdot 10^4$	$3,38 \cdot 10^5$	$2,141 \cdot 10^7$
$\int_0^n x^2 dx$	42	333	$4,17 \cdot 10^4$	$3,33 \cdot 10^5$	$2,133 \cdot 10^7$

С учётом формулы (115) выражение (114) упрощается:

$$v_{n+1}^2 \approx \frac{2}{3}gLn \sin \alpha. \quad (116)$$

Энергия «лавины» после $n \gg 1$ столкновений с учётом формулы (116) составляет

$$E_n \approx \frac{1}{3}mgLn^2 \sin \alpha. \quad (117)$$

Искомое в пункте 1 приращение энергии составляет

$$\Delta E \approx \frac{2}{3}mgLn \sin \alpha.$$

Ответ в задании 2 следует из формулы (117):

$$E_k - E_n \approx \frac{1}{3}mgL(k^2 - n^2) \sin \alpha.$$

В задании 3 требуется учесть силу трения. Тогда вместо формулы (113) получаем

$$v_{n+1}^2 = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 (v_n^2 + 2gL \sin \alpha - 2\mu gL \cos \alpha), \quad (118)$$

где μ — коэффициент трения. Его можно определить из условия равномерного скольжения по «лавиноопасному» склону:

$$mg \sin \beta = \mu mg \cos \beta.$$

Из последнего выражения следует, что

$$\mu = \operatorname{tg} \beta.$$

Формула (118) означает, что учёт трения сводится к замене в ответах предыдущих заданий величины g на $g(1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha)$. Отсюда видно, что движение лавины возникает при $\alpha \geq \beta$. Эта оправдывает использованные названия «лавиноопасных» угла и склона.

Таким образом, рассмотренная простая модель позволяет объяснить неожиданное возникновение лавины и быстрый рост её энергии (в формуле (5) $E \sim n^2$).

Задача 32. Противостояние Марса (2005 год)

Для нахождения радиуса орбиты Марса применим к этой планете второй закон Ньютона, учитывая лишь её притяжение к Солнцу:

$$M_M \omega_M^2 R_M = G \frac{M_S M_M}{R_M^2}, \quad (119)$$

где M_M — масса Марса, M_S — масса Солнца, G — гравитационная постоянная. Аналогичное уравнение запишем для Земли:

$$M_E \omega_E^2 R_E = G \frac{M_S M_E}{R_E^2}. \quad (120)$$

Разделив уравнение (120) на уравнение (119), получим

$$\frac{\omega_E}{\omega_M} = \frac{T_M}{T_E} = \left(\frac{R_M}{R_E} \right)^{3/2} = k. \quad (121)$$

Отсюда находим искомый радиус орбиты Марса:

$$R_M = R_E k^{2/3} = 1,52 R_E = 2,28 \cdot 10^{11} \text{ м.}$$

Равенство (121) отражает так называемый третий закон Кеплера. В более общем случае он связывает периоды обращения планет с большими полуосями a их эллиптических орбит:

$$\frac{T_M}{T_E} = \left(\frac{a_M}{a_E} \right)^{3/2}. \quad (122)$$

В положении противостояния Земля, Марс и Солнце лежат на одной прямой (рис. 106).

Если радиус-векторы Земли и Марса вращаются с разными угловыми скоростями ω_M и ω_E , то очередное противостояние наступит через промежуток времени τ , в течение которого разность углов поворота окажется равной 2π :

$$\omega_E \tau - \omega_M \tau = 2\pi.$$

Отсюда находим

$$\tau = \frac{T_E k}{k - 1} \approx 780 \text{ суток.}$$

Чтобы найти угловое смещение φ линии противостояния за промежуток времени τ , следует принять во внимание, что за это время радиус-вектор Марса повернётся на угол, превышающий 2π на искомую величину φ :

$$\varphi = \omega_M \tau - 2\pi = 2\pi \frac{2 - k}{k - 1} \approx 49^\circ.$$

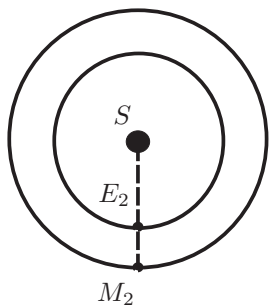


Рис. 106

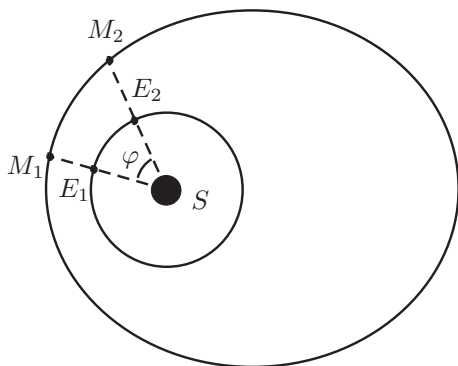


Рис. 107

Для выполнения заданий пункта 3 рассмотрим траекторию Марса в виде эллипса, изображённого на рис. 107. Лучи M_1S и M_2S , ограничивающие угол φ , — линии последовательных противостояний вблизи точки орбиты Марса, удалённой от Солнца приблизительно на расстояние R . Вероятно, угол φ зависит от того, в каком месте эллиптической орбиты окажутся линии последовательных противостояний. Тогда и время между этими противостояниями должно определяться их положениями на орбите. Для проверки этого предположения следует вычислить промежуток времени τ между противостояниями как функцию расстояния R между Марсом и Солнцем.

За время τ Марс совершает один оборот и дополнительно проходит дугу M_1M_2 , а Земля — два оборота и дугу E_1E_2 . Поэтому

$$\tau = T_M + t_M = 2T_E + t_E, \quad (123)$$

где t_M — время движения Марса по дуге M_1M_2 , а t_E — время движения Земли по дуге E_1E_2 .

Для Земли

$$t_E = \frac{\varphi}{\omega_E} = \frac{\varphi}{2\pi} T_E, \quad (124)$$

где φ — угловое перемещение линии противостояния. Время t_M найдём, воспользовавшись вторым законом Кеплера, который говорит о том, что секторная скорость движения планеты по эллиптической орбите в любой момент одинакова. Площадь сектора SM_1M_2 , ограниченного углом φ и траекторией Марса, равна $\varphi R^2/2$. Считая эллиптичность орбиты Марса малой, можно приближённо оценить её площадь как $\pi \left(\frac{R_{\max} + R_{\min}}{2} \right)^2$. Таким образом, для времени t_M движения Марса по дуге M_1M_2 находим следующее выражение:

$$t_M = T_M \frac{\varphi R^2/2}{\pi \left(\frac{R_{\max} + R_{\min}}{2} \right)^2} = T_M \frac{2\varphi}{\pi} \frac{R^2}{(R_{\max} + R_{\min})^2}. \quad (125)$$

Из формул (124) и (125) получаем

$$\frac{t_M}{t_E} = \frac{T_M}{T_E} \left(\frac{2R}{R_{\max} + R_{\min}} \right)^2.$$

Подставим это соотношение в формулу (123):

$$\tau = T_M + t_E \frac{T_M}{T_E} \left(\frac{2R}{R_{\max} + R_{\min}} \right)^2 = 2T_E + t_E.$$

Отсюда найдём вначале

$$t_E = \frac{2T_E - T_M}{\frac{T_M}{T_E} \left(\frac{2R}{R_{\max} + R_{\min}} \right)^2 - 1}, \quad \tau = 2T_E + \frac{2T_E - T_M}{\frac{T_M}{T_E} \left(\frac{2R}{R_{\max} + R_{\min}} \right)^2 - 1}. \quad (126)$$

Имеем $2T_E - T_M = 2T_E - kT_E = T_E(2 - k) > 0$. Кроме того, поскольку R изменяется в пределах от $R_{\min}$ до $R_{\max}$, из соотношений (126) следует, что наименьшему значению $R = R_{\min}$ соответствует наибольшее значение $\tau = \tau_{\max}$, а наибольшему значению $R = R_{\max}$ — наименьшее значение $\tau = \tau_{\min}$. Воспользуемся упомянутым выше третьим законом Кеплера для системы Марс–Земля:

$$\frac{T_M}{T_E} = \left(\frac{R_{\max} + R_{\min}}{2R_E} \right)^{3/2}.$$

Подставляя найденное соотношение в равенства (126), найдём

$$\tau = 2T_E + \frac{2T_E - T_M}{k^{-1/3} \left(\frac{R}{R_E} \right)^2 - 1}.$$

Отсюда, подставляя численные значения, получим

$$R_{\min} = k^{1/6} R_E \sqrt{\frac{\tau_{\max} - T_M}{\tau_{\max} - 2T_E}} \approx 1,38R_E \approx 2,07 \cdot 10^{11} \text{ м};$$

$$R_{\max} = k^{1/6} R_E \sqrt{\frac{\tau_{\min} - T_M}{\tau_{\min} - 2T_E}} \approx 1,68R_E \approx 2,52 \cdot 10^{11} \text{ м}.$$

Величина

$$a = \frac{1}{2}(R_{\min} + R_{\max}) = 1,53R_E$$

представляет собой большую полуось эллиптической орбиты Марса, связанную с периодом T_M третьим законом Кеплера (122). Сравнение полученных результатов и реальных значений $R_{\min} = 1,38R_E$, $R_{\max} = 1,66R_E$, $a = 1,52R_E$

показывает, что принятые в решении задачи приближения неплохо описывают исследуемое здесь явление не только качественно, но и количественно.

Решение данной задачи иллюстрирует типичную для физики ситуацию, когда нужно найти величины, не поддающиеся непосредственным измерениям. В рассматриваемом примере размер орбиты Марса «определяется часами».

Задача 33. Ряд брусков (2006 год)

Рассмотрим сначала случай $n = 3$ (как станет видно из решения, условие $n \geq 5$ не играет по существу никакой роли и внесено лишь в качестве «психологического усложнения»). Пусть u_1 и v_2 — скорости брусков m_1 и m_2 соответственно после их соударения между собой, тогда законы сохранения импульса и энергии имеют вид

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 v_2, \quad \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

откуда

$$v_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Аналогично рассматривая соударение брусков m_2 и m_3 , находим

$$v_3 = \frac{2m_2 v_2}{m_2 + m_3} = \frac{4m_1 m_2 v_1}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}.$$

Массы m_1 и m_3 крайних брусков и начальная скорость v_1 первого бруска фиксированы, поэтому нужно найти максимум v_3 как функции, зависящей только от m_2 . Для этого вычислим производную и приравняем её к нулю:

$$\frac{dv_3}{dm_2} = 4m_1 v_1 \frac{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3) - m_2(m_2 + m_3 + m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2 (m_2 + m_3)^2} = 0,$$

откуда

$$\frac{m_3}{m_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Таким образом, для эффективной передачи скорости при соударениях нужно, чтобы массы соседних брусков отличались в одинаковое число раз.

Справедливость данного утверждения для произвольного $n \geq 3$ докажем методом от противного. Допустим, что скорость v_n максимальна при наборе m_i , в котором не все массы соседних брусков отличаются в одинаковое число раз. Тогда рассмотрим три бруска ($i - 1$; i ; $i + 1$), для которых $m_{i+1}/m_i \neq m_i/m_{i-1}$. Из результата, полученного для $n = 3$, следует, что скорость v_{i+1} возрастёт, если принять $m_i = \sqrt{m_{i-1} m_{i+1}}$. Пропорционально v_{i+1} возрастёт и v_n , так как скорость каждого следующего бруска прямо пропорциональна скорости предыдущего:

$$v_{i+1} = \frac{2m_i v_i}{m_i + m_{i+1}}.$$

Полученное противоречие (согласно предпосылке скорость v_n максимальна, но её удалось увеличить) является доказательством утверждения:

$$\frac{m_{i+1}}{m_i} = \frac{m_i}{m_{i-1}} = k \quad \text{при} \quad 2 \leq i \leq n-1,$$

то есть значения масс образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $k = \sqrt[n-1]{m_n/m_1}$. Таким образом,

$$m_i = m_1 \cdot k^{i-1} = m_1 \left(\frac{m_n}{m_1} \right)^{\frac{i-1}{n-1}}.$$

Для определения скорости v_n найдём «коэффициент передачи скорости»:

$$\eta = \frac{v_{i+1}}{v_i} = \frac{2m_i}{m_i + m_{i+1}} = \frac{2}{1+k},$$

откуда

$$v_n = v_1 \cdot \eta^{n-1} = v_1 \left(\frac{2}{1+k} \right)^{n-1} = v_1 \left(\frac{2}{1 + \sqrt[n-1]{m_n/m_1}} \right)^{n-1}. \quad (127)$$

В качестве дополнительной проверки ответа можно рассмотреть частный случай, когда $m_1 = m_n$. Известно, что при упругом центральном ударе одинаковых тел они обмениваются скоростями, откуда $v_n = v_1$. Именно этот результат и получается из общей формулы (127) после подстановки $m_n = m_1$.

Примерная система оценивания

Рассмотрение двух соударений в частном случае.....	2
Исследование функции и формулировка результата для масс	2
Доказательство сделанного вывода в общем случае	2
Ответ для v_i	2
Ответ для v_n	2

Задача 34. Человек на платформе (2006 год)

1. Пусть v и u — соответственно скорости человека и платформы относительно земли в некоторый момент времени, x — координата платформы в тот же момент времени, тогда закон изменения импульса ($\Delta p / \Delta t = F$) для системы, состоящей из человека и платформы, имеет вид

$$\frac{\Delta}{\Delta t}(mv + Mu) = -ku,$$

откуда после подстановки $u = \Delta x / \Delta t$ находим

$$\frac{\Delta}{\Delta t}(mv + Mu + kx) = 0.$$

Последнее уравнение означает, что величина в скобках не изменяется со временем, то есть её начальное и конечное значения равны между собой:

$$mv_{\text{нач}} + Mu_{\text{нач}} + kx_{\text{нач}} = \text{const} = mv_{\text{кон}} + Mu_{\text{кон}} + kx_{\text{кон}}.$$

Поскольку $v_{\text{нач}} = u_{\text{нач}} = v_{\text{кон}} = u_{\text{кон}} = 0$, после подстановки скоростей и деления на k получим $x_{\text{кон}} = x_{\text{нач}}$, то есть платформа вернётся в прежнее положение, а искомое смещение $S = x_{\text{кон}} - x_{\text{нач}} = 0$.

2. В первом пункте был получен результат $S = 0$, якобы не зависящий от величины k , поэтому может возникнуть соблазн сразу дать ответ $S_0 = 0$. Однако такой вывод окажется неверным, так как в процессе преобразований в первом пункте было деление на k , что невозможно в случае $k = 0$.

Таким образом, поскольку предыдущий метод здесь не даёт результата, воспользуемся свойством сохранения положения центра масс изначально покоившейся системы при отсутствии внешних сил (внутренние силы не изменяют положение центра масс в силу третьего закона Ньютона). Изменение координаты центра масс системы из n тел массами $m_1, m_2, \dots, m_n$ определяется через их соответствующие смещения $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ следующим образом:

$$\Delta x_C = \frac{m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Применим эту общую формулу к нашему случаю:

$$\Delta x_C = \frac{M \cdot (-S_0) + m \cdot (L - S_0)}{M + m} = 0,$$

откуда

$$S_0 = \frac{mL}{M + m}.$$

Примечание. Любопытно проиллюстрировать на примере данной задачи типичный путь развития идеи олимпиадной задачи. Первоначальный (авторский) вариант был про человека на плоту в озере, однако в такой модели требуется рассмотрение присоединённой массы воды, что выходит за рамки программы олимпиады, поэтому исходные условие и решение задачи были существенно переделаны. После олимпиады задача снова изменилась: при подготовке данного сборника был добавлен второй вопрос, чтобы продемонстрировать учащимся необходимость тщательной проверки рассуждений с целью определения границ применимости общего ответа. В итоге задача преобразилась настолько, что сам автор не узнал собственную задачу в сборнике! ☺ И это далеко не единичный подобный случай, поэтому большинство олимпиадных задач на самом деле имеют по несколько авторов.

Примерная система оценивания

Применение закона изменения импульса	2
Получение инварианта (сохраняющейся величины)	2

Ответ для S	2
Применение свойства центра масс.....	2
Ответ для S_0	2

Задача 35. Капля в тумане (2006 год)

1. Пусть m и v — масса и скорость капли в некоторый момент времени t , тогда, поскольку на каплю и туман не действуют внешние силы, из закона сохранения импульса $m_0 v_0 = mv$ получаем

$$m = \frac{m_0 v_0}{v},$$

откуда

$$dm = -\frac{m_0 v_0}{v^2} dv. \quad (128)$$

За малый промежуток времени dt на каплю налипнут капельки тумана массой $dm = \rho S_0 v dt$. Приравняем выражения для dm и проинтегрируем их:

$$-\frac{m_0 v_0}{v^2} dv = \rho S_0 v dt, \quad -m_0 v_0 \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^3} = \rho S_0 \int_0^t dt,$$

откуда

$$\frac{m_0 v_0}{2} \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2} \right) = \rho S_0 t, \quad \text{или} \quad v(t) = \frac{v_0}{\sqrt{1 + 2\rho S_0 v_0 t / m_0}}.$$

2. Пусть S — площадь поперечного сечения капли в некоторый момент времени t , тогда в силу сохранения шараобразной формы капли $S \sim r^2$ и $m \sim r^3$, где r — радиус капли, откуда

$$\frac{S}{S_0} = \left(\frac{m}{m_0} \right)^{2/3}. \quad (129)$$

За малый промежуток времени dt на каплю налипнут капельки тумана массой

$$dm = \rho S v dt = \rho S_0 \left(\frac{m}{m_0} \right)^{2/3} v dt = \rho S_0 \left(\frac{v_0}{v} \right)^{2/3} v dt,$$

где подставлено выражение для m из соотношения (128), которое верно при отсутствии силы тяжести. Приравняем выражение для dm из соотношения (128) и последнее полученное выражение и проинтегрируем их:

$$-\frac{m_0 v_0}{v^2} dv = \rho S_0 \left(\frac{v_0}{v} \right)^{2/3} v dt, \quad -m_0 v_0^{1/3} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^{7/3}} = \int_0^t \rho S_0 dt,$$

откуда

$$\frac{3}{4}m_0v_0^{1/3}\left(\frac{1}{v^{4/3}} - \frac{1}{v_0^{4/3}}\right) = \rho S_0 t, \quad \text{или} \quad v(t) = \frac{v_0}{\left(1 + \frac{4\rho S_0 v_0 t}{3m_0}\right)^{3/4}}.$$

3. За малый промежуток времени dt на каплю налипнут капельки тумана массой

$$dm = \rho S_0 v dt,$$

откуда

$$dt = \frac{dm}{\rho S_0 v}.$$

Согласно второму закону Ньютона для капли и тумана $d(mv) = mg dt$. Умножим это уравнение на mv , подставим выражение для dt и проинтегрируем:

$$mvd(mv) = m^2 v g \frac{dm}{\rho S_0 v}, \quad \int_{m_0 v_0}^{mv} mvd(mv) = \frac{g}{\rho S_0} \int_{m_0}^m m^2 dm,$$

откуда

$$\frac{(mv)^2}{2} - \frac{(m_0 v_0)^2}{2} = \frac{m^3 g}{3\rho S_0} - \frac{m_0^3 g}{3\rho S_0}.$$

Продифференцировав полученное уравнение, находим

$$v dv = \frac{g}{3\rho S_0} dm.$$

Подставив приращение массы dm , получаем

$$v dv = \frac{g}{3\rho S_0} \rho S_0 v dt,$$

откуда

$$dv = \frac{g}{3} dt.$$

Следовательно, капля в тумане движется с постоянным ускорением $g/3$:

$$v = v_0 + \frac{gt}{3}.$$

4. За малый промежуток времени dt на каплю налипнут капельки тумана массой

$$dm = \rho S v dt = \rho S_0 \left(\frac{m}{m_0}\right)^{2/3} v dt,$$

откуда

$$dt = \frac{dm}{\rho S_0 \left(\frac{m}{m_0}\right)^{2/3} v},$$

где использовано соотношение (129). Согласно второму закону Ньютона для капли $d(mv) = mgdt$. Умножим это уравнение на mv , подставим выражение для dt и проинтегрируем:

$$mvd(mv) = m^2vg \frac{dm}{\rho S_0 \left(\frac{m}{m_0}\right)^{2/3} v}, \quad \int_{m_0v_0}^{mv} mvd(mv) = \int_{m_0}^m m^{4/3} m_0^{2/3} g \frac{dm}{\rho S_0},$$

откуда

$$\frac{(mv)^2}{2} - \frac{(m_0v_0)^2}{2} = \frac{3m_0^{2/3}m^{7/3}g}{7\rho S_0} - \frac{3m_0^3g}{7\rho S_0}.$$

Продифференцировав полученное уравнение, находим

$$vdv = \frac{m_0^{2/3}g}{7\rho S_0} m^{-2/3} dm.$$

Подставив приращение массы dm , получаем

$$vdv = \frac{m_0^{2/3}g}{7\rho S_0} m^{-2/3} \rho S_0 \left(\frac{m}{m_0}\right)^{2/3} v dt,$$

откуда

$$dv = \frac{g}{7} dt.$$

Следовательно, капля в тумане движется с постоянным ускорением $g/7$:

$$v = v_0 + \frac{gt}{7}.$$

Задача 36. Пузыри (2006 год)

1. Объём капли раствора $V = 4\pi r^3/3$, общая площадь внутренней и внешней поверхностей плёнки пузыря $S = 8\pi R_{\max}^2$, количества молекул ПАВ в капле и на поверхностях плёнки соответственно составляют

$$N_1 = \frac{V}{a^3} \cdot \frac{1}{c} = \frac{4\pi r^3}{3a^3c}, \quad N_2 = \frac{S}{a^2} = \frac{8\pi R_{\max}^2}{a^2}.$$

Поскольку искомый радиус максимален, молекулы ПАВ будут только на поверхностях плёнки, то есть можно приравнять N_1 и N_2 :

$$\frac{4\pi r^3}{3a^3c} = \frac{8\pi R_{\max}^2}{a^2},$$

откуда

$$R_{\max} = \sqrt{\frac{r^3}{6ac}} \approx 6,5 \text{ см.}$$

На одном луче, проведённом из центра пузыря, расположено две молекулы ПАВ (одна на внутренней и одна на внешней поверхности), следовательно, вдоль этого луча расположено $2c$ молекул раствора, откуда находим искомую толщину плёнки:

$$h_{\min} = a \cdot 2c = 10^{-8} \text{ м.}$$

Примечание. Для проверки вычислений или как альтернативный способ нахождения одной из искомых величин можно использовать условие сохранения объёма раствора:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi R_{\max}^2 h_{\min}.$$

2. На начальном этапе «слипания» пузырей они притягиваются, так как их энергия уменьшается за счёт уменьшения площади поверхности (рис. 108): вместо двух отмеченных пунктиром сферических плёнок образуется одна плоская, имеющая форму круга радиусом y . Далее будет использоваться условие малости высот x_1 и x_2 шаровых сегментов по сравнению с радиусами пузырей. Из теоремы Пифагора

$$y = \sqrt{R_1^2 - (R_1 - x_1)^2} \approx \sqrt{2R_1 x_1},$$

откуда

$$x_1 = \frac{y^2}{2R_1}.$$

Аналогично

$$x_2 = \frac{y^2}{2R_2}.$$

Уменьшение расстояния между центрами пузырей составляет

$$\Delta l = x_1 + x_2 = \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

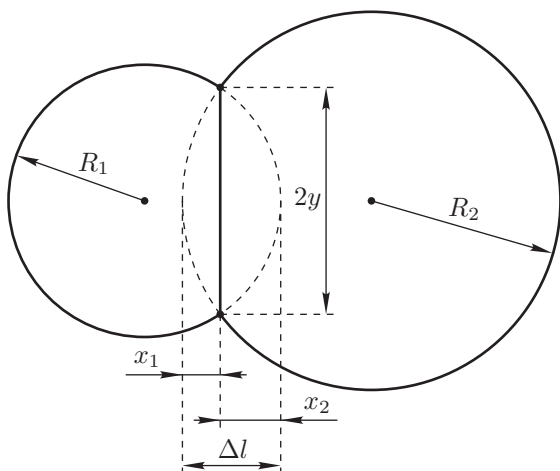


Рис. 108

Изменение общей (внутренней и внешней) площади поверхности плёнки составляет

$$\Delta S \approx -2 \cdot \pi y^2 = -\frac{4\pi\Delta l}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}.$$

Изменение энергии системы $\Delta W = \sigma\Delta S$. Найдём силу притяжения между пузырями:

$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta l} = \frac{4\pi\sigma}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \approx 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ Н.}$$

3. Мембрана между пузырями будет компенсировать разность давлений P_1 и P_2 внутри пузырей. Пусть P_0 — атмосферное давление, тогда согласно формуле Лапласа для добавочного давления под искривлённой поверхностью

$$\frac{4\sigma}{R_3} = P_1 - P_2 = \left(P_0 + \frac{4\sigma}{R_1}\right) - \left(P_0 + \frac{4\sigma}{R_2}\right) = \frac{4\sigma}{R_1} - \frac{4\sigma}{R_2},$$

откуда

$$R_3 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = 0,3 \text{ м.}$$

Примерная система оценивания

Общий и численный ответы для $R_{\max}$	1
Общий и численный ответы для $h_{\min}$	1
Ответ для F в общем виде	4
Численный ответ для F	1
Ответ для R_3 в общем виде	2
Численный ответ для R_3	1

Задача 37. Бросание мяча с небоскрёба (2007 год)

Поскольку временной интервал между пролётами мячей одинаковый на уровне земли и 100-го этажа, последние 100 этажей мячи летели с постоянной скоростью в режиме установившегося движения. А так как второй мяч падал с уровня 200-го этажа, он достиг установившейся скорости за время пролёта не более 100 этажей. Следовательно, первый мяч летел с этой скоростью с момента пролёта мимо балкона 200-го этажа в течение всего времени совместного движения мячей.

Пусть m — масса мяча, v — его скорость, $F = -kv$ — сила сопротивления воздуха, тогда из условия равномерного движения мяча

$$mg - kv_0 = 0 \tag{130}$$

находим его установившуюся скорость $v_0 = mg/k$. Поскольку второй мяч упал на землю через время τ после первого, в момент падения первого мяча второй находился на высоте

$$h = v_0\tau = \frac{m}{k}g \cdot \tau. \quad (131)$$

Для нахождения отношения m/k рассмотрим движение второго мяча в инерциальной системе отсчёта, связанной с первым мячом, то есть движущейся вниз со скоростью v_0 . В начальный момент, когда был отпущен второй мяч, оба мяча имели одинаковую вертикальную координату $y = 0$. Первый мяч в этой системе отсчёта всё время покоится, а второй имел начальную скорость v_0 , направленную вверх. Уравнение движения второго мяча имеет вид

$$ma = -mg - k(v - v_0) = -kv, \quad (132)$$

где учтено, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости мяча относительно воздуха, и использовано условие (130). Хотя ускорение и скорость не остаются постоянными в течение всего движения, их можно считать почти постоянными в течение малого промежутка времени Δt , тогда $a\Delta t$ и $v\Delta t$ — изменения скорости и координаты за этот промежуток времени. Домножив (132) на Δt и просуммировав эти изменения за всё время движения, получим уравнение

$$m\Delta v = -k\Delta y. \quad (133)$$

К моменту падения второй мяч останавливается относительно первого мяча, достигая точки с координатой $y = h$ в движущейся системе отсчёта. Подставив $\Delta v = 0 - v_0$ и $\Delta y = h - 0$ в уравнение (133), находим

$$h = \frac{mv_0}{k} = \frac{m}{k}g \cdot \frac{m}{k}. \quad (134)$$

Приравняв выражения (131) и (134), получим $m/k = \tau$. Следовательно, $h = g\tau^2 = 22$ м.

Примерная система оценивания

Постоянство скорости первого мяча во время падения второго	1
Выражение $v_0 = mg/k$	1
Выражение $h = v_0\tau$	1
Уравнение движения для второго мяча	2
Выражение $h = v_0m/k$	2
Ответ в общем виде	2
Численный ответ	1

Задача 38. Брёвна (2007 год)

Два уравнения, которые необходимы для нахождения двух неизвестных (плотности ρ и отношения $k = r_1/r_2$), можно получить из условия плавания и равенства нулю суммы моментов сил, действующих на конструкцию.

Пусть L — длина всех составляющих конструкции, g — ускорение свободного падения, тогда по закону Архимеда можно записать

$$\rho \frac{\pi}{2} \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right)^2 Lg = \rho_0 \left(\frac{\pi r_1^2}{4} + \frac{\pi r_2^2}{4} \right) Lg,$$

откуда

$$\rho(r_1 + r_2)^2 = 2\rho_0(r_1^2 + r_2^2). \quad (135)$$

Рассмотрим момент сил, действующих на конструкцию, относительно точки O соединения всех составляющих (рис. 109). В каждой точке поверхностей AB и CD сила давления воды направлена вдоль радиуса, то есть не создаёт момента относительно точки O . Суммарный момент сил будет складываться из момента M_1 силы давления воды на прямоугольный участок BC , момента M_2 силы тяжести и момента M_3 силы давления атмосферы на верхнюю половинку бревна. Положительным будем считать момент, поворачивающий конструкцию по часовой стрелке.

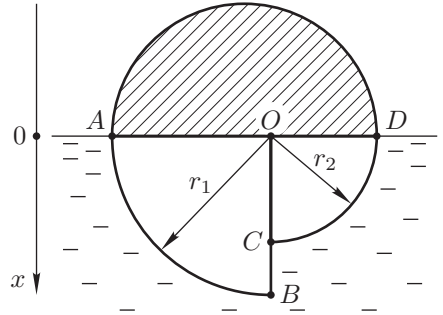


Рис. 109

Введём направленную вниз вертикальную ось x , ноль которой находится на уровне воды в водоёме, и пусть P_0 — атмосферное давление, тогда найдём момент сил давления воды:

$$M_1 = \int_{r_2}^{r_1} (P_0 + \rho_0 g x) L x dx = \frac{1}{2} P_0 L (r_1^2 - r_2^2) + \frac{1}{3} \rho_0 g L (r_1^3 - r_2^3).$$

Нам неизвестна точка приложения силы тяжести, но из соображений симметрии ясно, что она находится на одной вертикали с центром верхней половинки бревна. Поэтому плечо силы тяжести составляет $l = r_1 - (r_1 + r_2)/2 = (r_1 - r_2)/2$, а её момент, преобразованный с учётом условия (135), составляет

$$M_2 = -\rho \frac{\pi}{2} \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right)^2 Lg \cdot \frac{r_1 - r_2}{2} = -\frac{\pi}{8} \rho_0 g L (r_1^2 + r_2^2) (r_1 - r_2).$$

Плечо силы атмосферного давления также равно l , поэтому можем найти её момент:

$$M_3 = -P_0 (r_1 + r_2) L \cdot \frac{r_1 - r_2}{2} = -\frac{1}{2} P_0 L (r_2^2 - r_1^2).$$

Из условия равновесия $M_1 + M_2 + M_3 = 0$ следует, что

$$\frac{1}{3} \rho_0 g L (r_1^3 - r_2^3) - \frac{\pi}{8} \rho_0 g L (r_1^2 + r_2^2) (r_1 - r_2) = 0,$$

откуда после деления на $r_1 - r_2 \neq 0$ получаем

$$r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 - \frac{3\pi}{8}(r_1^2 + r_2^2) = 0, \quad k^2 - \frac{1}{3\pi/8 - 1}k + 1 = 0.$$

Согласно теореме Виета произведение корней этого уравнения равно единице. Поскольку $r_1 > r_2$, следует выбрать корень, который больше единицы:

$$k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3\pi/8 - 1} + \sqrt{\frac{1}{(3\pi/8 - 1)^2} - 4} \right) \approx 5,43.$$

Второй корень соответствует симметричному случаю, когда $r_1 < r_2$.

Из условия (135) находим плотность половинки бревна:

$$\rho = 2\rho_0 \frac{r_1^2 + r_2^2}{(r_1 + r_2)^2} = 2\rho_0 \frac{k^2 + 1}{(k + 1)^2} \approx 1475 \text{ кг/м}^3.$$

Примечание. Можно было сразу заметить и доказать, что конечные результаты не должны зависеть от атмосферного давления P_0 .

Примерная система оценивания

Условие плавания	1
Уравнение моментов	1
Момент сил давления воды на участки AB и CD	1
Момент сил давления воды на участок BC	1
Момент силы тяжести	1
Момент силы атмосферного давления	1
Ответ для k в общем виде	1
Численный ответ для k	1
Ответ для ρ в общем виде	1
Численный ответ для ρ	1

Задача 39. Облако галактик (2007 год)

1. Запишем преобразования Галилея для координат и скоростей при переходе в систему отсчёта j -й галактики:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_j + \vec{r}'_i, \quad \vec{v}_i = \vec{v}_j + \vec{v}'_i.$$

Подставив эти выражения в формулу $\vec{v}_i = H\vec{r}_i$ и использовав равенство $\vec{v}_j = H\vec{r}_j$, получим

$$\vec{v}'_i = H\vec{r}'_i.$$

Таким образом, картина разлёта галактик не зависит от точки наблюдения.

2. Рассмотрим произвольную галактику, входящую в скопление. Обозначим через m её массу, а через r — расстояние от неё до центра скопления.

В силу сферической симметрии скопления направление вектора $\vec{r}$ не играет роли. Галактики, расположенные на расстояниях больше r от центра скопления, образуют шаровой слой, который, как известно, не создаёт гравитационного поля внутри своей полости. Таким образом, следует учитывать только взаимодействие с галактиками, которые расположены внутри шара радиусом r . Их общая масса $M = \rho_0 \cdot 4\pi r^3/3$. Найдём полную энергию рассматриваемой галактики:

$$E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \frac{m(Hr)^2}{2} - \frac{GMm}{r}.$$

Движение галактики будет финитным (то есть она не удалится на бесконечность, а повернёт обратно), если $E < 0$, откуда после подстановки выражения для M получаем

$$\rho_0 > \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

3. Аналогично предыдущему пункту рассмотрим одну из крайних галактик, которая будет в этом случае взаимодействовать со всем скоплением массой $M_0 = \rho_0 \cdot 4\pi r_0^3/3$. Применим закон сохранения полной энергии для этой галактики между начальным и максимально удалённым положениями:

$$\frac{m(Hr_0)^2}{2} - \frac{GM_0m}{r_0} = 0 - \frac{GM_0m}{r_{\text{max}}},$$

откуда

$$r_{\text{max}} = \frac{r_0}{1 - \frac{3H^2}{8\pi G\rho_0}}.$$

4. Движение отдельной галактики можно рассматривать как движение вдоль вырожденного в отрезок эллипса, один из фокусов которого совпадает с центром скопления и концом отрезка, а второй конец отрезка — это максимально удалённое положение галактики. В соответствии с третьим законом Кеплера период T обращения одной из крайних галактик по такому эллипсу будет равен периоду её движения по окружности радиусом $r_{\text{max}}/2$. Применим второй закон Ньютона для движения по этой окружности:

$$m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \frac{r_{\text{max}}}{2} = \frac{GM_0m}{(r_{\text{max}}/2)^2},$$

откуда

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{8G\rho_0}} \left(\frac{r_{\text{max}}}{r_0} \right)^{3/2}.$$

Возврат галактики от $r = r_{\text{max}}$ до $r \approx 0$ произойдёт за время

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3\pi}{2G\rho_0}} \left(1 - \frac{3H^2}{8\pi G\rho_0} \right)^{-3/2}.$$

Примерная система оценивания

Ответ для $\vec{v}'_i$	1
Ответ для ρ_0	2
Ответ для $r_{\max}$	3
Ответ для τ	4

Задача 40. Палочка на клиньях (2008 год)

1. Концы палочки ударятся о плоскость одновременно, только если палочка всё время будет опускаться горизонтально. Для этого необходимо и достаточно, чтобы отсутствовало вращение палочки в вертикальной плоскости, в которой лежит палочка, то есть сумма моментов сил, действующих на палочку, была равна нулю (рис. 110):

$$N_1 \cos \alpha_1 \cdot L - N_2 \cos \alpha_2 \cdot L = 0, \quad (136)$$

где L — расстояние между центром масс C палочки, относительно которого записаны моменты, и точками её касания с клиньями.

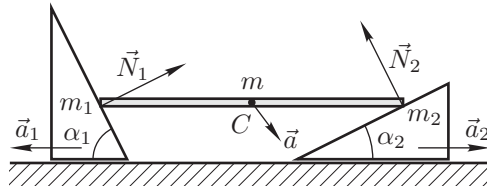


Рис. 110

Используя второй закон Ньютона, выразим ускорения a_1 и a_2 клиньев и горизонтальную составляющую a_x ускорения палочки:

$$a_1 = \frac{N_1 \sin \alpha_1}{m_1}, \quad a_2 = \frac{N_2 \sin \alpha_2}{m_2}, \quad a_x = \frac{N_1 \sin \alpha_1 - N_2 \sin \alpha_2}{m}. \quad (137)$$

Запишем горизонтальные смещения клиньев относительно палочки к моменту t :

$$\Delta x_1 = \frac{(a_1 + a_x)t^2}{2}, \quad \Delta x_2 = \frac{(a_2 - a_x)t^2}{2}. \quad (138)$$

Вертикальное смещение Δy палочки одно и то же для обоих концов:

$$\Delta x_1 \tan \alpha_1 = \Delta y = \Delta x_2 \tan \alpha_2,$$

откуда после подстановки (138) и сокращения получаем

$$(a_1 + a_x) \tan \alpha_1 = (a_2 - a_x) \tan \alpha_2. \quad (139)$$

Подставим выражения из формул (137) в (139):

$$\left(\frac{N_1 \sin \alpha_1}{m_1} + \frac{N_1 \sin \alpha_1 - N_2 \sin \alpha_2}{m} \right) \tan \alpha_1 =$$

$$= \left(\frac{N_2 \sin \alpha_2}{m_2} - \frac{N_1 \sin \alpha_1 - N_2 \sin \alpha_2}{m} \right) \operatorname{tg} \alpha_2,$$

откуда с использованием условия (136) находим искомую массу:

$$m = \frac{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_2}{\operatorname{tg}^2 \alpha_2} - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_1}{\operatorname{tg}^2 \alpha_1}}{\frac{m_2}{m_2} - \frac{m_1}{m_1}}. \quad (140)$$

2. Рассматриваемая ситуация реализуется, если вычисленная из формулы (140) масса m положительна, откуда с учётом того, что $\alpha_1 > \alpha_2$, следует неравенство

$$\frac{m_1}{m_2} > \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_1}{\operatorname{tg}^2 \alpha_2}.$$

Примерная система оценивания

Условие отсутствия вращения	1
Выражения для a_1 и a_2	1
Выражение для a_x	1
Условие равенства вертикальных смещений концов палочки, записанное через ускорения	2
Ответ для m	4
Ответ для m_1/m_2	1

Задача 41. Падение «гантели» (2008 год)

Пусть $\vec{a}$, $\vec{v}$, $\vec{r}$ — мгновенные ускорение, скорость и радиус-вектор шара, $\vec{F} = -k\vec{v}$ — сила сопротивления воздуха, тогда второй закон Ньютона в процессе падения шара имеет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v}. \quad (141)$$

Умножив равенство (141) на маленький промежуток времени Δt и учитывая, что малое изменение скорости имеет вид $\Delta \vec{v} = \vec{a}\Delta t$, а малое перемещение даётся формулой $\Delta \vec{r} = \vec{v}\Delta t$, запишем

$$m\Delta \vec{v} = m\vec{g}\Delta t - k\Delta \vec{r}.$$

Суммируя это уравнение от начального момента t_0 , когда шар был расположен в точке $\vec{r}_0$ и имел скорость $\vec{v}_0$, до произвольного момента времени t , получаем

$$m(\vec{v} - \vec{v}_0) = m\vec{g}(t - t_0) - k(\vec{r} - \vec{r}_0),$$

или, применительно к каждому из шаров в процессе раздельного падения,

$$m(\vec{v}_1 - \vec{v}_{10}) = m\vec{g}(t - t_0) - k(\vec{r}_1 - \vec{r}_{10}), \quad (142)$$

$$m(\vec{v}_2 - \vec{v}_{20}) = m\vec{g}(t - t_0) - k(\vec{r}_2 - \vec{r}_{20}). \quad (143)$$

Пусть t_0 — момент начала раздельного падения шаров, тогда можно считать, что $\vec{r}_{10} = \vec{r}_{20}$, так как по условию шары небольшие, а нить короткая. В качестве t возьмём любой из моментов времени, когда скорости падающих шаров перестали изменяться, тогда их установившиеся скорости $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$, так как шары одинаковые. Учитывая эти равенства, вычтем соотношение (143) из (142):

$$m(\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}) = k(\vec{r}_1 - \vec{r}_2),$$

откуда найдём искомое расстояние между шарами:

$$L = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \frac{m}{k} |\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}|. \quad (144)$$

Используя выражения для начального импульса шаров $p_{\text{нач}} = m|\vec{v}_{10} + \vec{v}_{20}|$ и разности их энергий $\Delta E = m|v_{10}^2 - v_{20}^2|/2$, преобразуем уравнение (144):

$$L = \frac{m}{k} \cdot \frac{|\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}| \cdot |\vec{v}_{10} + \vec{v}_{20}|}{|\vec{v}_{10} + \vec{v}_{20}|} = \frac{2m}{k} \cdot \frac{m|v_{10}^2 - v_{20}^2|/2}{m|\vec{v}_{10} + \vec{v}_{20}|} = \frac{2m}{k} \cdot \frac{\Delta E}{p_{\text{нач}}}.$$

Полагая $a = 0$ в уравнении (141), находим установившуюся скорость $v = mg/k$. Конечный импульс шаров $p_{\text{кон}} = 2mv = 2m^2g/k$, откуда $2m/k = p_{\text{кон}}/(mg)$. Подставляя последнее выражение и $n = p_{\text{нач}}/p_{\text{кон}}$, получаем

$$L = \frac{p_{\text{кон}}}{mg} \cdot \frac{\Delta E}{p_{\text{нач}}} = \frac{\Delta E}{mg n} = 1 \text{ м.}$$

Примерная система оценивания

Запись исходного уравнения движения	1
Суммирование в течение конечного промежутка времени	1
Учёт близости шаров в начале	1
Учёт одинаковой скорости в конце	1
Использование ΔE для исключения неизвестных	1
Использование n для исключения неизвестных	1
Ответ в общем виде	3
Численный ответ	1

Задача 42. Колебания на проволоках (2008 год)

1. Когда бусинка находится на расстоянии l от вершины угла и движется от неё (рис. 111), на бусинку действует направленная к вершине угла сила

$$F_1 = F \sin \alpha + F_{\text{тр}},$$

где $F = k\Delta y$ — сила натяжения пружины, $\Delta y = 2l \sin \alpha$ — удлинение пружины, $F_{\text{тр}} = \mu N$ — сила трения скольжения, $N = F \cos \alpha$ — реакция проволоки (рис. 112).

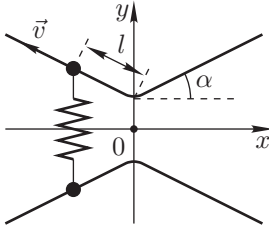


Рис. 111

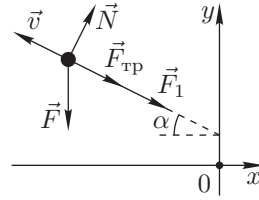


Рис. 112

После подстановки получим

$$F_1 = 2 \sin \alpha (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) kl.$$

Сила F_1 пропорциональна смещению l из положения равновесия, поэтому можно ввести эффективную жёсткость

$$k_1 = \frac{F_1}{l} = 2 \sin \alpha (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) k.$$

Аналогично находим силу и эффективную жёсткость при движении бусинки к вершине угла:

$$F_2 = F \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \quad k_2 = \frac{F_2}{l} = 2 \sin \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) k.$$

При заданных значениях α и μ величина k_2 положительна, следовательно, движение действительно будет колебательным. В течение одного колебания бусинки движутся дважды от вершины угла и дважды к ней, а каждый из этих четырёх процессов длится четверть соответствующего периода: $T_1 = 2\pi\sqrt{m/k_1}$ для движения от вершины угла и $T_2 = 2\pi\sqrt{m/k_2}$ для движения к вершине угла, где m — масса бусинки. Таким образом, находим общий период:

$$T = 2\frac{T_1}{4} + 2\frac{T_2}{4} = \frac{T_0}{2\sqrt{\sin 2\alpha}} \left(\frac{1}{\sqrt{\tan \alpha + \mu}} + \frac{1}{\sqrt{\tan \alpha - \mu}} \right) \approx 1,43 \text{ с},$$

где использовано соотношение $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$. Временем прохождения бусинками маленького закругления в вершине угла можно пренебречь.

2. Поскольку результирующая сила, действующая на бусинку, эквивалентна силе упругости некоторой пружины, потери энергии при движении бусинок по сторонам проволочных углов можно найти через скачкообразное изменение эффективной жёсткости, которое происходит при смене направления движения в положении максимального отклонения, когда бусинка находится на расстоянии L от вершины угла. В этот момент полная энергия системы равна потенциальной, которая уменьшается в γ_1 раз:

$$\gamma_1 = \frac{k_1 L^2 / 2}{k_2 L^2 / 2} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{\tan \alpha + \mu}{\tan \alpha - \mu}.$$

Кроме того, есть потери энергии на повороте в вершине угла. Запишем второй закон Ньютона для торможения бусинки на малом участке проволоки радиусом кривизны R :

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu m \frac{v^2}{R}.$$

Пусть φ — угловой путь бусинки, тогда его малое приращение имеет вид

$$d\varphi = |\omega|dt = \frac{v}{R}dt,$$

где ω — угловая скорость бусинки. Отметим, что знак модуля возникает из определения углового пути, который всегда неотрицателен в отличие от углового перемещения. Исключая R из приведённых уравнений, получим

$$\frac{dv}{v} = -\mu d\varphi, \quad \text{откуда} \quad v = v_0 e^{-\mu\varphi}.$$

При прохождении вершины угла бусинка поворачивает на угол $\varphi = 2\alpha$, а её скорость изменяется от v_1 до $v_2 = v_1 e^{-2\mu\alpha}$. В этот момент полная энергия системы равна кинетической, которая уменьшается в γ_2 раз:

$$\gamma_2 = \frac{mv_1^2/2}{mv_2^2/2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = e^{4\alpha\mu}.$$

В ходе полного периода колебания бусинок они дважды оказываются в положении максимального отклонения и дважды проходят поворот, то есть общее затухание имеет вид

$$\gamma = \gamma_1^2 \gamma_2^2 = \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{\operatorname{tg} \alpha - \mu}\right)^2 \cdot e^{8\alpha\mu} \approx 2,01 \cdot 1,52 \approx 3.$$

Примечание. Типичной ошибкой является пренебрежение потерями энергии при прохождении поворота на основании того, что закругление «маленькое». Приведённый расчёт показывает, что γ_2 зависит вовсе не от длины закругления, а от угла поворота, который вовсе не является малым!

Примерная система оценивания

Нахождение k_1 и k_2	1
Ответ для T в общем виде	2
Численный ответ для T	1
Нахождение γ_1	2
Нахождение γ_2	2
Ответ для γ в общем виде	1
Численный ответ для γ	1

Задача 43. Дни равноденствия (2008 год)

1. В соответствии с первым законом Кеплера Земля движется вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов F которого находится Солнце (рис. 113).

Изменение длительности дня и ночи в течение года связано с тем, что ось собственного вращения Земли не перпендикулярна плоскости орбиты, а наклонена к ней под некоторым углом. В силу закона сохранения момента импульса эта ось не изменяет своего направления. В дни солнцестояния её проекция на плоскость орбиты Земли параллельна отрезку, соединяющему Землю и Солнце, в дни равноденствия — перпендикулярна ему. Следовательно, Солнце лежит на отрезке, соединяющем положения Земли в дни солнцестояния (точки B и D), и на отрезке, соединяющем положения Земли в дни равноденствия (точки A и C), а сами отрезки перпендикулярны друг другу (маленькими чёрточками, пересекающимися изображения нашей планеты, показаны проекции оси собственного вращения Земли).

Из условия, что дни летнего и зимнего солнцестояния делят год пополам, и второго закона Кеплера (о постоянстве секториальной скорости) следует, что отрезок BD делит эллипс на две равные по площади части. Это возможно только в том случае,

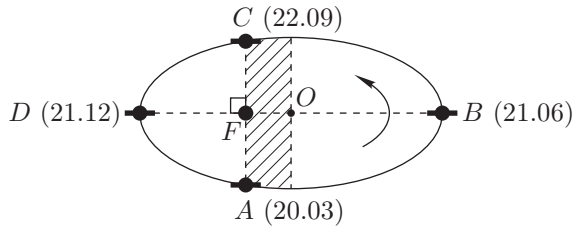


Рис. 113

если он проходит через центр O эллипса, то есть является большой осью эллипса. Поскольку летний период между днями весеннего и осеннего равноденствия продолжительнее зимнего, в силу второго закона Кеплера площадь сегмента ABC больше площади сегмента CDA , откуда $BF > DF$. Значит, 21 июня Земля находится на наибольшем расстоянии от Солнца, а 21 декабря — на наименьшем.

2. Пусть S_B — площадь сегмента ABC , а T_B — время движения Земли по маршруту ABC , тогда в силу второго закона Кеплера

$$\frac{S_B}{T_B} = \frac{\pi R^2}{T}. \quad (145)$$

Учитывая малое отличие орбиты Земли от окружности, можно считать заштрихованную область прямоугольником, тогда

$$S_B \approx \frac{\pi R^2}{2} + 2Rf,$$

где $f = FO$ — фокусное расстояние эллипса. Из условия $T_B + (T_B - \tau) = T$ находим $T_B = (T + \tau)/2$. Подставив выражения для S_B и T_B в формулу (145), выразим

$$f = \frac{\pi\tau}{4T}R.$$

Находим искомое различие расстояний:

$$\Delta R = 2f = \frac{\pi\tau}{2T}R \approx 4,5 \cdot 10^9 \text{ м.}$$

3. Пусть v_B и v_D — скорости Земли в точках B и D соответственно, $R_B = BF$, $R_D = DF$, тогда из второго закона Кеплера следует, что $v_B R_B = v_D R_D$. Находим искомое различие скоростей:

$$\Delta v = v_D - v_B = \frac{R_B - R_D}{R_B} \cdot v_D = \frac{\Delta R}{R_B} \cdot v_B \approx \frac{\Delta R}{R} \cdot v,$$

где $v = 2\pi R/T$ — средняя орбитальная скорость Земли. Таким образом,

$$\Delta v = \frac{2\pi \Delta R}{T} = \frac{\pi^2 \tau R}{T^2} \approx 900 \text{ м/с}.$$

Примечание. Интересно отметить, что эксцентриситет земной орбиты

$$\varepsilon = \frac{f}{R} = \frac{\pi \tau}{4T} \approx 1,5\%$$

можно с хорошей точностью вычислить, имея в руках лишь календарь!

Кроме того, обратим внимание на то, что Земля находится ближе всего к Солнцу в декабре, когда в северном полушарии зима, то есть смена времён года определяется вовсе не изменением расстояния от Земли до Солнца, как можно было бы ошибочно думать.

Примерная система оценивания

Обе даты (каждая по 1 баллу)	2
Аргументация ответа для дат	2
Общий ответ для ΔR	2
Численный ответ для ΔR	1
Общий ответ для Δv	2
Численный ответ для Δv	1

Задача 44. Бочка в грузовике (2009 год)

Крышку с пассажиром можно мысленно заменить дополнительным объёмом V воды в виде цилиндра диаметром D , наполовину усечённого плоскостью, образующей с горизонтом некоторый угол α , так как именно такую форму принял бы во время поворота грузовика этот дополнительный объём воды в высокой цилиндрической бочке без крышки (рис. 114).

Из формулы для центростремительного ускорения $a = v^2/R$ и условия равновесия воды в высокой бочке без крышки (эффективное ускорение свободного падения $\vec{g}_{\text{эф}} = \vec{g} - \vec{a}$ должно быть перпендикулярно поверхности воды) находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g} = \frac{v^2}{Rg}.$$

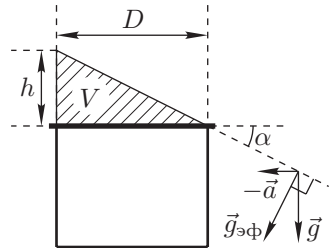


Рис. 114

Найдём высоту усечённого цилиндра:

$$h = D \operatorname{tg} \alpha = \frac{Dv^2}{Rg},$$

и его объём:

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot h = \frac{\pi D^3 v^2}{8Rg}.$$

Таким образом, находим минимальную массу пассажира:

$$m = \rho V = \frac{\rho \pi D^3 v^2}{8Rg} \approx 88,4 \text{ кг.}$$

Примечание. Отметим, что найденное ограничение на массу является необходимым, но не достаточным условием равновесия крышки, так как нужно ещё посадить пассажира в правильное место на крышке, чтобы она не повернулась из-за неравномерного распределения сил давления со стороны воды. Определение правильного положения пассажира выходит за рамки данной задачи, однако читателям будет полезно проделать этот расчёт самостоятельно.

Примерная система оценивания

Идея об эквивалентности пассажира и дополнительной воды	3
Выражение для a	1
Выражение для α	1
Выражение для h	1
Выражение для V	1
Ответ в общем виде	2
Численный ответ	1

Задача 45. Маятник в шахте (2009 год)

Из формулы для периода математического маятника $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, где l — длина маятника, g — ускорение свободного падения на поверхности Земли, находим связь между малыми изменениями ΔT и Δg :

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta g}{g}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\Delta g}{g} = 2\delta. \quad (146)$$

Знак минус был убран, так как по условию $\delta > 0$ — это относительное уменьшение (а не увеличение) периода. Отсюда, кстати, видно, что вопреки распространённому мнению сила тяжести возрастает при опускании в шахту небольшой глубины.

Масса Земли $M = \rho_0 \cdot 4\pi R^3/3$, масса слоя земной коры толщиной h от поверхности $\Delta M \approx \rho \cdot 4\pi R^2 h$. Из закона всемирного тяготения выразим

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\frac{\gamma(M - \Delta M)}{(R - h)^2} - \frac{\gamma M}{R^2}}{\frac{\gamma M}{R^2}} = \left(1 - \frac{\Delta M}{M}\right) \left(1 - \frac{h}{R}\right)^{-2} - 1 \approx$$

$$\approx \left(1 - \frac{3\rho h}{\rho_0 R}\right) \left(1 + \frac{2h}{R}\right) - 1 \approx -\frac{3\rho h}{\rho_0 R} + \frac{2h}{R}. \quad (147)$$

Подставив выражение (147) в формулу (146), получим

$$\rho = \frac{2}{3}\rho_0 \left(1 - \delta \frac{R}{h}\right) \approx 0,453\rho_0 \approx 2540 \text{ кг/м}^3,$$

что полностью согласуется с результатами прямых измерений плотности.

Примерная система оценивания

Связь между ΔT и Δg	2
Выражение для M через ρ_0 и R	1
Выражение для ΔM через ρ , R и h	1
Выражение для $\Delta g/g$ через ρ , ρ_0 , h и R	3
Ответ в общем виде	2
Численный ответ	1

Задача 46. Автобусы под дождём (2010 год)

1. Короткий автобус на пути «туда». Число капель дождя, коснувшихся автобуса, пропорционально времени t рейса, концентрации n капель в воздухе, их скорости $v_{\text{отн}}$ относительно автобуса и эффективной площади S поверхности, находящейся под дождём:

$$N = tnv_{\text{отн}}S. \quad (148)$$

Пусть L — расстояние между пунктами, v — скорость автобуса, u — скорость падения капель относительно земли, тогда

$$t = \frac{L}{v}. \quad (149)$$

Эффективную площадь поверхности, находящейся под дождём, можно найти как площадь проекции автобуса на плоскость, перпендикулярную скорости капель относительно автобуса.

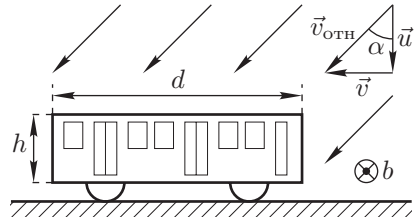


Рис. 115

Пусть d , b и h — соответственно длина, ширина и высота автобуса, α — угол наклона потока капель в системе отсчёта, связанной с автобусом (рис. 115), тогда суммарная площадь проекций от крыши и лобовой поверхности автобуса имеет вид

$$S = b(d \cos \alpha + h \sin \alpha). \quad (150)$$

Подставляя равенства (149) и (150) в формулу (148) и используя выражения $\cos \alpha = u/v_{\text{отн}}$ и $\sin \alpha = v/v_{\text{отн}}$, получаем

$$N = Lnb \left(\frac{du}{v} + h \right). \quad (151)$$

Примечание. Это же соотношение без коэффициентов можно было получить из общих соображений в виде $N \sim d/v + \text{const}$.

2. Длинный автобус на пути «туда». Рассуждая аналогично или просто заменив N на $1,3N$ и d на $1,5d$ в формуле (151), получим

$$1,3N = Lnb \left(\frac{1,5du}{v} + h \right). \quad (152)$$

Из формул (151) и (152) находим соотношение между слагаемыми в скобках в формуле (151):

$$\left(\frac{du}{v} \right) : h = 3 : 2.$$

3. Короткий автобус на пути «обратно». Если в формуле (151) заменить v на $v/2$, то первое слагаемое, составлявшее $3/5$ от суммы, возрастёт в 2 раза, то есть на $3/5$ от суммы, откуда $N_1 = N + (3/5)N = 1,6N$.

4. Длинный автобус на пути «обратно». Если в формуле (151) заменить v на $v/2$ и d на $1,5d$, то первое слагаемое, составлявшее $3/5$ от суммы, возрастёт в 3 раза, то есть на $6/5$ от суммы, откуда $N_2 = N + (6/5)N = 2,2N$.

Примерная система оценивания

Получение основной пропорции: $N \sim d/v + \text{const}$	4
Определение соотношения между слагаемыми	2
Ответ для N_1	2
Ответ для N_2	2

Задача 47. Ночное насекомое (2010 год)

Насекомое будет приближаться к фонарю по спирали (рис. 116). Рассмотрим небольшой участок траектории в полярной системе координат с центром в центре фонаря. Поскольку вектор скорости $\vec{v}$ составляет постоянный угол α с направлением на центр фонаря, проекция скорости насекомого на направление к фонарю является константой: $v_r = v \cos \alpha$. Следовательно, можем найти время приближения с расстояния R до расстояния R_0 от центра:

$$\tau = \frac{R - R_0}{v_r} = \frac{R - R_0}{v \cos \alpha} = 57 \text{ с.}$$

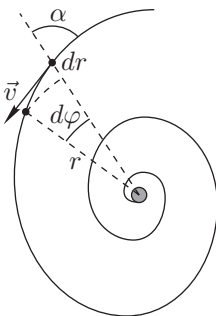


Рис. 116

Для вычисления числа оборотов запишем смещение насекомого за малое время dt в направлении к центру фонаря и в перпендикулярном направлении:

$$dr = -v \cos \alpha \cdot dt, \quad r d\varphi = v \sin \alpha \cdot dt.$$

Поделив одно уравнение на другое, получим

$$d\varphi = -\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{dr}{r},$$

откуда после интегрирования в пределах от R до R_0 находим полный угол поворота насекомого вокруг фонаря:

$$\varphi = -\operatorname{tg} \alpha \cdot \ln \frac{R_0}{R}.$$

Найдём искомое число оборотов:

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0} = 4,2.$$

Примерная система оценивания

Ответ для τ в общем виде	2
Численный ответ для τ	1
Ответ для n в общем виде (за фрагменты вывода ставится часть баллов)	6
Численный ответ для n	1

Задача 48. Волны в ручье (2010 год)

Запишем длины волн, образовавшихся по разные стороны от палки, в виде $\lambda_1 = k_1 d$ и $\lambda_2 = k_2 d$, где коэффициенты $k_1 = 1/6$ и $k_2 = 8$ определяются по фотографиям: сколько λ_1 укладывается в d и сколько d укладывается в λ_2 .

В системе отсчёта, связанной с водой, палка и обе волны движутся со скоростью u (аналогично картине волн от катера). Подставим $v = u$ в закон дисперсии и запишем его в виде

$$\frac{g}{2\pi} \lambda^2 - u^2 \lambda + \frac{2\pi\sigma}{\rho} = 0.$$

Поскольку λ_1 и λ_2 — корни данного уравнения, по теореме Виета

$$\frac{g}{2\pi} \lambda_1 \lambda_2 = \frac{2\pi\sigma}{\rho}, \quad \frac{g}{2\pi} (\lambda_1 + \lambda_2) = u^2.$$

После подстановки выражений для λ_1 и λ_2 находим

$$d = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{k_1 k_2 \rho g}} \approx 15 \text{ мм}, \quad u = \sqrt{\sqrt{\frac{g\sigma}{k_1 k_2 \rho}} (k_1 + k_2)} \approx 43 \text{ см/с}.$$

Примерная система оценивания

Выбор диаметра палки в качестве общей единицы измерения для обеих фотографий	1
Переход в систему отсчёта реки, связь $v = u$	2
Запись закона дисперсии для обеих волн	1
Ответ для d в общем виде (допускается подстановка k_1 и k_2)	2
Численный ответ для d	1
Ответ для u в общем виде (допускается подстановка k_1 и k_2)	2
Численный ответ для u	1

Задача 49. Три груза (2011 год)

1. Поскольку трения в блоках нет, сила T натяжения нити, удерживающей грузы m_1 и m_3 , одинакова по всей её длине, следовательно, для равновесия необходимо (но не достаточно) выполнение условия $m_1 = m_3$.

Пусть α и β — углы отклонения от вертикали участков нити между блоками (рис. 117), тогда условие равновесия среднего груза в проекциях на горизонтальную ось x и вертикальную ось y имеет вид

$$\begin{aligned} x: \quad & T \sin \alpha - T \sin \beta = 0, \\ y: \quad & T \cos \alpha + T \cos \beta - m_2 g = 0, \end{aligned}$$

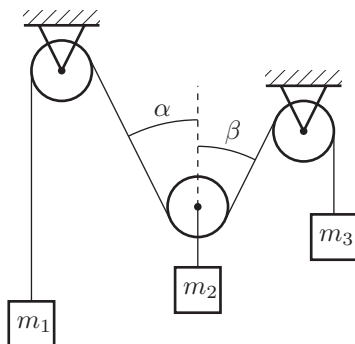


Рис. 117

откуда $\alpha = \beta$, $\cos \alpha = m_2 / (2m_1)$. Для существования угла α необходимо, чтобы выполнялось неравенство $m_2 < 2m_1$. Таким образом, равновесие возможно, если $m_1 = m_3$ и $m_2 < 2m_1$.

2. Углы отклонения участков нитей от вертикали в новом положении равновесия не изменятся, так как они зависят только от отношения масс. Следовательно, средний груз опустится, а вертикальные проекции участков нити между блоками увеличатся на одну и ту же величину Δy . А поскольку $\alpha = \beta$, горизонтальные проекции участков нити тоже увеличатся на одинаковые величины $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x / 2$. Найдём искомое смещение среднего груза:

$$\Delta y = \Delta x_1 \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\Delta x}{2\sqrt{4m_1^2/m_2^2 - 1}}.$$

Примерная система оценивания

Соотношение $m_1 = m_3$	2
Соотношение $m_2 < 2m_1$	2
Направление смещения среднего груза	2
Учёт смещения среднего груза по горизонтали	2
Окончательная формула для Δy	2

Задача 50. Упругие свойства графена (2011 год)

1. Выразим удлинение половины плёнки:

$$\Delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l = l \left(\left(1 + \frac{x^2}{l^2} \right)^{1/2} - 1 \right) \approx l \left(\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{l^2} \right) - 1 \right) = \frac{x^2}{2l}.$$

Площадь поперечного сечения плёнки $S = dh$. Найдём силу натяжения плёнки:

$$T = ES \frac{\Delta l}{l} = \frac{Edhx^2}{2l^2}.$$

Выразим силу давления зонда на плёнку (рис. 118):

$$F = 2T \sin \alpha \approx 2T \cdot \frac{x}{l} = \frac{Edhx^3}{l^3} \sim x^3. \quad (153)$$

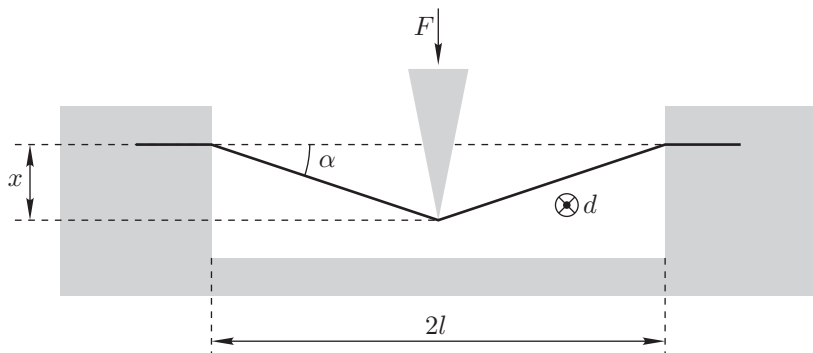


Рис. 118

2. Из формулы (153) найдём

$$E = \frac{Fl^3}{dhx^3} = 1,2 \cdot 10^{12} \text{ Па} = 1,2 \text{ ТПа},$$

где подставлены $x = x_0$ и $F = F_0$. Для сравнения — модуль Юнга алмаза не превосходит 1 ТПа.

3. Найдём максимальное относительное удлинение плёнки:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\Delta l_{\max}}{l} = \sqrt{1 + \frac{x_{\max}^2}{l^2}} - 1 = 20\%.$$

Для сравнения — попробуйте растянуть (не разорвав!) лист бумаги на 20%. ☺

4. Из условия равновесия перед разрывом

$$F_{\max} = 2T_{\max} \sin \alpha_{\max} = 2\sigma_{\max}dh \cdot \frac{x_{\max}}{\sqrt{l^2 + x_{\max}^2}}$$

находим прочность

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{\max} \sqrt{l^2 + x_{\max}^2}}{2dhx_{\max}} = 2,59 \cdot 10^{11} \approx 260 \text{ ГПа}.$$

Использование закона Гука даёт значение $\sigma_{\max} = E\varepsilon_{\max} = 240 \text{ ГПа}$, которое хуже согласуется с экспериментальными результатами из-за приближённости самого закона Гука для больших деформаций, однако в рамках поставленной задачи может считаться правильным. Для сравнения — прочность сталей не превосходит $\sigma_{\max}^{\text{сталь}} = 5 \text{ ГПа}$.

5. Из формулы

$$F_{\max} = 2\sigma_{\max}S \sin \alpha_{\max}$$

видно, что $F_{\max} \sim S$, так как $\alpha_{\max}$ определяется только максимальной относительной деформацией, которая, как и $\sigma_{\max}$, есть константа. Таким образом,

$$F'_{\max} = F_{\max} \cdot \frac{DH}{dh} = 143 \text{ кН} \approx 14 \text{ тонн силы.}$$

Примерная система оценивания

Формула для $F(x)$	2
Численный ответ для E	2
Численный ответ для $\varepsilon_{\max}$	2
Численный ответ для $\sigma_{\max}$	2
Численный ответ для $F'_{\max}$	2

Задача 51. U-образная трубка (2011 год)

В системе отсчёта трубки, движущейся с постоянным ускорением $\vec{a}$, сумму силы тяжести $\vec{F}_1 = m\vec{g}$ и силы инерции $\vec{F}_2 = -m\vec{a}$ можно рассматривать как силу тяжести с эффективным ускорением свободного падения $\vec{g}_{\text{эф}} = \vec{g} - \vec{a}$.

Из условия равновесия жидкостей найдём высоту столба воды над эффективной горизонталью G_1G_2 , проходящей через границу раздела воды и масла перпендикулярно $\vec{g}_{\text{эф}}$ (рис. 119): $h = H\rho/\rho_w$, где $\rho_w = 1 \text{ г/см}^3$ — плотность воды.

Угол φ наклона G_1G_2 к истинной горизонтали определим геометрически:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta h}{L} = \frac{H-h}{L} = \frac{H}{L} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_w} \right) = 1.$$

Возможны различные ускорения $\vec{a}$, при которых $\vec{g}_{\text{эф}}$ будет направлено под углом φ к вертикали, однако a будет минимальным, если $\vec{a} \perp \vec{g}_{\text{эф}}$, откуда

$$a_{\min} = g \sin \varphi = \frac{g \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + 1}} = \frac{g}{\sqrt{2}} \approx 7 \text{ м/с}^2.$$

Если же предполагать $\vec{a}$ горизонтальным, то получается неверный ответ $a = g \operatorname{tg} \varphi = g > a_{\min}$.

Примечание. Наклоном поверхностей жидкостей можно пренебречь, так как по условию трубка тонкая.

Примерная система оценивания

Нахождение φ или иной равносильной величины	4
---	---

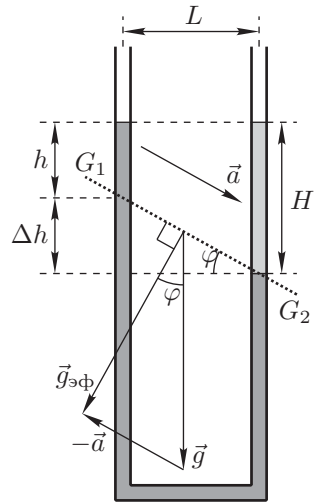


Рис. 119

Понимание, что искомое ускорение не горизонтально	3
Ответ в общем виде	2
Численный ответ	1

Задача 52. Третий полёт Вовочки (2012 год)

1. Вопрос про направление вращения по сути проверяет знание пары широко известных астрономических фактов:

а) Полярная звезда (она же α Малой Медведицы) находится вблизи северного полюса мира (точки пересечения оси суточного вращения Земли с воображаемой небесной сферой);

б) почти все вращения в Солнечной системе направлены в одну сторону, что является следствием процесса формирования Солнечной системы.

Вспоминая расположение сторон света и тот факт, что восход Солнца наблюдается на востоке, делаем вывод: Земля на экране вращалась вокруг Солнца против часовой стрелки (рис. 120).

2. Пусть $T = 1 \text{ год} \approx 3,15 \cdot 10^7 \text{ с}$ — период орбитального движения Земли, тогда $n = T/\tau \approx 365$ — число кадров за время одного оборота, $T_v = n/\nu \approx 15 \text{ с}$ — период вращения, наблюдаемого на экране. Находим искомую угловую скорость:

$$\omega = \frac{2\pi}{T_v} = \frac{2\pi\nu\tau}{T} \approx 0,41 \text{ с}^{-1}.$$

3. Расстояния от корабля до Солнца в начале и в конце фотосессии соответственно:

$$L_1 = \frac{R}{\sin \varphi} \approx \frac{R}{\varphi}, \quad L_2 \approx \frac{R}{\varphi/k} = \frac{kR}{\varphi}.$$

Надём искомую среднюю скорость:

$$v = \frac{L_2 - L_1}{NT} = \frac{R(k-1)}{\varphi NT} \approx 109 \text{ км/с}.$$

4. Пусть γ — гравитационная постоянная, M — масса Солнца, μ — масса Земли, тогда согласно второму закону Ньютона для движения Земли по окружности

$$\frac{\gamma M \mu}{R^2} = \mu \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R,$$

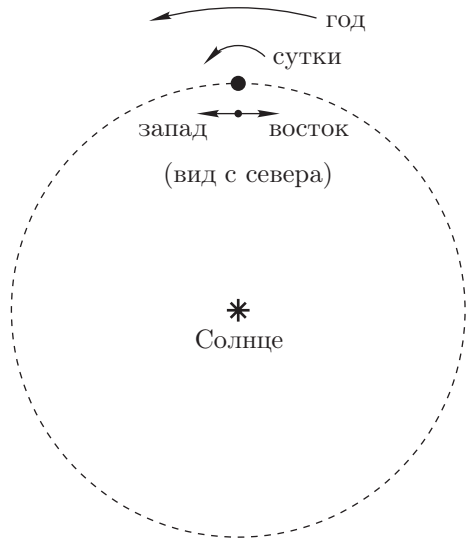


Рис. 120

откуда

$$\gamma M = \frac{4\pi^2 R^3}{T^2}.$$

Пусть m — масса корабля, v_1 и v_2 — его скорости соответственно в начале и в конце фотосессии, тогда из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{\gamma M m}{L_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{\gamma M m}{L_2}$$

получаем

$$v_2^2 - v_1^2 = -2\gamma M \left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_2} \right).$$

Для оценки можно считать, что $v_2 + v_1 \approx 2v$, тогда с помощью формулы для разности квадратов находим

$$\Delta v = v_2 - v_1 \approx -\frac{\gamma M}{v} \left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_2} \right) = -\frac{4\pi^2 \varphi^2 N R}{kT} \approx -95 \text{ м/с}.$$

Использованное приближение оправдано, так как $\Delta v \ll v$.

5. Пусть v_0 — минимальная скорость, которую нужно сообщить кораблю, находящемуся на расстоянии R от Солнца, чтобы после этого он сумел с выключенными двигателями покинуть Солнечную систему, тогда согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{\gamma M m}{R} = 0,$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = \frac{2\pi R}{T} \sqrt{2} \approx 42 \text{ км/с}.$$

Из первой части формулы для v_0 следует, что чем больше начальное расстояние, тем при меньшей скорости корабль может покинуть Солнечную систему. Отметим, что вторая часть формулы для v_0 не годится для такого анализа, так как T зависит от R .

Поскольку корабль Вовочки имеет большую скорость ($v_1 > v > v_0$) на большем удалении ($L_1 > R$), шансов самостоятельно вернуться у него нет.

Примерная система оценивания

Определение направления вращения	1
Ответ для ω в общем виде	1
Численный ответ для ω	1
Ответ для v в общем виде	1
Численный ответ для v	1
Применение второго закона Ньютона	1
Применение закона сохранения энергии	1
Ответ для Δv в общем виде	1
Численный ответ для Δv	1
Ответ на вопрос о возвращении	1

Решения задач. Термодинамика

Задача 53. Ледяной покров (1995 год)

Поскольку погода не менялась в течение длительного времени, можно считать, что все термодинамические процессы идут уже в установившемся режиме, то есть температура льда линейно изменяется от $T_1 = -20^\circ\text{C}$ на воздухе до $T_0 = 0^\circ\text{C}$ на границе с водой, а температура воды линейно изменяется от $T_0 = 0^\circ\text{C}$ на границе со льдом до $T_2 = +4^\circ\text{C}$ на дне озера. Качественная зависимость температуры T от глубины представлена на рис. 121.

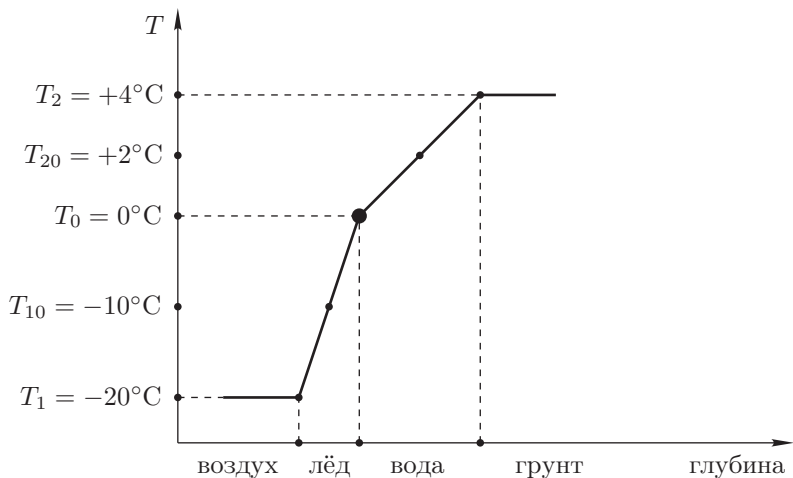


Рис. 121

Кристаллизация воды происходит на границе со льдом при постоянной температуре $T_0 = 0^\circ\text{C}$ (выделенная точка на рис. 121), а значения T_1 и T_2 являются константами по условию задачи, значит, средние температуры льда и воды также не меняются со временем и равны соответственно

$$T_{10} = \frac{T_1 + T_0}{2} = -10^\circ\text{C} = \text{const} \quad \text{и} \quad T_{20} = \frac{T_2 + T_0}{2} = +2^\circ\text{C} = \text{const}.$$

Пусть x — толщина льда в некоторый момент времени t , тогда за малый промежуток времени dt толщина льда увеличится на dx за счёт кристаллизации воды массой $dm = \rho S dx$, где S — площадь озера. При этом непосредственно за счёт кристаллизации выделяется количество теплоты $dQ_0 = \lambda dm$, а для сохранения прежних значений средних температур льда и воды нужно отвести от них дополнительные количества теплоты соответственно

$$dQ_1 = c_1(T_0 - T_{10})dm \quad \text{и} \quad dQ_2 = c_2(T_{20} - T_0)dm.$$

Таким образом, в системе выделяется общее количество теплоты

$$dQ = dQ_0 + dQ_1 + dQ_2 = \alpha dm = \alpha \rho S dx, \quad (154)$$

где для краткости введено обозначение

$$\alpha = \lambda + c_1 \cdot \frac{T_0 - T_1}{2} + c_2 \cdot \frac{T_2 - T_0}{2}.$$

Это тепло выделяется в разных местах (dQ_0 — на границе, dQ_1 — в объёме льда, dQ_2 — в объёме воды), однако на основании количественной оценки

$$\frac{dQ_1 + dQ_2}{dQ_0} = \frac{c_1(T_0 - T_1) + c_2(T_2 - T_0)}{2\lambda} \approx 0,09 \ll 1$$

будем считать, что всё тепло целиком выделяется на границе. Отметим, что только в рамках этого приближения можно считать зависимость температуры от глубины кусочно линейной функцией (рис. 121).

Поскольку выделившееся количество теплоты dQ передаётся воздуху за счёт разности температур $\Delta T = T_0 - T_1$ через слой льда толщиной x и площадью S за время dt , по формуле для теплопроводности запишем

$$dQ = k \cdot \frac{\Delta T}{x} \cdot S \cdot dt,$$

откуда после подстановки dQ из формулы (154) и упрощения получим

$$\alpha \rho x dx = k \Delta T dt. \quad (155)$$

Отметим, что скорость роста ледяного покрова $v = dx/dt = k \Delta T / (\alpha \rho x) \sim 1/x$ уменьшается при увеличении x , поэтому озёра не промерзают до дна.

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (155) при изменении толщины льда x от h до H , а времени t от 0 до $\tau = 1$ сут = 86400 с:

$$\int_h^H \alpha \rho x dx = \int_0^\tau k \Delta T dt,$$

откуда

$$\frac{\alpha \rho}{2} (H^2 - h^2) = k \Delta T \tau, \quad \text{или} \quad H = \sqrt{h^2 + \frac{2k \Delta T \tau}{\alpha \rho}}.$$

Найдём искомое приращение толщины ледяного покрова:

$$\Delta x = H - h = h \left(\sqrt{1 + \frac{4k(T_0 - T_1)\tau}{\rho h^2(2\lambda + c_1(T_0 - T_1) + c_2(T_2 - T_0))}} - 1 \right) \approx 5,3 \text{ см.}$$

Примечание. Может показаться странным, что суточный прирост оказался около четверти толщины льда, образовавшегося согласно условию за несколько недель. Однако никакого противоречия здесь нет, так как из-за конвекции в озере существенное время с начала похолодания занимает охлаждение поверхности воды до температуры кристаллизации.

Примерная система оценивания

Качественный анализ термодинамических процессов	1
Выражение для dQ через кристаллизацию и охлаждение	2
Выражение для dQ через теплопроводность	1
Обоснование использованных приближений	1
Ответ в общем виде	3
Численный ответ	2

Задача 54. Похолодание (1996 год)

Пусть T и t — текущие температуры в доме и на улице соответственно, тогда мощности потоков тепла от батарей в комнату и из дома на улицу составляют

$$P = \alpha(\tau - T) \quad \text{и} \quad N = \beta(T - t),$$

где α и β — некоторые константы. В установившемся режиме эти мощности равны между собой, поэтому для первого и второго случаев можно записать соответственно

$$\alpha(\tau - T_1) = \beta(T_1 - t_1) \quad \text{и} \quad \alpha(\tau - T_2) = \beta(T_2 - t_2),$$

откуда

$$T_2 = \tau - \frac{\tau - T_1}{\tau - t_1} \cdot (\tau - t_2) = 10^\circ\text{C}.$$

Примечание. Видно, что комнатные температуры T_1 и T_2 сильно различаются, что нежелательно с точки зрения обеспечения комфорта для жильцов, поэтому температуру батарей обычно корректируют по погоде на основании приведённых рассуждений и формул.

Примерная система оценивания

Пропорциональность мощности и разности температур	2
Уравнение теплового баланса в первом случае	2
Уравнение теплового баланса во втором случае	2
Ответ в общем виде	3
Численный ответ	1

Задача 55. Электрочайник (1997 год)

Температура чайника при мощности P перестаёт увеличиваться, достигнув установившегося значения t , когда энергия, потребляемая из сети за время $d\tau$, целиком передаётся в окружающую среду, то есть

$$Pd\tau = k(t - t_0)d\tau, \tag{156}$$

где k — коэффициент теплоотдачи, t_0 — температура окружающей среды. Линейная зависимость P от $t - t_0$, описываемая формулой (156), подтверждается результатами, приведёнными в таблице 1. Таблица также позволяет найти k как угловой коэффициент этой зависимости

$$k = \frac{\Delta P}{\Delta t} = 5 \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{К}}. \quad (157)$$

При охлаждении чайника с горячей водой справедливо равенство

$$(cm + C_0)dt = -k(t - t_0)d\tau, \quad (158)$$

где m — масса воды в чайнике, dt — изменение его температуры за время $d\tau$.

Перепишем уравнение (158): $t, ^\circ\text{C}$

$$\frac{dt}{d\tau} = -\frac{k(t - t_0)}{cm + C_0}.$$

В начале охлаждения, при $t = t_f = 80^\circ\text{C}$, имеем

$$B = \frac{dt}{d\tau} = -\frac{k(t_f - t_0)}{cm + C_0}. \quad (159)$$

Отношение $B = dt/d\tau$ равно угловому коэффициенту графика зависимости $t(\tau)$ в точке $\tau = 0$.

Этот угловой коэффициент можно приближённо найти из таблицы 2 по двум-трём первым точкам:

$$B \approx -0,080 \frac{\text{К}}{\text{с}}.$$

Подставляя B в формулу (159), получим объём V воды в чайнике:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{-k(t_f - t_0) - BC_0}{Bc\rho} \approx 0,9 \text{ л}.$$

Если проинтегрировать уравнение (158), то получится

$$t - t_0 = (t_f - t_0)e^{-\frac{k\tau}{cm + C_0}} = (t_f - t_0)e^{-B\frac{\tau}{t_f - t_0}}.$$

На рис. 122 представлены точки, полученные из таблицы 2, и график этой функции при найденном значении B . Видно, что выполненные расчёты согласуются с экспериментом.

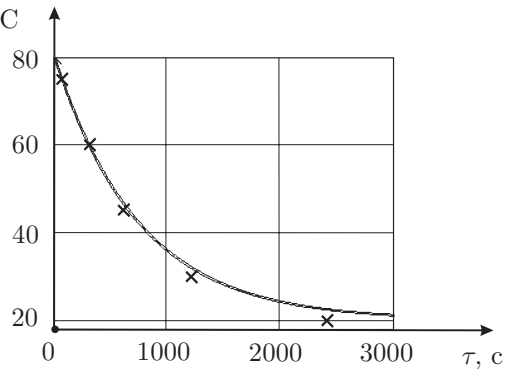


Рис. 122

Задача 56. Нагреватель (1998 год)

Графическое представление экспериментальных данных (рис. 123) позволяет обнаружить три этапа процесса:

- 1) от 31°C до 33°C ;
- 2) от 33°C до 35°C ;
- 3) от 35°C до 37°C .

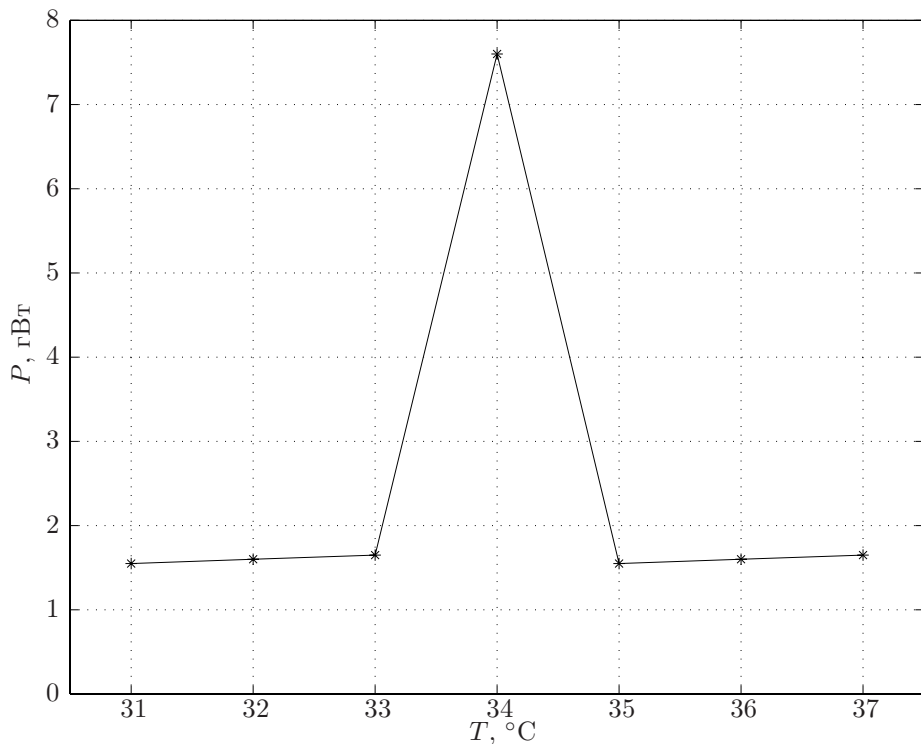


Рис. 123

Температура плавления. На втором этапе мощность нагревателя резко увеличивается, значит, именно в этот момент происходит плавление вещества X , то есть $T_{\text{пл}} = (34,0 \pm 0,5)^{\circ}\text{C}$. Наличие погрешности результата связано не с точностью исходных данных, а с их дискретностью, составляющей 1°C .

Мощность теплопотерь. На первом и третьем этапах мощность нагревателя линейно зависит от температуры, что при условии постоянства теплоёмкостей может объясняться только наличием теплопотерь, мощность которых $P_0 = k(T - T_0)$, где k — константа, характеризующая калориметр. Из таблицы в условии видно, что мощность увеличивается на $\Delta P = 5$ Вт при повышении температуры на $\Delta T = 1^{\circ}\text{C}$, следовательно, коэффициент пропорциональности $k = \Delta P / \Delta T = 5$ Вт/ $^{\circ}\text{C}$. Чтобы поддерживать вещество X в калориметре при

постоянной температуре, нагреватель должен подводить мощность, равную мощности теплопотерь, поэтому $P_{\text{пл}} = k(T_{\text{пл}} - T_0) = (70 \pm 3)$ Вт. Погрешность $P_{\text{пл}}$ обусловлена погрешностью $T_{\text{пл}}$ из предыдущего пункта.

Удельные теплоёмкости. За малый промежуток времени Δt температура системы повышается на $\Delta T = v\Delta t$. Пусть c — удельная теплоёмкость вещества X при температуре T на первом или третьем этапе, тогда уравнение теплового баланса на промежутке времени Δt будет иметь вид

$$(P - k(T - T_0))\Delta t = (cm + C)\Delta T,$$

откуда

$$c = \frac{1}{m} \left(\frac{P - k(T - T_0)}{v} - C \right).$$

Подставляя сюда данные для любых точек на первом и третьем этапах, находим соответственно

$$c_{\text{тв}} = 500 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}) \quad \text{и} \quad c_{\text{жид}} = 300 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}).$$

Погрешности здесь не рассчитаны, так как они могут быть связаны только с погрешностью исходных данных, которой по условию можно пренебречь.

Удельная теплота плавления. Мощности нагревателя на границах второго этапа ($P_{33} = 165$ Вт и $P_{35} = 155$ Вт) близки между собой и существенно меньше мощности в середине второго этапа ($P_{34} = 760$ Вт), поэтому можно считать, что для нагрева системы и компенсации теплопотерь на втором этапе требуется средняя мощность $P_{\text{ср}} = (P_{33} + P_{35})/2 = 160$ Вт, а дополнительная мощность $P_{\text{доп}} = P_{34} - P_{\text{ср}} = 600$ Вт расходуется на плавление.

Логично предположить, что полученные в эксперименте мощности P являются средними значениями за промежуток времени $\Delta t = \Delta T/v = 1$ с между соседними измерениями, тогда из уравнения теплового баланса для плавления

$$P_{\text{доп}}\Delta t = \lambda m$$

находим

$$\lambda = (6000 \pm 50) \text{ Дж}/\text{кг}.$$

Погрешность последнего результата оценена через диапазон возможных значений $P_{\text{доп}} = (600 \pm 5)$ Вт, зависящий от $P_{\text{ср}} = (160 \pm 5)$ Вт, и получилась весьма небольшой для подобных измерений, однако следует учесть, что, если предположение об усреднении мощности в реальности не выполняется, то полученное значение λ может в разы отличаться от истинного.

Примерная система оценивания

Численный ответ для $T_{\text{пл}}$	1
Метод нахождения $P_{\text{пл}}$	1
Численный ответ для $P_{\text{пл}}$	1
Метод нахождения $c_{\text{тв}}$ и $c_{\text{жид}}$	1

Численный ответ для $c_{\text{тв}}$	1
Численный ответ для $c_{\text{жид}}$	1
Метод нахождения λ	1
Численный ответ для λ	1
Оценка погрешностей	2

Задача 57. Пружина (1999 год)

Для нахождения плотности газа применим уравнение состояния идеального газа $pV = m_{\text{г}}RT/M$ (уравнение Менделеева–Клапейрона). Из него следует, что

$$\rho = \frac{m_{\text{г}}}{V} = \frac{Mp}{RT}, \quad (160)$$

где M — молярная масса газа, $m_{\text{г}}$ — масса газа в объёме V , R — универсальная газовая постоянная. Зависимость плотности газа от координаты x обусловлена распределением температуры газа (рис. 124). Учитывая, что температура между плоскостями изменяется линейно с изменением x , получим

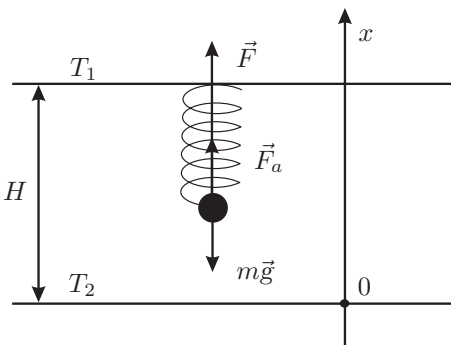


Рис. 124

$$T = T(x) = \frac{T_1 - T_2}{H}x + T_2,$$

и тогда из уравнения (160) следует, что

$$\rho(x) = \frac{MpH}{R((T_1 - T_2)x + HT_2)}. \quad (161)$$

В положении равновесия сумма всех сил, приложенных к шарик, равна нулю (рис. 124):

$$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_a = 0,$$

где $M\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{F}$ — сила упругости, $\vec{F}_a$ — сила Архимеда. Условие равновесия имеет вид

$$-mg + k(L - L_0) + \rho g \frac{m}{\rho_0} = 0.$$

Поскольку $L = L_0$, получим $\rho = \rho_0$. После подстановки этого равенства, а также $x = H - L_0$ в формулу (161) найдём

$$p = \frac{\rho_0 R}{M} \left(\frac{T_1 - T_2}{H} (H - L_0) + T_2 \right).$$

Для нахождения частоты малых колебаний запишем динамическое уравнение движения шарика вблизи положения равновесия:

$$m\ddot{x} = -k\xi + mg\frac{\rho(x) - \rho_0}{\rho_0}, \quad (162)$$

где $\xi = x - (H - L_0)$ — малое отклонение шарика от положения равновесия, а соответствующее приращение плотности, найденное из формулы (161), равно

$$\rho(x) - \rho_0 = \frac{-MpH\xi(T_1 - T_2)}{R((T_1 - T_2)(H - L_0) + HT_2)^2}.$$

После подстановки этих выражений динамическое уравнение принимает вид

$$m\ddot{\xi} = -\left(k + \frac{mg\xi(T_1 - T_2)}{(T_1 - T_2)(H - L_0) + HT_2}\right)\xi.$$

Отсюда находим искомую циклическую частоту малых колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left(k + \frac{mg\xi(T_1 - T_2)}{(T_1 - T_2)(H - L_0) + HT_2} \right)}.$$

Задача 58. Скороварка (1999 год)

На рис. 125 изображены две близкие изотермы воды, соответствующие температурам T и $T - \Delta T$.

Прямолинейные участки изотерм соответствуют равновесным состояниям смеси воды и водяного пара. Рассмотрим цикл Карно 1-2-3-4-1, осуществляемый с некоторой массой m воды. Коэффициент полезного действия η цикла Карно:

$$\eta = \frac{\Delta T}{T} = \frac{A}{Q}, \quad (163)$$

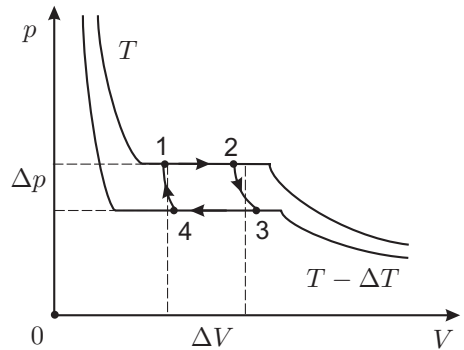


Рис. 125

где A — работа за цикл, Q — количество теплоты, полученное от нагревателя. Поскольку $\Delta T = 5^\circ\text{C}$ мало по сравнению с $T = 373^\circ\text{C}$, при вычислении работы цикл 1-2-3-4-1 можно считать прямоугольником. Тогда

$$A = \Delta p \Delta V, \quad (164)$$

где ΔV — изменение объёма воды при её обращении в пар. Количество теплоты, необходимое для парообразования, составляет

$$Q = rm. \quad (165)$$

Подставляя выражения (164) и (165) в формулу (163), получим

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta p \Delta V}{r m}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{r}{T \Delta v}, \quad (166)$$

где $\Delta v = \Delta V/m$ — изменение удельного объёма воды при её обращении в пар.

Уравнение (166) известно в физике под названием уравнения Клаузиуса–Клапейрона. Оно описывает не только кипение, но и другие агрегатные превращения. При парообразовании воды $\Delta v > 0$, поэтому из уравнения (166) следует увеличение температуры кипения ($\Delta T > 0$) с ростом давления ($\Delta p > 0$). А вот процесс плавления льда сопровождается уменьшением удельного объёма ($\Delta v < 0$). Поэтому температура плавления льда с повышением давления убывает.

При кипении изменение удельного объёма воды приблизительно равно удельному объёму образовавшегося пара, то есть $\Delta v \approx V_v/m$. Считая пар идеальным газом, отношение V_v/m можно найти из уравнения Менделеева–Клапейрона. Получим

$$\Delta v = \frac{RT}{Mp},$$

где R — универсальная газовая постоянная, а M — молярная масса воды. Подставляя найденное Δv в уравнение (166), найдём

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{r M \Delta T}{R T^2}.$$

Подставляя численные значения, получим

$$\Delta p = 0,18 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Задача 59. Сосуд с водой (2001 год)

Общая теплоёмкость системы определяется формулой $C = \Delta Q / \Delta T$, где ΔQ — малое количество теплоты, которое система получает при изменении её температуры на малую величину ΔT .

Заданный по условию процесс нагревания содержимого сосуда в интервале температур от $T_1 = -50^\circ\text{C}$ до $T_2 = 150^\circ\text{C}$ протекает при постоянном нормальном давлении $P_0 = 1$ атм, поэтому плавление льда и парообразование воды будут происходить при обычных температурах 0°C и 100°C соответственно, которые входят в рассматриваемый интервал.

В точках фазового перехода тепло подводится ($\Delta Q > 0$), а температура не изменяется ($\Delta T = 0$), поэтому теплоёмкость стремится к бесконечности.

В интервале температур $[-50^\circ\text{C}; 0^\circ\text{C}]$ содержимое сосуда находится в твёрдом состоянии (лёд) и его теплоёмкость составляет $C_1 = c_l m = 21 \text{ Дж}/^\circ\text{C}$.

В интервале температур $[0^\circ\text{C}; 100^\circ\text{C}]$ содержимое сосуда находится в жидком состоянии (вода) и его теплоёмкость составляет $C_2 = c_w m = 42 \text{ Дж}/^\circ\text{C}$.

В интервале температур $(100^{\circ}\text{C}; 150^{\circ}\text{C}]$ содержимое сосуда находится в газообразном состоянии (пар) и его теплоёмкость составляет $C_3 = 3(m/\mu)R \approx 14 \text{ Дж}/^{\circ}\text{C}$.

Изобразим полученные результаты в графическом виде (рис. 126).

Примечание. Отметим, что значение C_3 , вычисленное согласно простейшей модели идеального газа, заметно отличается от «истинного» значения $C_3 \approx 20 \text{ Дж}/^{\circ}\text{C}$, полученного на основе экспериментальных данных из справочника. Кроме того, каждая из теплоёмкостей C_1 , C_2 и C_3 не является константой, а немного зависит от температуры. Однако эти уточнения не влияют на суть задачи в условиях олимпиады.

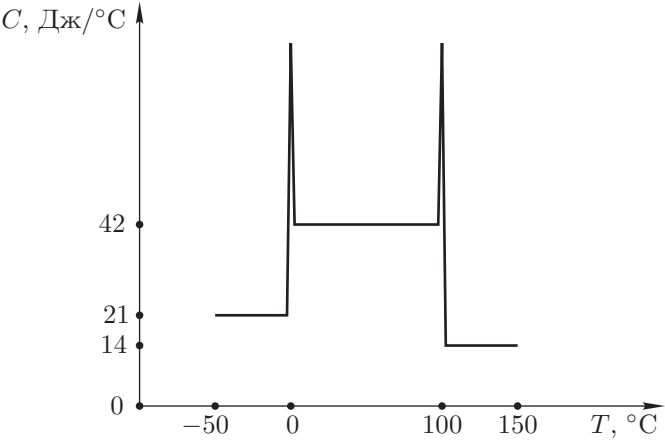


Рис. 126

Примерная система оценивания

Нахождение значений C_1 и C_2	1
Оценка значения C_3	1
Наличие горизонтального участка на уровне C_1	1
Наличие горизонтального участка на уровне C_2	1
Наличие горизонтального участка на уровне C_3	1
Наличие вертикального участка при 0°C (с обоснованием)	2
Наличие вертикального участка при 100°C (с обоснованием)	2
Качественные пояснения и «красивый» график	1

Задача 60. Стопка монет (2002 год)

По закону теплопроводности искомая мощность вычисляется по формуле $P = k(T - T_0)$, где k — некоторый коэффициент, зависящий только от материалов и размеров цилиндра. Поскольку монет по условию много, большинство из них вдали от термостата находятся практически при температуре T_0 . Таким образом, добавление к свободному торцу цилиндра ещё одной монеты с бумажной прослойкой не изменит распределение температур, а также величины P

и k . За счёт большого коэффициента теплопроводности золота по сравнению с бумагой температуру каждой монеты можно считать одинаковой по всему её объёму. Пусть T_1 — температура ближайшей к термостату монеты, тогда цилиндр из остальных монет получает от неё мощность $P_1 = k(T_1 - T_0)$, так как этот цилиндр эквивалентен первоначальному, а первая монета играет для него роль термостата. Исключая k из записанных выше выражений для P и P_1 , находим

$$P_1 = P \cdot \frac{T_1 - T_0}{T - T_0}. \quad (167)$$

По закону теплопроводности найдём мощность теплопередачи через бумагу между первой монетой и окружающей средой:

$$\Delta P_1 = \mu \cdot 2\pi RH \cdot \frac{T_1 - T_0}{l}. \quad (168)$$

Уравнение теплового баланса для первой монеты имеет вид

$$P = P_1 + \Delta P_1. \quad (169)$$

По закону теплопроводности найдём мощность теплопередачи через бумагу между термостатом и первой монетой:

$$P = \mu \cdot \pi R^2 \cdot \frac{T - T_1}{d}. \quad (170)$$

Подставив выражения (167) и (168) в уравнение (169) и используя формулу (170) для исключения T_1 (для упрощения алгебраических преобразований целесообразно предварительно обозначить группы констант временными буквами), получим

$$P^2 + \frac{2\pi\mu RH}{l}(T - T_0) \cdot P - \frac{2\pi^2\mu^2 R^3 H}{ld}(T - T_0)^2 = 0.$$

Из физического смысла $P/(T - T_0) = k = \text{const} > 0$, поэтому выбираем плюс при записи решения квадратного уравнения:

$$P = \frac{\pi\mu RH}{l}(T - T_0) \left(\sqrt{1 + \frac{2Rl}{Hd}} - 1 \right).$$

Примерная система оценивания

Идея о добавлении монеты с прослойкой	1
Обоснование использованных приближений	1
Прямая пропорциональность P_1 и P	2
Выражение для ΔP_1 по формуле для теплопроводности	1
Выражение для P по формуле для теплопроводности	1
Уравнение теплового баланса для первой монеты	1

Ответ 3

Задача 61. Фотонный газ (2003 год)

Давление газа обусловлено ударами его частиц о стенки сосуда. Величина давления равна средней силе, действующей на единицу площади стенки. Найдём среднюю силу F_i , с которой действуют на стенку частицы, имеющие скорость $\vec{v}_i$ и импульс $\vec{p}_i$, направленные под углом α_i к нормали стенки. Для этого применим закон изменения импульса, считая удар частиц упругим. За время Δt о единичную площадку стенки ударятся $N_i = n_i v_i \cos \alpha_i \Delta t$ таких частиц, где n_i — их число в единице объёма:

$$2N_i p_i \cos \alpha_i = 2n_i v_i \cos \alpha_i p_i \cos \alpha_i = F_i \Delta t.$$

Давление газа P составляет

$$P = \langle F_i \rangle = 2 \langle n_i v_{ix} p_{ix} \rangle = 2 \langle v_{ix} p_{ix} \rangle \frac{1}{2} n, \quad (171)$$

где ось x перпендикулярна к стенке. Множитель $1/2$ поставлен потому, что лишь половина частиц, имеющих одно и то же значение $\vec{v}_i \vec{p}_i$, движется к стенке, а другая — в противоположном направлении. Из-за хаотичности движения частиц

$$\langle p_i \cos \alpha_i \cdot v_i \cos \alpha_i \rangle = \langle v_{ix} p_{ix} \rangle = \frac{1}{3} \langle v_{ix} p_{ix} + v_{iy} p_{iy} + v_{iz} p_{iz} \rangle = \frac{1}{3} \langle \vec{v} \cdot \vec{p} \rangle.$$

Подставляя это выражение в формулу (171), получим

$$P = \frac{1}{3} n \langle \vec{v} \cdot \vec{p} \rangle.$$

Ответ на второй пункт задачи просто следует из полученной формулы, если принять во внимание, что масса фотона равна нулю и поэтому его энергия $E = pc$, где c — скорость света, то есть скорость фотонов $v = c$:

$$P = \frac{1}{3} n E = \frac{1}{3} u, \quad (172)$$

где $u = nE$ — энергия единицы объёма фотонного газа.

Рассматриваемый в третьем пункте цикл Карно изображён на рис. 127.

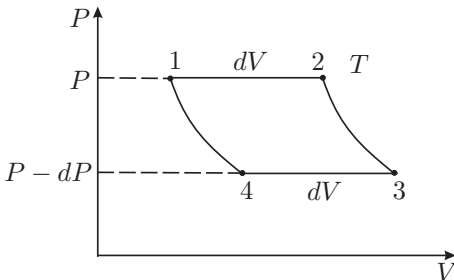


Рис. 127

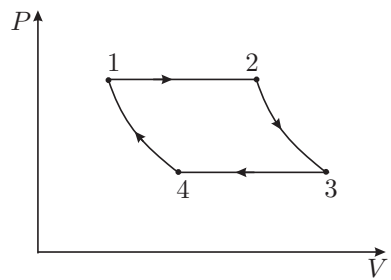


Рис. 128

Давление фотонного газа отличается от плотности энергии излучения только множителем $1/3$ в формуле (172), а плотность энергии не зависит от объёма, подобно тому как масса единицы объёма не зависит от объёма всего тела. Поэтому давление газа фотонов не зависит от объёма, а определяется только температурой. Таким образом, изотермы 1–2 и 3–4 совпадают с изобарами, что отражено на рис. 127. Вследствие малости dT и dP график рассматриваемого цикла можно приближённо считать параллелограммом. Тогда его «площадь» равна $dP \cdot dT$, и получаем следующую формулу для КПД цикла:

$$\eta = \frac{dT}{T} = \frac{\delta A}{\delta Q} = \frac{dP \cdot dV}{\delta Q}. \quad (173)$$

Количество теплоты δQ , сообщаемое фотонному газу при изотермическом расширении, выразим из первого начала термодинамики:

$$\delta Q = dU + PdV = u dV + PdV = 4PdV.$$

Подставим последнее выражение в формулу (173):

$$\frac{dT}{T} = \frac{dP \cdot dV}{4PdV}.$$

Путём интегрирования находим

$$P = aT^4, \quad (174)$$

где a — некоторая постоянная величина.

В четвёртом пункте требуется, используя формулу (174), получить выражение для мощности W излучения единицы поверхности абсолютно чёрного тела. Для этого нужно сложить энергии всех фотонов, излучаемых в единицу времени единицей площади поверхности:

$$W = \sum \nu_i E_i,$$

где E_i — энергия фотонов i -го сорта, а ν_i — их число, излучаемое в единицу времени единичной площадкой. Из условия известно, что

$$\nu_i = \frac{1}{4} n_i \langle v_i \rangle,$$

где n_i — число фотонов i -го сорта в единице объёма, а $\langle v_i \rangle = c$ — скорость движения фотонов. Используя выражение для ν_i , а также формулу (174), получим закон Стефана–Больцмана:

$$W = \frac{1}{4} \sum n_i c E_i = \frac{c}{4} u = \frac{c}{4} 3P = \frac{3}{4} caT^4 = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 3ca/4$. Таким образом, постоянная Стефана–Больцмана отличается от коэффициента пропорциональности a , входящего в формулу (174), лишь множителем $3c/4$.

Часто в литературе в формуле

$$\nu = \frac{1}{4}n \langle v \rangle,$$

вместо $1/4$ пишут множитель $1/6$. Такой результат получается в более грубой модели, в которой рассматривается движение частиц только в трёх взаимно перпендикулярных направлениях.

В последнем пункте требуется найти КПД цикла, изображённого на рис. 128. Как было выяснено ранее, изобары 1–2 и 3–4 для фотонного газа совпадают с изотермами, так что рассматриваемый цикл похож на цикл Карно. В цикле Карно процессы 2–3 и 4–1 должны быть адиабатическими. В данной задаче эти процессы описываются уравнением $PV^{4/3} = \text{const}$. Чтобы сравнить процессы 2–3 и 4–1 с адиабатическими, нужно получить уравнение адиабаты фотонного газа. Для этого применим первое начало термодинамики и формулу (172):

$$\delta Q = \delta A + dU = 4PdV + 3VdP = 0.$$

Отсюда получим

$$\frac{dP}{P} = -\frac{4}{3} \frac{dV}{V}.$$

После интегрирования находим

$$PV^{4/3} = \text{const}.$$

Таким образом, в задаче речь идёт именно о цикле Карно, коэффициент полезного действия которого, как известно, не зависит от рода рабочего вещества и равен

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

в том числе и для рассматриваемого в задаче цикла с фотонным газом.

Задача 62. Процесс над газом (2004 год)

Каждая точка графика характеризует состояние газа. Зная давление p и объём V , с помощью уравнения Менделеева–Клапейрона можно найти температуру газа T . Прodelав такие вычисления для ряда точек, можно построить график в координатных осях (T, V) . Соединив точки плавной линией, можно приблизительно отсчитать искомое значение максимальной температуры. Естественно, подобный план удобно реализовать используя, например, компьютерную систему MathCAD. На рис. 129 показано такое построение. Видно, что $T_{\max} \approx 4,5 \cdot 10^2$ К. Нельзя ли в данном случае обойтись без этого общего метода? Если бы мы умели быстро рисовать на данном в условии графике

изотермы, то достаточно было бы подобрать изотерму, касающуюся этого графика. Вот если бы изотермы были прямыми линиями, то их можно было бы начертить с помощью линейки. Можно ли сделать изотермы прямолинейными?

Уравнение Менделеева–Клапейрона позволяет положительно ответить на этот вопрос:

$$p = \frac{\nu RT}{V}. \quad (175)$$

Функция $p = p(1/V)$ линейная при $T = \text{const}$. Следовательно, нужно построить график заданного процесса в осях $(p, 1/V)$. Такое построение выполнено на рис. 130. Здесь же проведена и изотерма, касающаяся данного графика. Точка касания соответствует искомому состоянию. Температуру его удобно найти как угловой коэффициент построенной прямой. Из уравнения (175) следует, что

$$T = \frac{pV}{\nu R} \approx 4,6 \cdot 10^2 \text{ К.}$$

Видно, что результаты, полученные обоими методами, приблизительно совпадают.

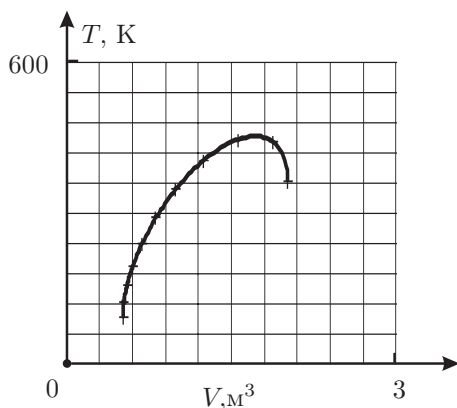


Рис. 129

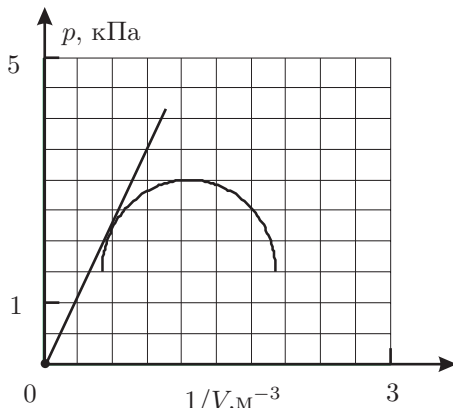


Рис. 130

Задача 63. Термодинамический цикл (2004 год)

Очевидно, что температура газа минимальна на изотерме 1–2 (рис. 131). В процессе 2–3 газ нагревается, поскольку совершает положительную работу, а в процессе 3–4 охлаждается, из-за того что

$$C - C_V = pdV/dT < 0.$$

Самая высокая температура оказывается в точке 3. Для нахождения этой температуры воспользуемся уравнением Менделеева–Клапейрона:

$$T_{\max} = T_{\min} \frac{V_3}{V_2} = 3T_{\min} = 900 \text{ К.}$$

Тепло подводится к газу только на участке 2–3, поэтому

$$Q_+ = C_p(T_3 - T_2) = C_p(T_{\max} - T_{\min}).$$

Для одноатомного газа

$$C_p = \frac{5}{2}R,$$

откуда

$$Q_+ = \frac{5}{2}R(T_{\max} - T_{\min}).$$

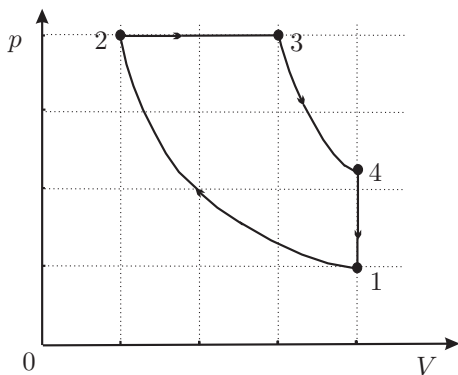


Рис. 131

Подставляя численные данные, находим $Q_+ = 12,5$ кДж.

Для работы имеем

$$A = A_{23} + A_{34} - A_{21}.$$

Поскольку участок 2–3 — изобара, имеем

$$A_{23} = p_2(V_3 - V_2) = R(T_3 - T_2) = R(T_{\max} - T_{\min}).$$

Работу в политропическом процессе находим согласно второму началу термодинамики:

$$C(T_4 - T_3) = C_V(T_4 - T_3) + A_{34}, \quad \text{или} \quad (C_V - C)(T_{\max} - T_4) = A_{34}.$$

Для точного определения T_4 найдём уравнение политропы. Из второго начала термодинамики $pdV = (C - C_V)dT$. Из уравнения Менделеева–Клапейрона имеем $pdV + Vdp = RdT$. Из последних двух уравнений получаем

$$pdV = \frac{C - C_V}{R}(pdV + Vdp) \Rightarrow \int \frac{dV}{V} = \frac{C - C_V}{C_p - C} \int \frac{dp}{p} \Rightarrow pV^{\frac{C - C_p}{C - C_V}} = \text{const.}$$

По условию $C = R/2$, значит, на политропе $pV^2 = RTV = \text{const}$. Из графика цикла видно, что

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{3}{4},$$

поэтому

$$T_4 = \frac{3}{4}T_3 = \frac{3}{4}T_{\max} \quad \text{и} \quad A_{34} = (C_V - C)\frac{1}{4}T_{\max} = \frac{RT_{\max}}{4}.$$

Осталось определить работу на изотерме:

$$dA_{21} = pdV = RT_{\min} \frac{dV}{V},$$

откуда

$$A_{21} = RT_{\min} \int_{V_2}^{V_1} \frac{dV}{V} = RT_{\min} \ln \frac{V_1}{V_2}.$$

Поскольку $\frac{V_1}{V_2} = 4$, получаем $A_{21} = RT_{\min} \ln 4$. Окончательно находим

$$A = R(T_{\max} - T_{\min}) + \frac{RT_{\max}}{4} - RT_{\min} \ln 4.$$

Подставляя численные значения, находим $A \approx 3,40$ кДж.

КПД цикла рассчитывается по формуле $\eta = A/Q_+$. Она даёт $\eta \approx 27\%$. Для идеальной тепловой машины Карно имеем

$$\eta_0 = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} \approx 67\%,$$

что, естественно, больше, чем для цикла, изображённого на рис. 131, как и для любого другого между теми же тепловыми резервуарами.

Задача 64. Чайник (2005 год)

Решение задачи сводится к применению закона изменения энергии в процессах теплообмена и парообразования.

Количество теплоты Q_e , отданное чайником в окружающую среду до второго включения, равно работе электрического тока в течение времени τ_2 :

$$Q_e = P\tau_2. \quad (176)$$

Количество теплоты, отдаваемое остывающим телом в окружающую среду, пропорционально времени остывания. Чайник остывает до второго включения в течение времени $\tau_1 + \tau_2$, так что

$$Q_e = k_1(\tau_1 + \tau_2), \quad (177)$$

где k_1 — коэффициент теплоотдачи, зависящий от разности температур тела и среды. В данном случае k_1 соответствует некоторой «средней» температуре остывавшего чайника.

При кипении открытого чайника работа электрического тока $P\tau_3$ равна сумме количества теплоты, необходимого для парообразования $r(m_1 - m_2)$, и количества теплоты, отдаваемого в окружающую среду:

$$P\tau_3 = k_2\tau_3 + r(m_1 - m_2). \quad (178)$$

Здесь $m_1 = \rho V_1$ и $m_2 = \rho V_2$ — массы воды в чайнике до и после кипения, k_2 — коэффициент теплоотдачи чайника, соответствующий его температуре, равной 100°C .

Насколько велико различие коэффициентов k_1 и k_2 ? Для выяснения этого вопроса найдём изменение температуры ΔT чайника при его остывании:

$$cm_1\Delta T = Q_e = P\tau_2.$$

Отсюда получаем

$$\Delta T = \frac{P\tau_2}{c\rho V_1} = 1,9^\circ\text{C}.$$

Температура окружающей среды комнатная (20°C). Поэтому разность температур чайника и окружающей среды изменяется приблизительно на $2/80 \approx 0,03 = 3\%$. Вследствие этого можно считать, что $k_1 \approx k_2$. Тогда из формул (176), (177) и (178) находим

$$r = \frac{P\tau_3}{\rho(V_1 - V_2)} \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \right) = 2,4 \text{ МДж/кг}.$$

Чаще всего экспериментальное определение удельной теплоты парообразования производится калориметрически. Однако пример этой задачи показывает, что можно обойтись и без калориметра. Следует сначала измерить время, в течение которого сосуд с жидкостью охлаждается на небольшую величину от температуры кипения, а затем измерить время, за которое выкипает определённый объём жидкости. При этом коэффициент теплоотдачи можно считать постоянным на протяжении всех измерений.

Задача 65. Грелка в аквариуме (2007 год)

По мере всплытия пузырька вода опускается, занимая тот объём, который пузырёк вытеснял в предыдущий момент времени. Уменьшение потенциальной энергии воды сопровождается равным увеличением её кинетической энергии, которая в свою очередь за счёт внутреннего трения (вязкости) переходит в тепловую энергию, тем самым повышая температуру воды.

Когда пузырёк радиусом r всплывает с глубины h на поверхность, вода объёмом $V = 4\pi r^3/3$ и массой $m = V\rho$ опускается на глубину h . При этом её потенциальная энергия уменьшается на $\Delta E = mgh$ и выделяется теплота

$$Q_1 = \Delta E = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho gh.$$

Поскольку грелка плоская и отверстия покрывают её равномерно, можно считать, что все пузырьки отрываются от грелки в её центре масс, который совпадает с точкой пересечения медиан треугольника и расположен на глубине

$$h = \frac{1}{3}(h_1 + h_2 + h_3).$$

За искомое время t грелку покинет $n = Nt/\tau$ пузырьков и выделится теплота

$$Q_n = nQ_1 = \frac{4\pi}{9} r^3 \rho g (h_1 + h_2 + h_3) N \frac{t}{\tau},$$

которая приведёт к требуемому повышению температуры:

$$Q_n = cM\Delta T.$$

Приравнявая выражения для Q_n , находим

$$t = \frac{9cM\Delta T\tau}{4\pi r^3 \rho g(h_1 + h_2 + h_3)N} = 6,7 \cdot 10^6 \text{ с} \approx 77 \text{ сут.}$$

Примерная система оценивания

Понимание причин повышения температуры ($Q = \Delta E$).....	2
Выражение для Q	1
Выражение для h	1
Выражение для n	1
Связь Q_n с ΔT	1
Ответ в общем виде	2
Численный ответ	2

Задача 66. Политропы (2007 год)

1. Величина a является угловым коэффициентом касательной к графику процесса в точке N , поэтому

$$a = \left. \frac{dP}{dV} \right|_{V=V_0}. \quad (179)$$

Уравнения изотермы и адиабаты имеют вид

$$PV = \text{const} = P_0 V_0 \quad \text{и} \quad PV^\gamma = \text{const} = P_0 V_0^\gamma.$$

Выразив отсюда P как функцию V и подставив в формулу (179), получим

$$a_i = -\left. \frac{P_0 V_0}{V^2} \right|_{V=V_0} = -\frac{P_0}{V_0}, \quad a_a = -\gamma \left. \frac{P_0 V_0^\gamma}{V^{\gamma+1}} \right|_{V=V_0} = -\gamma \frac{P_0}{V_0}.$$

2. Общая теплоёмкость определяется формулой $C = \delta Q/dT$, где δQ и dT — количество подведённой теплоты и повышение температуры на бесконечно малом участке процесса. Для определения знака C можно вместо δQ и dT подставлять малые конечные значения ΔQ и ΔT .

В изотермическом процессе NI температура не изменяется, следовательно, если некоторый процесс начинается в той же точке N и идёт выше NI , то температура в этом процессе повышается, а если ниже NI , то понижается. Таким образом, $\Delta T_1 > 0$, $\Delta T_2 < 0$, $\Delta T_3 < 0$.

В адиабатическом процессе NA теплообмен отсутствует, следовательно, если некоторый процесс начинается в той же точке N и идёт выше NA , то тепло в этом процессе подводится, а если ниже NA , то отводится. Таким образом, $\Delta Q_1 > 0$, $\Delta Q_2 > 0$, $\Delta Q_3 < 0$.

Используя полученные соотношения, находим

$$C_1 \approx \frac{\Delta Q_1}{\Delta T_1} > 0, \quad C_2 \approx \frac{\Delta Q_2}{\Delta T_2} < 0, \quad C_3 \approx \frac{\Delta Q_3}{\Delta T_3} > 0.$$

3. Аналогично первому пункту выразим угловой коэффициент касательной к графику процесса NB_2 в точке N :

$$a = -n \left. \frac{P_0 V_0^n}{V^{n+1}} \right|_{V=V_0} = -n \frac{P_0}{V_0}. \quad (180)$$

Пусть V_x — объём на указанной в условии изохоре, P_{I_x} , P_{A_x} , P_{B_x} — давления в точках I_x , A_x и B_x соответственно, тогда в силу пропорциональности углового коэффициента тангенсу угла наклона касательной можно записать

$$a_i = \frac{P_{I_x} - P_0}{V_x - V_0}, \quad a_a = \frac{P_{A_x} - P_0}{V_x - V_0}, \quad a = \frac{P_{B_x} - P_0}{V_x - V_0}.$$

По свойству медианы $P_{I_x} - P_{B_x} = P_{B_x} - P_{A_x}$, откуда

$$a = \frac{a_i + a_a}{2} = -\frac{\gamma + 1}{2} \cdot \frac{P_0}{V_0}. \quad (181)$$

Сравнивая выражения (180) и (181), находим $n = (\gamma + 1)/2$. По определению

$$n = \frac{C - C_P}{C - C_V},$$

откуда

$$C = \frac{nC_V - C_P}{n - 1} = C_V - \frac{C_P - C_V}{n - 1}.$$

Используя соотношение Майера ($C_P - C_V = R$), из которого с учётом равенства $\gamma = C_P/C_V$ можно выразить $C_V = R/(\gamma - 1)$, и подставив значение n , получим

$$C = \frac{R}{\gamma - 1} - \frac{R}{n - 1} = -\frac{R}{\gamma - 1}.$$

4. В процессе NI к газу подводят теплоту Q_1 и газ совершает работу A_1 . Изменение внутренней энергии идеального газа на изотерме равно нулю, поэтому $Q_1 = A_1$. В процессе IA от газа отводят теплоту Q_2 , а работа не совершается. В процессе AN над газом совершают работу A_2 , а теплообмена нет. По определению КПД

$$\eta = \frac{A_1 - A_2}{Q_1} = 1 - \frac{A_2}{A_1}.$$

Работы A_1 на изотерме и A_2 на адиабате найдём, проинтегрировав $P(V)$:

$$A_1 = \int_{V_0}^{\alpha V_0} \frac{P_0 V_0}{V} dV = P_0 V_0 \ln V \Big|_{V_0}^{\alpha V_0} = P_0 V_0 \ln \alpha,$$

$$A_2 = \int_{V_0}^{\alpha V_0} \frac{P_0 V_0^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{P_0 V_0^\gamma V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \Big|_{V_0}^{\alpha V_0} = P_0 V_0 \cdot \frac{1 - \alpha^{1-\gamma}}{\gamma - 1}.$$

Таким образом, находим искомый КПД:

$$\eta = 1 - \frac{1 - \alpha^{1-\gamma}}{(\gamma - 1) \ln \alpha}.$$

Примерная система оценивания

Ответ для a_i	1
Ответ для a_a	1
Ответ для знака C_1	1
Ответ для знака C_2	1
Ответ для знака C_3	1
Ответ для n	1
Ответ для C	1
Ответ для η	3

Задача 67. Суп экспериментатора Глюка (2008 год)

Поскольку все рассматриваемые процессы медленные, можно считать, что пар находится в термодинамическом равновесии с водой, то есть является насыщенным. Давление насыщенного пара при малых температурах пренебрежимо мало, поэтому можно считать, что сначала под крышкой был сухой воздух при атмосферном давлении. Таким образом, относительная влажность воздуха ни на что не влияет и приведена в условии лишь «для красоты».

1. Условие равновесия крышки непосредственно перед её приподниманием имеет вид

$$(P_1 + P'_0) \cdot S = mg + P_0 S, \quad (182)$$

где P_1 и P'_0 — давления соответственно пара и воздуха под крышкой при температуре t_1 . Из уравнения Менделеева–Клапейрона выразим

$$P'_0 = P_0 \cdot \frac{273^\circ\text{C} + t_1}{273^\circ\text{C} + t_0} = P_0 \left(1 + \frac{t_1}{273^\circ\text{C}} \right). \quad (183)$$

После подстановки выражения (183) в формулу (182) и упрощения получим

$$P_1 = \frac{mg}{S} - \frac{P_0 t_1}{273^\circ\text{C}}. \quad (184)$$

Это уравнение можно решить графически: построить графики его левой и правой частей как функций от t_1 и найти их точки пересечения. Поскольку P_1 — давление насыщенного пара, имеем $P_1 = P(t_1)$, а график $P(t_1)$ приведён в условии. График правой части уравнения (184) имеет вид прямой, пересекающей оси в точках

$$P_x = \frac{mg}{S} = 20 \text{ кПа} \quad \text{и} \quad t_x = 273^\circ\text{C} \cdot \frac{mg}{P_0 S} = 54^\circ\text{C}.$$

Таким образом, из графиков (рис. 132) находим $t_1 \approx 37^\circ\text{C}$.

Примечание. Если не учитывать изменение давления воздуха, то есть вместо условия (183) считать, что $P'_0 = P_0$, то давление пара должно возрасти до значения $P'_1 = mg/S \approx 20$ кПа, откуда по графику находим $t_1 \approx 60^\circ\text{C}$, что существенно отличается от правильного ответа.

2. Из условия равновесия крышки следует, что давление газа под крышкой не может превышать

$$P_2 = P_0 + \frac{mg}{S} = 121 \text{ кПа.}$$

В процессе нагревания и кипения воды количество пара под крышкой будет расти. Когда давление газа под крышкой превысит величину P_2 , крышка приподнимется и излишек газа выйдет наружу. При этом каждый раз будет выходить смесь пара и воздуха. Однако количество воздуха под крышкой ограничено имевшимся там изначально, а количество пара пополняется за счёт кипения воды. Значит, после длительного кипения воды воздуха под крышкой практически не останется, а давление пара будет примерно P_2 . Из условия $P(t_2) = P_2$ по графику находим $t_2 \approx 105^\circ\text{C}$.

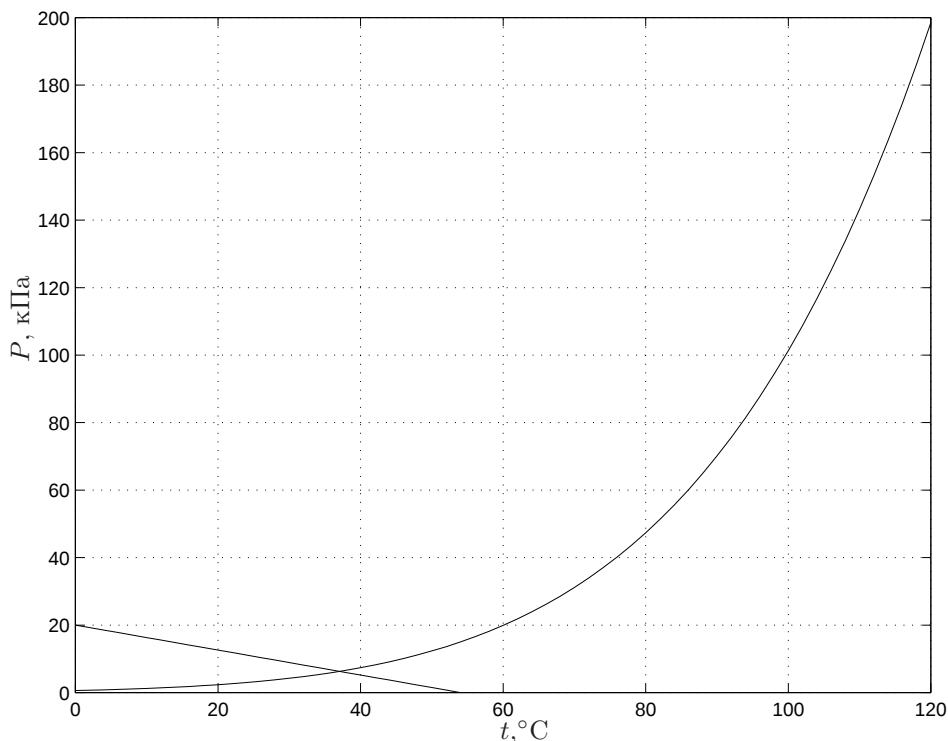


Рис. 132

3. Силы давления воздуха и пара действуют равномерно по всей площади крышки, поэтому можно считать, что они приложены к её центру масс (аналогично силе тяжести, действующей на однородную крышку). Центр масс однородного треугольника расположен в точке пересечения медиан, которая делит каждую из медиан в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Для открывания крышки эффективнее всего прикладывать вертикальную силу к одной из вершин треугольника, так как тогда плечо прикладываемой силы относительно оси, проходящей через две другие вершины, будет в 3 раза больше, чем плечи противодействующих сил. Пусть P_3 — давление пара, когда вода остыла до температуры t_3 , тогда из уравнения моментов получаем

$$3 \cdot F = mg + (P_0 - P_3)S,$$

откуда

$$P_3 = P_0 + \frac{mg - 3F}{S} \approx 31 \text{ кПа}.$$

Поскольку вода остывает медленно, пар является насыщенным. Из условия $P(t_3) = P_3$ по графику находим $t_3 \approx 70^\circ\text{C}$.

Примечание. Если не использовать свойства рычага, а прикладывать силу F к центру масс, то давление пара достаточно уменьшить до $P'_3 = P_0 + (mg - F)/S = 91 \text{ кПа}$, откуда по графику находим $t'_3 \approx 97^\circ\text{C}$, что существенно отличается от правильного ответа.

Примерная система оценивания

Численный ответ для $t_1 \approx 37^\circ\text{C}$ (в случае получения $t_1 \approx 60^\circ\text{C}$ из-за указанной в решении ошибки ставится 1 балл) 4

Численный ответ для $t_2 \approx 105^\circ\text{C}$ 2

Численный ответ для $t_3 \approx 70^\circ\text{C}$ (в случае получения $t_1 \approx 97^\circ\text{C}$ из-за указанной в решении ошибки ставится 1 балл) 4

Если использован правильный метод расчёта, но допущены неточности в работе с графиком, оценка снижается следующим образом (отдельно для каждого пункта): если ответ отличается от правильного на $(1,5-5,0)^\circ\text{C}$, то снимается 1 балл, а если ответ отличается от правильного на 5°C или более, то снимается 2 балла.

Задача 68. Бытовой холодильник (2008 год)

Все величины, относящиеся к установившемуся режиму до поворота ручки, будем отмечать индексом «1», а после поворота — индексом «2».

1. По закону теплопроводности можно записать мощности теплопередачи от окружающей среды к камере в виде

$$N_1 = k(T_0 - T_1), \quad N_2 = k(T_0 - T_2),$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий только от свойств стенок и размеров камеры. Находим искомое отношение:

$$n = \frac{N_2}{N_1} = \frac{T_0 - T_2}{T_0 - T_1} = 1,250.$$

2. Холодильный коэффициент идеального холодильника, работающего по циклу Карно, определяется по формуле $\mu = T_X / (T_O - T_X)$, где T_X и T_O — температуры охлаждаемого тела и окружающей среды соответственно.

Пусть P — мощность, потребляемая холодильной установкой от электрической сети, η — отношение холодильных коэффициентов бытового и идеального холодильников, тогда мощности теплопередачи от камеры к холодильной установке можно записать в виде

$$P_1 = \eta \cdot \frac{T_1}{T_0 - T_1} \cdot P, \quad P_2 = \eta \cdot \frac{T_2}{T_0 - T_2} \cdot P.$$

Находим искомое отношение:

$$p = \frac{P_2}{P_1} = \frac{T_0 - T_1}{T_0 - T_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} \approx 0,785.$$

3. Пусть t_1 и t_2 — времена непрерывной работы холодильной установки, τ_1 и τ_2 — времена между двумя её последовательными включениями или выключениями (длительности полных периодов работы), тогда усреднённые за периоды τ_1 и τ_2 уравнения теплового баланса примут вид

$$P_1 t_1 = N_1 \tau_1, \quad P_2 t_2 = N_2 \tau_2,$$

откуда получаем доли времён, в течение которых работает холодильная установка:

$$\alpha_1 = \frac{t_1}{\tau_1} = \frac{N_1}{P_1} = \frac{k(T_0 - T_1)^2}{\eta P T_1}, \quad \alpha_2 = \frac{t_2}{\tau_2} = \frac{N_2}{P_2} = \frac{k(T_0 - T_2)^2}{\eta P T_2}.$$

Находим искомое отношение:

$$\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{(T_0 - T_2)^2}{(T_0 - T_1)^2} \cdot \frac{T_1}{T_2} \approx 1,591.$$

4. Когда холодильная установка работает непрерывно, мощности теплопередачи от окружающей среды к камере и от камеры к холодильной установке одинаковы:

$$k(T_0 - T_3) = \eta \cdot \frac{T_3}{T_0 - T_3} \cdot P,$$

откуда

$$\frac{\eta P}{k} = \frac{(T_0 - T_3)^2}{T_3}.$$

Поскольку общая теплоёмкость камеры и допустимые устройством отклонения от требуемой температуры не изменяются, за время непрерывной работы холодильной установки от камеры отводится одно и то же суммарное количество теплоты Q :

$$Q = (P_1 - N_1)t_1, \quad Q = (P_2 - N_2)t_2,$$

откуда находим искомое отношение:

$$\beta = \frac{t_2}{t_1} = \frac{P_1 - N_1}{P_2 - N_2} = \frac{\frac{\eta P T_1}{T_0 - T_1} - k(T_0 - T_1)}{\frac{\eta P T_2}{T_0 - T_2} - k(T_0 - T_2)} =$$

$$= \frac{(T_1(T_0 - T_3)^2 - T_3(T_0 - T_1)^2)(T_0 - T_2)}{(T_2(T_0 - T_3)^2 - T_3(T_0 - T_2)^2)(T_0 - T_1)} \approx 1,730.$$

Примерная система оценивания

Общий и численный ответы для n	1
Общий и численный ответы для p	1
Ответ для α в общем виде.....	2
Численный ответ для α	1
Ответ для β в общем виде.....	4
Численный ответ для β	1

Задача 69. «Кругловатый» цикл (2009 год)

На участке 1–2 (рис. 133) газ получал теплоту от нагревателя (обозначим её количество через Q_+), а на участке 2–1 газ отдавал теплоту холодильнику.

Найдём изменение внутренней энергии газа:

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}(2P \cdot 2V - PV) = \frac{9}{2}PV.$$

Работа газа на каждом из участков может быть найдена как площадь под графиком $P(V)$ в выбранном масштабе:

$$A_{12} = PV \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) > 0,$$

$$A_{21} = -PV \left(2 - \frac{\pi}{4}\right) < 0.$$

Найдём работу газа за цикл:

$$A = A_{12} + A_{21} = \frac{\pi - 2}{2}PV.$$

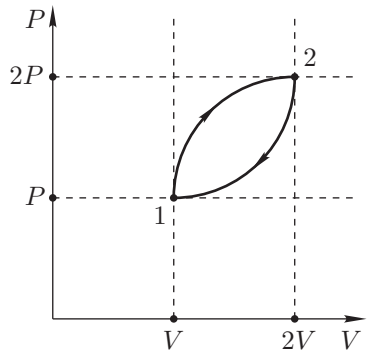


Рис. 133

По первому началу термодинамики

$$Q_+ = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{22 + \pi}{4}PV.$$

Найдём КПД цикла:

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{2\pi - 4}{22 + \pi} \approx 9,1\%.$$

Примерная система оценивания

Выражение для U_{12}	2
Выражение для A_{12}	2
Выражение для A_{21}	2
Выражение для A	1
Выражение для Q_+	1
Ответ	2

Задача 70. Относительное равновесие (2009 год)

1. Из уравнения Менделеева–Клапейрона для смеси газов найдём

$$P = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{V_1 + V_2} = 2,09 \text{ атм.}$$

2. Из определения относительной влажности и уравнения Менделеева–Клапейрона для пара найдём

$$\varphi = \frac{P_{\text{п}}}{P_0} = \frac{\varphi_1 P_0 V_1 + P_2 V_2}{P_0 (V_1 + V_2)} = 89\%,$$

где $P_0 = 1 \text{ атм}$ — давление насыщенного пара при температуре $T = 100^\circ\text{C}$.

3. Сразу после открытия вентиля произойдёт быстрое макроскопическое перемещение газа из первого сосуда во второй. При этом пар во втором сосуде станет насыщенным задолго до установления одинакового давления. Проверим это непосредственным расчётом.

Чтобы пар во втором сосуде стал насыщенным, его давление должно увеличиться на $1,00 \text{ атм} - 0,85 \text{ атм} = 0,15 \text{ атм}$. При этом давление воздуха во втором сосуде возрастет в $(2,40 \text{ атм} - 90\% \cdot 1,00 \text{ атм}) : (90\% \cdot 1,00 \text{ атм}) = 5/3$ раза сильнее (пропорционально отношению парциальных давлений воздуха и пара в первом сосуде) и станет равно $0 \text{ атм} + 5/3 \cdot 0,15 \text{ атм} = 0,25 \text{ атм}$. Таким образом, общее давление во втором сосуде увеличится на $0,15 \text{ атм} + 0,25 \text{ атм} = 0,40 \text{ атм}$ и станет равно $0,85 \text{ атм} + 0,40 \text{ атм} = 1,25 \text{ атм}$. Объём первого сосуда в $V_1/V_2 = 4$ раза больше, значит, давление в нём изменится в 4 раза слабее и станет равно $2,40 \text{ атм} - 0,40 \text{ атм}/4 = 2,30 \text{ атм}$.

Поскольку пар во втором сосуде стал насыщенным, его давление перестанет возрастать, а поступающий пар будет сразу же конденсироваться. Тогда давление газа во втором сосуде будет увеличиваться только за счёт поступающего воздуха, давление которого составляет $5/8$ от общего давления в первом сосуде. Следовательно, отношение изменений давлений в первом и втором сосудах станет $1 : (4 \cdot 5/8) = 2 : 5$ вместо $1 : 4$. Деля разность давлений $2,30 \text{ атм} - 1,25 \text{ атм} = 1,05 \text{ атм}$ в пропорции $2 : 5$, находим равновесное давление $2,00 \text{ атм}$. После этого начнётся постепенный рост давления и влажности за счёт испарения образовавшейся воды. Таким образом, найденное равновесное давление и является минимальным: $P_{\text{min}} = 2,00 \text{ атм}$.

4. Поскольку относительные изменения парциальных давлений воздуха и пара в первом сосуде одинаковы, минимальная влажность достигается одновременно с минимальным давлением и равна $\varphi_{\min} = \varphi_1 \cdot P_{\min}/P_1 = 75\%$.

Примерная система оценивания

Ответ для P в общем виде.....	1
Численный ответ для P	1
Ответ для φ в общем виде.....	1
Численный ответ для φ	1
Численный ответ для $P_{\min}$	3
Численный ответ для $\varphi_{\min}$	3

Задача 71. Холодильник-кондиционер (2010 год)

Запишем уравнения теплового баланса:

1) для комнаты с холодильником —

$$P = \alpha(T_1 - T_0), \quad (185)$$

2) для камеры холодильника —

$$P \cdot \eta_1 = \beta(T_1 - T_x), \quad (186)$$

3) для комнаты с кондиционером —

$$P \cdot \eta_2 = (\alpha + \beta)(T_0 - T_2), \quad (187)$$

где P — мощность холодильника, α и β — коэффициенты, характеризующие соответственно теплопроводность стен и окон комнаты и стенок холодильника, $\eta_1 = T_x/(T_1 - T_x)$ и $\eta_2 = T_2/(T_0 - T_2)$ — холодильные коэффициенты (численные значения температур перед постановкой обязательно должны быть переведены в кельвины). Подставив формулу для η_1 , из соотношений (185) и (186) выразим

$$\alpha = \frac{P}{T_1 - T_0}, \quad \beta = \frac{PT_x}{(T_1 - T_x)^2}.$$

Теперь, подставив η_2 , α и β в формулу (187) и сократив на P , получим

$$\frac{T_2}{T_0 - T_2} = \left(\frac{1}{T_1 - T_0} + \frac{T_x}{(T_1 - T_x)^2} \right) (T_0 - T_2),$$

или, после упрощения,

$$\gamma T_2 = (T_2 - T_0)^2, \quad (188)$$

где для краткости записи введено обозначение

$$\gamma = \frac{1}{\frac{1}{T_1 - T_0} + \frac{T_x}{(T_1 - T_x)^2}} \approx 0,374 \text{ К.}$$

Приведа уравнение (188) к каноническому виду

$$T_2^2 - (2T_0 + \gamma)T_2 + T_0^2 = 0$$

и решив его, получим

$$T_2 = \frac{2T_0 + \gamma \pm \sqrt{\gamma(4T_0 + \gamma)}}{2}.$$

Выбирая корень $T_2 < T_0$, окончательно находим

$$T_2 = T_0 - \frac{\sqrt{\gamma(4T_0 + \gamma)} - \gamma}{2} \approx 19,5^\circ\text{C}.$$

Примерная система оценивания

Уравнение теплового баланса для комнаты с холодильником	1
Уравнение теплового баланса для камеры холодильника	2
Уравнение теплового баланса для комнаты с кондиционером	3
Ответ в общем виде	2
Численный ответ	2

Задача 72. Водоём зимой (2011 год)

В искомый момент времени t система будет находиться в следующем состоянии (рис. 134). На дне окажется вода, охлаждённая до температуры $T_{\max}$, при которой вода имеет максимальную плотность. Требуемый по условию слой снега толщиной h над водой будет опираться на подводный слой снега толщиной $h_{12} = h_1 + h_2$, причём слой воды глубиной h_1 — это растаявший снег, а слой воды глубиной h_2 — это исходная вода, охлаждённая до равновесной со снегом температуры T_2 .

Из закона Архимеда для плавающего

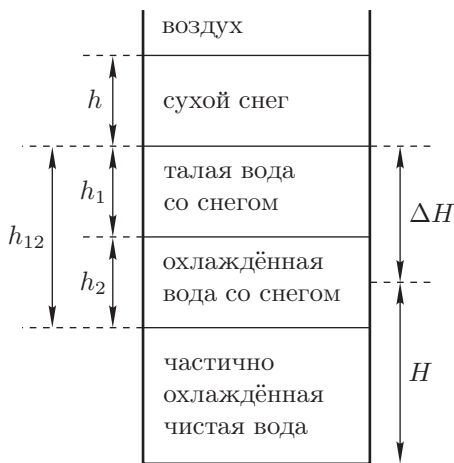


Рис. 134

$$\rho_s(h_{12} + h) = \rho_w h_{12},$$

откуда

$$h_{12} = \frac{\rho_s h}{\rho_w - \rho_s}.$$

Время выпадения и масса нарастающего снега соответственно равны

$$t_1 = \frac{h_{12} + h}{v} = \frac{\rho_w h}{(\rho_w - \rho_s)v} = 5 \text{ ч} \quad \text{и} \quad m_1 = \mu S t_1 = \frac{\mu S \rho_w h}{(\rho_w - \rho_s)v},$$

где S — площадь водоёма.

Часть объёма слоя смеси воды и снега занимает снег, поэтому парциальная плотность воды (отношение массы воды к объёму смеси) составляет

$$\rho'_w = \frac{\rho_w S h_{12} - m_1}{S h_{12}} = \rho_w \left(1 - \frac{\mu}{\rho_s v} \right).$$

Пусть t_2 — время таяния льда и охлаждения воды в процессе установления теплового равновесия, тогда для массы талой воды в слое смеси можно записать уравнение

$$\rho'_w S h_1 = \mu S t_2,$$

откуда

$$h_1 = \frac{\mu t_2}{\rho'_w}, \quad h_2 = h_{12} - h_1 = \frac{\rho_s h}{\rho_w - \rho_s} - \frac{\mu t_2}{\rho'_w}.$$

Уравнение теплового баланса имеет вид

$$\lambda \mu S t_2 = c \rho_w S H (T_1 - T_{\max}) + c \rho'_w S h_2 (T_{\max} - T_2),$$

или, после сокращения на S и подстановки h_2 и ρ'_w ,

$$\lambda \mu t_2 = c \rho_w H (T_1 - T_{\max}) + c \left(\frac{\rho_w (\rho_s v - \mu)}{\rho_s v} \cdot \frac{\rho_s h}{\rho_w - \rho_s} - \mu t_2 \right) (T_{\max} - T_2),$$

откуда

$$t_2 = \frac{c \rho_w H (T_1 - T_{\max}) (\rho_w - \rho_s) v + c \rho_w (\rho_s v - \mu) h (T_{\max} - T_2)}{\mu (\lambda + c (T_{\max} - T_2)) (\rho_w - \rho_s) v} = 5,5 \text{ ч.}$$

На самом деле процессы таяния и накопления снега идут одновременно, но можно считать их поочерёдными, поэтому искомое время

$$t = t_1 + t_2 = 10,5 \text{ ч,}$$

а повышение уровня воды

$$\Delta H = \frac{\mu S t}{\rho_w S} = \frac{\mu t}{\rho_w} = 0,105 \text{ м.}$$

Примерная система оценивания

Применение закона Архимеда для накопленного снега	1
Ответ для t_1 в общем виде	1
Численный ответ для t_1	1
Расчёт парциальной плотности воды в смеси	1
Выражение для h_2	1
Запись уравнения теплового баланса	1
Учёт охлаждения двух слоёв воды до разных температур	1

Ответ для t_1 в общем виде.....	1
Численный ответ для t_1	1
Численный ответ для ΔH	1

Задача 73. Абстрактный процесс (2011 год)

Графиком уравнения рассматриваемого процесса на PV -диаграмме является ромб, целиком расположенный в первой четверти (рис. 135). Поскольку газ побывал ровно по одному разу во всех допустимых состояниях, он совершил циклический процесс. Можно считать цикл замкнутым, хотя конечное состояние не совпадает с начальным, а лишь бесконечно близко к нему.

1. Работа газа за цикл равна площади, ограниченной циклом на PV -диаграмме:

$$A = 2\Delta P\Delta V.$$

2. Поскольку температура, давление и объём газа в начальном и конечном состояниях одинаковы, согласно уравнению Менделеева–Клапейрона $PV = \nu RT$ одинаковы и количества газа, откуда $\alpha = 1$.

3. При выпуске части смеси из сосуда доли газов не изменяются, поэтому можно не рассматривать выпуск газа, а учитывать только добавление другого газа, тогда $\beta = \nu_{\min}/\nu_{\max}$, где $\nu_{\min}$ и $\nu_{\max}$ — минимальное и максимальное количество газа в ходе процесса. Можно убедиться, что β не зависит от выбора начального состояния и направления обхода цикла.

Поскольку множество состояний с одинаковыми температурами и количествами газа образуют гиперболу, $\nu_{\min}$ достигается в одной из точек 1 или 4, а $\nu_{\max}$ — где-то на отрезке 2–3. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона

$$\nu_1 RT = P_0(V_0 - \Delta V), \quad \nu_2 RT = (P_0 - \Delta P)V_0.$$

Сравнивая полученные выражения, находим

$$\nu_{\min} = \frac{1}{RT} \cdot \begin{cases} P_0(V_0 - \Delta V), & \text{если } \frac{P_0}{\Delta P} \geq \frac{V_0}{\Delta V}; \\ (P_0 - \Delta P)V_0, & \text{если } \frac{P_0}{\Delta P} \leq \frac{V_0}{\Delta V}. \end{cases}$$

Для нахождения $\nu_{\max}$ запишем зависимость $P(V)$ для участка 2–3:

$$P = (P_0 + \Delta P) - \frac{\Delta P}{\Delta V}(V - V_0) = \frac{P_0\Delta V + \Delta P\Delta V + V_0\Delta P}{\Delta V} - \frac{\Delta P}{\Delta V}V,$$

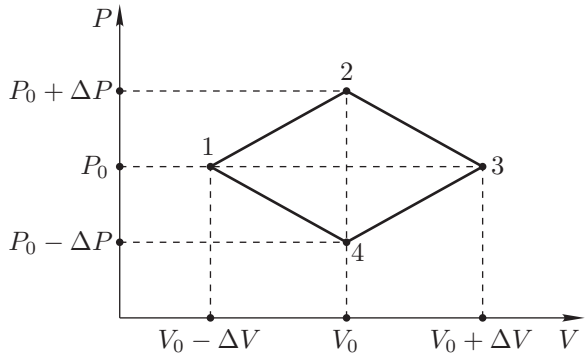


Рис. 135

подставим её в уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$\nu RT = \frac{P_0 \Delta V + \Delta P \Delta V + V_0 \Delta P}{\Delta V} V - \frac{\Delta P}{\Delta V} V^2,$$

продифференцируем по V и приравняем к нулю:

$$P_0 + \Delta P + \frac{\Delta P}{\Delta V} V_0 - 2 \frac{\Delta P}{\Delta V} V = 0,$$

откуда

$$V = \frac{P_0 \Delta V + \Delta P \Delta V + V_0 \Delta P}{2 \Delta P}.$$

Если точка с таким объёмом лежит на отрезке 2–3, то есть если

$$V_0 \leq \frac{P_0 \Delta V + \Delta P \Delta V + V_0 \Delta P}{2 \Delta P} \leq V_0 + \Delta V,$$

или, после упрощения,

$$\frac{V_0}{\Delta V} - 1 \leq \frac{P_0}{\Delta P} \leq \frac{V_0}{\Delta V} + 1,$$

то в этой точке достигается

$$\nu_{\max} = \frac{(P_0 \Delta V + \Delta P \Delta V + V_0 \Delta P)^2}{4 \Delta P \Delta V}.$$

Если же она лежит вне отрезка 2–3, то $\nu_{\max}$ достигается в одном из концов отрезка (наиболее близком к рассматриваемой точке). Таким образом, находим максимальное количество газа:

$$\nu_{\max} = \frac{1}{RT} \cdot \begin{cases} (P_0 + \Delta P) V_0, & \text{если } \frac{P_0}{\Delta P} \leq \frac{V_0}{\Delta V} - 1; \\ \frac{(P_0 \Delta V + \Delta P \Delta V + V_0 \Delta P)^2}{4 \Delta P \Delta V}, & \text{если } \frac{V_0}{\Delta V} - 1 \leq \frac{P_0}{\Delta P} \leq \frac{V_0}{\Delta V} + 1; \\ P_0 (V_0 + \Delta V), & \text{если } \frac{P_0}{\Delta P} \geq \frac{V_0}{\Delta V} + 1. \end{cases}$$

Окончательный ответ имеет вид

$$\beta = \begin{cases} P_0(V_0 - \Delta V), & \text{если } \frac{P_0}{\Delta P} \geq \frac{V_0}{\Delta V}; \\ (P_0 - \Delta P)V_0, & \text{если } \frac{P_0}{\Delta P} \leq \frac{V_0}{\Delta V}; \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (P_0 + \Delta P)V_0, & \text{если } \frac{P_0}{\Delta P} \leq \frac{V_0}{\Delta V} - 1; \\ \frac{(P_0\Delta V + \Delta P\Delta V + V_0\Delta P)^2}{4\Delta P\Delta V}, & \text{если } \frac{V_0}{\Delta V} - 1 \leq \frac{P_0}{\Delta P} \leq \frac{V_0}{\Delta V} + 1; \\ P_0(V_0 + \Delta V), & \text{если } \frac{P_0}{\Delta P} \geq \frac{V_0}{\Delta V} + 1; \end{array} \right.$$

Примерная система оценивания

График цикла на PV -диаграмме	1
Ответ для A	1
Ответ для α	1
Связь $\beta = \nu_{\min}/\nu_{\max}$	1
Выражение для $\nu_{\min}$ (по баллу за каждый случай)	2
Выражение для $\nu_{\max}$ (по баллу за каждый случай)	3
Ответ для β	1

Задача 74. Авторская методика заварки чая (2012 год)

Из величины объёма кастрюли $V = (\pi d^2/4)h = 5401$ мл следует, что всего было налито $n = V/\Delta V = 54$ порции воды, а последний 1 мл остался для чая. Найдём среднюю температуру налитой воды:

$$t_{\text{cp}} = \frac{t_1 + t_n}{2} = 27^\circ\text{C}.$$

Поскольку теплоёмкость кастрюли мала по сравнению с теплоёмкостью всей налитой воды, конечная температура t должна быть близка к t_{cp} , однако рассчитаем её «точно». Согласно уравнению теплового баланса

$$Ct_0 + c \cdot n\rho\Delta V \cdot t_{\text{cp}} = Q = Ct + c \cdot n\rho\Delta V \cdot t,$$

откуда

$$t = \frac{Ct_0 + cn\rho\Delta V t_{\text{cp}}}{C + cn\rho\Delta V} = 26,85^\circ\text{C} \approx 27^\circ\text{C}.$$

Поскольку $0^\circ\text{C} = 273,15\text{ K}$, искомая температура $t = 300,00\text{ K}$, и тогда становится ясно, почему нашему персонажу нравится именно такая температура чая, — он просто любит «круглые» числа. ☺

Примерная система оценивания

Определение V	1
Определение n	1
Определение $t_{\text{ср}}$	2
Уравнение теплового баланса	2
Численный ответ	4

Задача 75. Тонущий стакан (2012 год)

1. В силу закона Архимеда разность уровней воды в стакане и в сосуде при погружении стакана будет постоянна и равна H . Стакан утонет, когда в нём накопится вода массой $m = \rho_w \pi r^2 h$ (рис. 136).

2. Когда жидкость находится в термодинамическом равновесии со своим паром, поток молекул, вылетающих из жидкости, равен потоку молекул пара, «прилипающих» к поверхности жидкости:

$$\Phi = \alpha \cdot \frac{1}{4} n v,$$

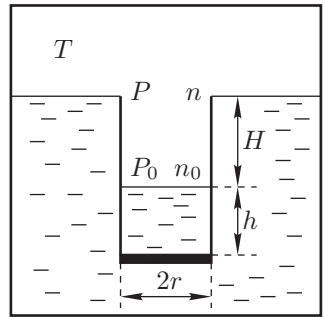


Рис. 136

где n — концентрация, v — средняя скорость молекул пара. После подстановки

$$n = \frac{P}{kT} \quad \text{и} \quad v = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$$

получаем

$$\Phi = \frac{\alpha P}{k} \sqrt{\frac{R}{2\pi\mu T}}.$$

Здесь приведена точная формула для Φ , однако следует считать правильными ответы с немного отличающимися числовыми коэффициентами, которые могут возникнуть, например, из-за подстановки среднеквадратичной скорости $v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{3RT/\mu}$ в качестве v или из-за использования «школьной» формулы для потока, содержащей коэффициент $1/6$ вместо $1/4$.

3. Давление газа монотонно зависит от высоты, поэтому пар может быть насыщенным лишь на некоторой одной высоте. Поскольку по условию сосуд большой по сравнению со стаканом, насыщенным пар будет именно на уровне поверхности воды в сосуде, а не на уровне поверхности воды в стакане. Пусть P_0 и n_0 — соответственно давление и концентрация пара на уровне поверхности

воды в стакане, тогда из уравнения Менделеева–Клапейрона находим среднюю плотность пара в погружённой части стакана:

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu P}{RT} + \frac{\mu P_0}{RT} \right) \approx \frac{\mu P}{RT},$$

где подставлено $P_0 \approx P$, так как в данном случае учёт разницы давлений проявился бы в дальнейшем лишь как поправка второго порядка малости. Теперь найдём добавочное гидростатическое давление столба пара в стакане:

$$\Delta P = P_0 - P = \rho g H = \frac{\mu P g H}{RT}$$

и искомую разность концентраций:

$$\Delta n = n_0 - n = \frac{P_0}{kT} - \frac{P}{kT} = \frac{\Delta P}{kT} = \frac{\mu P g H}{kRT^2}.$$

4. Стакан утонет из-за постепенного накопления в нём воды, возникшей в результате конденсации пара. При этом пар будет конденсироваться на внутренней поверхности погружённой части стакана, так как в этой области давление пара будет превышать давление насыщенного пара при данной температуре на величину гидростатического давления столба пара.

Далее приведён расчёт в предположении, что внутренние стенки стакана до уровня поверхности воды в сосуде влажные, то есть покрыты тонким слоем воды, однако можно считать верными решения участников с использованием модели сухих стенок. Общее количество молекул, вылетающих с полной поверхности воды площадью S за время t :

$$Z_1 = \Phi \cdot S \cdot t = \frac{\alpha}{4} n v \cdot (\pi r^2 + 2\pi r H) \cdot t.$$

Поток молекул, «прилипающих» к воде за то же время, определяется концентрацией пара на соответствующем уровне:

$$Z_2 = \frac{\alpha}{4} n_0 v \cdot \pi r^2 \cdot t + \frac{\alpha}{4} n_{\text{ср}} v \cdot 2\pi r H \cdot t,$$

где $n_{\text{ср}} = (n + n_0)/2 = n + \Delta n/2$ — средняя концентрация пара в погружённой части стакана. В отличие от рассуждений при расчёте ρ , здесь нельзя полагать $n_{\text{ср}} \approx n$, так как далее основную роль играет именно разность этих величин. Найдём превышение числа «прилипающих» молекул над числом вылетающих:

$$\Delta Z = Z_2 - Z_1 = \frac{\alpha}{4} \Delta n v \cdot \pi r^2 t + \frac{\alpha}{4} \frac{\Delta n}{2} v \cdot 2\pi r H t = \frac{\pi}{4} \alpha \Delta n v r (r + H) t.$$

Стакан утонет, когда общая масса накопившихся в нём молекул воды станет равна m , то есть при выполнении условия

$$\Delta Z \cdot \frac{\mu}{N_A} = m,$$

где μ/N_A — масса одной молекулы. Подставим сюда выражения для ΔZ и m :

$$\frac{\pi}{4}\alpha\Delta nvr(r+H)t\cdot\frac{\mu}{N_A}=\rho_w\pi r^2h.$$

Далее подставим выражения для Δn и v :

$$\frac{\pi}{4}\alpha\cdot\frac{\mu PgH}{kRT^2}\cdot\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\cdot r(r+H)t\cdot\frac{\mu}{N_A}=\rho_w\pi r^2h.$$

Используя соотношение $kN_A=R$, окончательно получаем

$$t=\frac{\sqrt{2\pi}\rho_w}{\alpha Pg}\cdot\left(\frac{RT}{\mu}\right)^{3/2}\cdot\frac{r}{r+H}\cdot\frac{h}{H}.$$

Аналогично второму пункту оценочные ответы, отличающиеся только числовыми коэффициентами, следует считать правильными.

Примерная система оценивания

Ответ для m	1
Ответ для Φ	2
Ответ для Δn	3
Ответ для t	4

Решения задач. Электричество

Задача 76. Резистор или диод (1995 год)

Поочерёдно рассмотрим каждое из трёх подключений и в каждом случае найдём силу тока I с помощью закона Ома и формул для сопротивлений последовательно и параллельно соединённых резисторов.

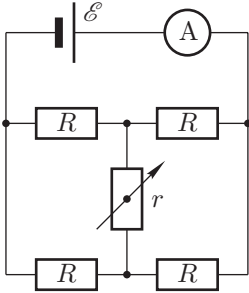


Рис. 137

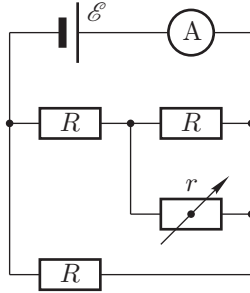


Рис. 138

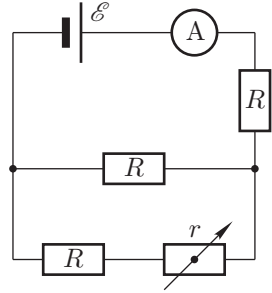


Рис. 139

1. Если к клеммам B и C подключить резистор сопротивлением R , то схема станет симметричной (рис. 137), а напряжение на переменном резисторе и сила тока через него будут равны нулю. Значит, при любом r искомая сила тока составляет

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R} = \text{const.}$$

2. Если к клеммам B и C подключить диод с направлением пропускания $B \rightarrow C$, то его можно заменить на проводник. Пользуясь эквивалентной схемой (рис. 138), находим силу тока в этом случае:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{2R + 3r}{R + 2r}.$$

3. Если к клеммам B и C подключить диод с направлением пропускания $C \rightarrow B$, то его можно заменить на разрыв цепи. Пользуясь эквивалентной схемой (рис. 139), находим силу тока в этом случае:

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{2R + r}{3R + 2r}.$$

На рис. 140 представлены качественные графики полученных зависимостей.

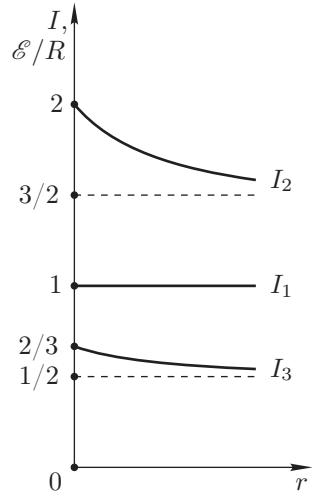


Рис. 140

Примерная система оценивания

Формула для I_1 2

Формула для I_2	2
Формула для I_3	2
График зависимости $I_1(r)$	1
График зависимости $I_2(r)$	1
График зависимости $I_3(r)$	1
Бонусный балл за «красивые» графики	1

Задача 77. Два кольца (1995 год)

Сначала выведем формулу для потенциала электростатического поля, создаваемого заряженным кольцом. Для этого рассмотрим тонкое кольцо радиусом R с зарядом Q и точку P на оси кольца на расстоянии x от его центра O (рис. 141). Мысленно разобьём кольцо на множество точечных зарядов: $Q = Q_1 + \dots + Q_n$. Согласно теореме Пифагора каждый такой заряд находится на расстоянии $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ от точки P . С помощью формулы для потенциала точечного заряда и принципа суперпозиции выразим потенциал φ , создаваемый всем кольцом в точке P :

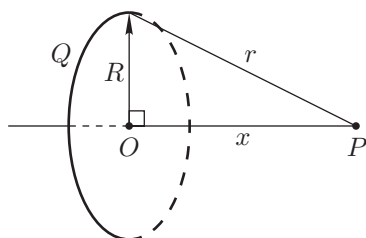


Рис. 141

$$\varphi = \frac{kQ_1}{r} + \dots + \frac{kQ_n}{r} = \frac{kQ}{r} = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + x^2}}. \quad (189)$$

Отметим, что в силу общности вывода полученная формула справедлива для любого распределения заряда по кольцу.

Искомая работа находится по формуле $A = qU$, где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ — напряжение, или разность потенциалов φ_1 и φ_2 между центрами колец. С помощью формулы (189) и принципа суперпозиции находим

$$\varphi_1 = \frac{kq_1}{\sqrt{R^2 + 0^2}} + \frac{kq_2}{\sqrt{R^2 + d^2}} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \frac{kq_1}{\sqrt{R^2 + d^2}} + \frac{kq_2}{\sqrt{R^2 + 0^2}}.$$

После подстановки φ_1 и φ_2 окончательно получим

$$A = kq(q_1 - q_2) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}} \right) \approx -73,1 \text{ мкДж.}$$

Примерная система оценивания

Формула для потенциала точечного заряда	2
Принцип суперпозиции потенциалов	2
Формула для работы электростатических сил	2
Ответ в общем виде	2
Численный ответ (модуль)	1
Численный ответ (знак)	1

Задача 78. Дуговой разряд (1998 год)

Заданная в условии вольт-амперная характеристика дуги представляет собой связь тока I и равновесного напряжения U_e дуги, то есть напряжения, при котором ток дуги стационарен, не меняется с течением времени:

$$U_e = A + \frac{B}{I}. \quad (190)$$

Если при данном токе I напряжение на дуге окажется меньше величины U_e , то ток будет уменьшаться со временем и дуга может погаснуть.

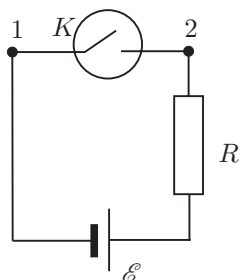


Рис. 142

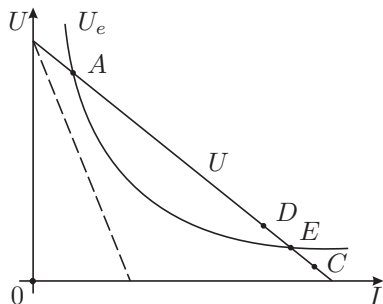


Рис. 143

При слишком большом напряжении ток будет расти, что может привести к пробое. По закону Ома для участка цепи 1– $\mathcal{E}$ –2 (рис. 142), по которому течёт тот же ток I , что и в дуге, $IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E} = \mathcal{E} - U$, где $U = \varphi_2 - \varphi_1$ — напряжение, подаваемое на дугу. Отсюда

$$U = \mathcal{E} - IR. \quad (191)$$

Изобразим графически функции $U_e(I)$ и $U(I)$ (рис. 143). В точках A и E пересечения графиков подаваемое на дугу напряжение соответствует равновесному значению. Если графики не пересекаются (пунктирная прямая), то стационарного тока в дуге быть не может. Для нахождения координат точек A и E следует приравнять правые части выражений (190) и (191). Полученное квадратное уравнение

$$I^2 R + (A - \mathcal{E})I + B = 0 \quad (192)$$

имеет действительные корни лишь при условии положительности дискриминанта, то есть при

$$(A - \mathcal{E})^2 - 4RB \geq 0, \quad \text{или} \quad R \leq \frac{(A - \mathcal{E})^2}{4B} = 20,25 \text{ Ом.}$$

Только при таких сопротивлениях R и возможно устойчивое горение дуги. Найден ответ на первый вопрос задачи.

Для ответа на второй вопрос следует вычислить корни уравнения (192):

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} - A - \sqrt{(A - \mathcal{E})^2 - 4RB}}{2R} = 1,2 \text{ А},$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E} - A + \sqrt{(A - \mathcal{E})^2 - 4RB}}{2R} = 10 \text{ А}.$$

Первый корень соответствует точке A (рис. 143), второй — точке E . Проанализируем устойчивость горения дуги при параметрах цепи, соответствующих этим точкам.

Рассмотрим точку E . Если ток дуги случайно увеличится, то состояние цепи будет соответствовать точке C . Напряжение, подаваемое на дугу, окажется меньше равновесного для дуги значения, ток начнёт уменьшаться, и состояние E восстановится. При случайном уменьшении тока дуги (переход от точки E к точке D) напряжение превысит равновесное значение, что приведёт к увеличению тока и восстановлению равновесия. Аналогичный анализ для точки A приводит к заключению, что она соответствует неустойчивому горению. Итак, при заданном R в цепи установится ток $I = 10 \text{ А}$.

Задача 79. Заряженное кольцо (2001 год)

Из соображений симметрии следует, что искомая сила направлена перпендикулярно плоскости диска. Поэтому для её нахождения следует сложить лишь те составляющие сил, приложенных к каждому элементу диска, которые направлены перпендикулярно плоскости диска:

$$F = \sigma \sum E_i \Delta S_i = \sigma \Phi, \quad (193)$$

где σ — поверхностная плотность зарядов диска, ΔS_i — площадь элементарного участка диска, E_i — модуль составляющей напряжённости поля на этом участке, которая перпендикулярна диску, Φ — поток напряжённости электрического поля через диск².

Из теоремы Гаусса следует, что поток поля остаётся постоянным внутри выделенной в пространстве трубки, образующими которой являются силовые

²Имеется в виду поток той составляющей электрического поля, которая создана зарядами, расположенными на проволочном кольце.

Диск при вычислении потока рассматривается в этой ситуации исключительно как геометрический объект (не содержащий каких-либо зарядов).

Мы не рассматриваем тонкостей определения и вычисления потока электростатического поля через заряженную поверхность, которых в этой ситуации много. Например, казалось бы, заряд на плоскости не может повлиять на поток в месте своего расположения (так как из него выходит «поровну» силовых линий как по одну, так и по другую сторону плоскости диска). Но эти силовые линии затем могут «развернуться» и пересечь диск в другом месте, создав там дополнительный поток. Однако все подобные эффекты соответствуют только внутренним силам взаимодействия между частями диска и не влияют на силу взаимодействия диска с кольцом.

линии. В самом деле, в объёме такой трубки, ограниченной двумя сечениями, нет электрических зарядов, и, в соответствии с теоремой Гаусса, поток через границу этого объёма равен нулю. Поток через боковую поверхность трубки равен нулю по определению силовых линий. Следовательно, потоки через сечения трубки равны по модулю.

Применим свойство постоянства потока к данной задаче. С этой целью найдём поток Φ , создаваемый зарядами кольца внутри трубки, ограниченной силовыми линиями, которые проходят через кольцо и край диска. Поток, создаваемый всем кольцом, в соответствии с принципом суперпозиции складывается из потоков, создаваемых элементами кольца. Электрическое поле элемента кольца в непосредственной близости от него почти не отличается от поля равномерно заряженной прямолинейной нити (рис. 144). Силовые линии этого поля изображены на рис. 144. Так как $\alpha = 45^\circ$, через диск проходят лишь те силовые линии, которые выходят из кольца под углом β ,

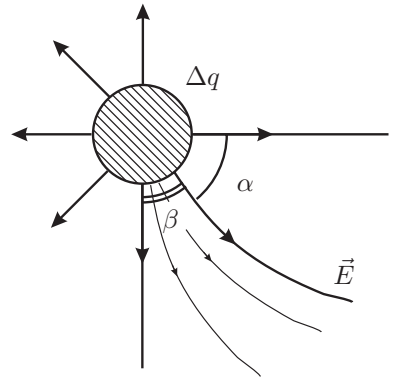


Рис. 144

$$0^\circ \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} - \alpha = 45^\circ.$$

Вследствие симметрии поля вокруг прямолинейной заряженной нити этим углам β соответствует лишь $1/8$ полного потока поля нити, равного

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta q}{\varepsilon_0},$$

где Δq — заряд элемента нити, а ε_0 — электрическая постоянная. В результате

$$\Phi = \frac{q}{8\varepsilon_0},$$

и из формулы (193) получаем

$$F = \frac{\sigma q}{8\varepsilon_0} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Задача 80. Диоды (2002 год)

Отсутствие тока через амперметр (рис. 145) означает равенство напряжений на диодах D_1 и D_3 , а также на диодах D_2 и D_4 и равенство токов через D_1 и D_2 , а также через D_3 и D_4 . Поэтому можно записать

$$I_1(U_1) = I_2(U_2) \quad \text{и} \quad I_3(U_1) = I_4(U_2).$$

Соответствующие функциональные зависимости представлены графиками на рис. 146.

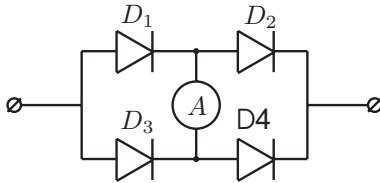


Рис. 145

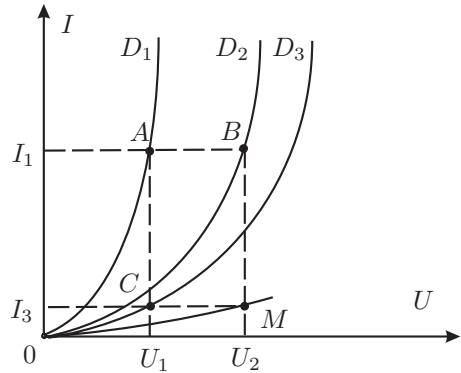


Рис. 146

Для нахождения какой-либо точки вольт-амперной характеристики диода D_4 нужно поступить следующим образом. Возьмём произвольное значение U_1 напряжения на диоде D_1 . Найдём точку A (рис. 146), определяющую ток I_1 , текущий через диод D_1 . Тот же ток течёт и через диод D_2 . Поэтому точка B определяет напряжение U_2 на нём. Такое же напряжение на диоде D_4 , а ток через него такой же, как и через диод D_3 . Этот ток I_3 соответствует точке C (рис. 146). Итак, найдены координаты U_2 и I_3 точки M искомого графика. Аналогично построенные другие его точки изображены на рис. 146.

Задача 81. ВАХ цепочек (2002 год)

На рис. 147 изображены первые звенья цепочки, о которой говорится в пункте 1, и указаны токи I_1 и I_2 , текущие через участки CA и DA .

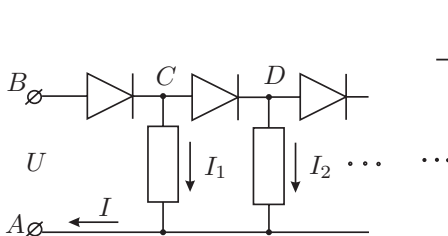


Рис. 147

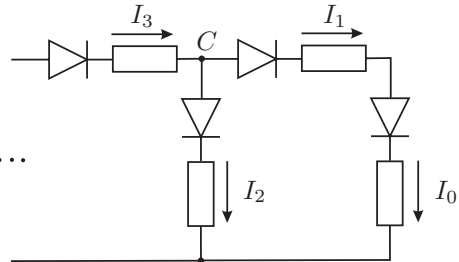


Рис. 148

При данной в задаче вольт-амперной характеристике идеального диода его сопротивление равно бесконечности, если подаваемое на него напряжение меньше ΔU , иначе напряжение на диоде при любом токе равно ΔU . Учитывая эту

особенность диода и применяя закон Ома, получим

$$I_1 = \frac{U - \Delta U}{R}, \quad I_2 = \frac{U - 2\Delta U}{R}.$$

Аналогичным образом можно выразить ток I_i , текущий через i -й резистор:

$$I_i = \frac{U - i\Delta U}{R},$$

если

$$i < N = U/\Delta U \gg 1. \quad (194)$$

Токи в остальных резисторах отсутствуют, так как напряжение на $(i - 1)$ -м резисторе оказывается меньше ΔU . Все токи I_i стекаются в узел A . Поэтому

$$I = \sum_{i=1}^N I_i = N \frac{U}{R} - \frac{\Delta U}{R} \sum_{i=1}^N i. \quad (195)$$

По формуле (194) имеем $N \gg 1$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^N i = \frac{N+1}{2} N \approx \frac{N^2}{2}.$$

Подставляя в формулу (195) найденное выражение суммы, а также соотношение (194), получим

$$I = \frac{U^2}{\Delta U R} - \frac{\Delta U}{2R} \left(\frac{U}{\Delta U} \right)^2 = \frac{U^2}{2\Delta U R},$$

то есть вольт-амперная характеристика имеет вид параболы.

Можно предложить и более короткий способ решения. Уменьшение на единицу числа звеньев бесконечной цепочки не изменяет её вольт-амперной характеристики. Другими словами, одна и та же функция связывает как ток I с напряжением между точками BA , так и ток на участке CD с напряжением между точками CA . Однако значения этих напряжений отличаются на ΔU , так что если напряжение между B и A равно U , то напряжение между C и A равно $U - \Delta U$. Соответственно отличаются значения функции $I(U)$:

$$I(U - \Delta U) = I(U) - \frac{dI}{dU} \Delta U, \quad (196)$$

если $\Delta U \ll U$. Ток $I(U)$ втекает в узел C , а $I(U - \Delta U)$ вытекает из него. Поэтому

$$I(U) = I(U - \Delta U) + \frac{U - \Delta U}{R}. \quad (197)$$

Из формул (196) и (197) следует, что

$$\frac{dI}{dU}\Delta U = \frac{U - \Delta U}{R} \approx \frac{U}{R},$$

откуда после интегрирования находим

$$I = \frac{U^2}{2\Delta U R},$$

поскольку при $U = 0$ ток I также равен нулю.

Во втором пункте рассматривается цепочка, последние звенья которой изображены на рис. 148.

Из рисунка видно, что $I_1 = I_0$. Ток I_2 находим из соотношения

$$I_2 R + \Delta U = I_1 R + 2\Delta U + I_0 R, \quad \text{или} \quad I_2 = \frac{\Delta U}{R} + I_1 + I_0 = 2I_0 + \frac{\Delta U}{R}. \quad (198)$$

Ток I_3 разветвляется в узле C . Поэтому $I_3 = I_2 + I_1$. Аналогичное соотношение справедливо для любого нечётного $k \geq 3$:

$$I_k = I_{k-1} + I_{k-2}. \quad (199)$$

Для любого чётного $k \geq 2$ выполняется соотношение, аналогичное (198):

$$I_k = I_{k-1} + I_{k-2} + \frac{\Delta U}{R}. \quad (200)$$

Второе равенство из (198) позволяет предположить, что для любых k токи можно представить в виде

$$I_k = c_k I_0 + b_k \frac{\Delta U}{R}, \quad (201)$$

подобрав a_k и b_k так, чтобы были обеспечены условия (199) и (200), а также $I_1 = I_0$. Нетрудно сообразить, что должны выполняться соотношения

$$c_0 = c_1 = 1; \quad c_k = c_{k-1} + c_{k-2} \quad \text{при} \quad k \geq 2;$$

$$b_0 = b_1 = 0; \quad b_k = b_{k-1} + b_{k-2} \quad \text{при нечётных} \quad k \geq 3,$$

$$b_k = b_{k-1} + b_{k-2} + 1 \quad \text{при чётных} \quad k \geq 2.$$

Именно такие соотношения определяют известную в математике последовательность чисел Фибоначчи a_k , так что $c_k = a_{k+1}$. Числа b_k тоже образуют последовательность Фибоначчи, только

$$b_k = a_k - 1 \quad \text{при нечётных} \quad k \geq 3,$$

$$b_k = a_k \quad \text{при чётных} \quad k \geq 2.$$

Искомый в задаче ток I соответствует току I_{2N-1} , втекающему в N -е звено. Используя заданную в условии формулу n -го члена последовательности Фибоначчи, получим ответ:

$$I = I_0 \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2N} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2N}}{\sqrt{5}} + \frac{\Delta U}{R} \cdot \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2N-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2N-1}}{\sqrt{5}} - \frac{\Delta U}{R}.$$

Напряжение на цепочке:

$$U = 2\Delta U + (I_{2N-1} + I_{2N-2})R.$$

Подставляя найденные значения токов, получим

$$U = I_0 R \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2N+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2N+1}}{\sqrt{5}} + \Delta U \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2N} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2N}}{\sqrt{5}} + \Delta U.$$

В третьем пункте анализируется бесконечная цепочка, изображённая слева на рис. 149; справа изображена её эквивалентная схема.

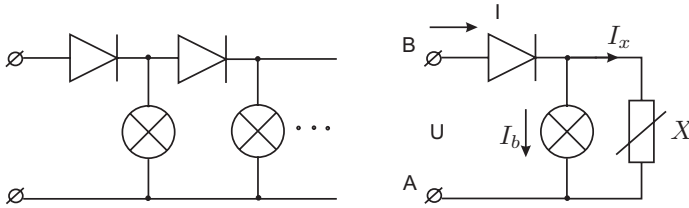


Рис. 149

Элемент X имеет такую же вольт-амперную характеристику $I = I(U)$, что и вся цепь, так как свойства бесконечной цепочки не изменяются при уменьшении числа звеньев. На рис. 150 представлены графики вольт-амперной характеристики диода VD и лампочки HL . При малых U оба графика можно приблизительно заменить прямыми линиями, измерить их наклон, и тем самым найти эквивалентные сопротивления диода R_d и лампочки R_b . Найдём сопротивление R_x элемента X исходя из того, что для бесконечной цепочки сопротивление между точками A и B равно R_x (рис. 149). Тогда величина R_x является корнем уравнения

$$R_x^2 - R_x R_d - R_d R_b = 0.$$

Получаем

$$R_x = \frac{R_d}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R_b}{R_d}} \right).$$

Строим на графике прямую, наклон которой соответствует R_x (рис. 150). Это начало искомой вольт-амперной характеристики, которая относится также и к участку цепи X (рис. 149). Возьмём на этом участке некоторую точку A . Ей соответствует напряжение U_b на первой лампочке и ток I_x , текущий через элемент X . Ток в начале цепи $I = I_b + I_x$. Откладываем это значение на вертикальной оси. Находим точку C на графике VD на рис. 150. Ей соответствует значение U_d напряжения на первом диоде. Остаётся найти $U = U_d + U_b$ и построить точку M с координатами U и I . Взяв точки в иных местах линейного участка, найдём другие точки искомой вольт-амперной характеристики (рис. 150).

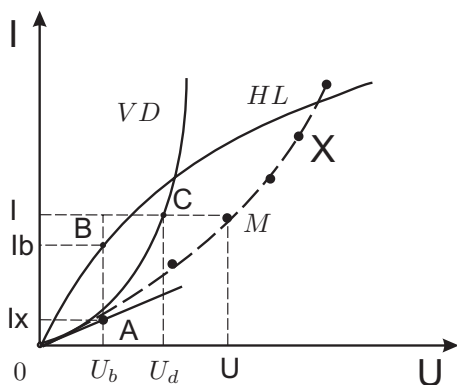


Рис. 150

Задача 82. Дрейф (2002 год)

На движущуюся заряженную частицу вблизи провода с током действует сила Лоренца. Силовые линии магнитного поля тока представляют собой перпендикулярные к току окружности, центры которых лежат на проводе. Модуль индукции магнитного поля находится по формуле

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (202)$$

где r — расстояние от точки поля до провода.

На рис. 151 показаны соответствующие первому пункту задачи направления тока, текущего в проводнике, начальная скорость частицы $\vec{v}_0$, скорость $\vec{v}$ в произвольный момент времени, направление индукции магнитного поля $\vec{B}$, а также сила Лоренца $\vec{F}$.

Поскольку векторы $\vec{v}$ и $\vec{F}$ лежат в одной плоскости, траектория движения лежит в плоскости xy декартовой системы координат, указанной на рис. 151. Запишем уравнение движения частицы в проекции на ось y . При этом учтём, что проекция силы Лоренца $F_y = -q\dot{x}B$, где точка над символом обозначает производную по времени t .

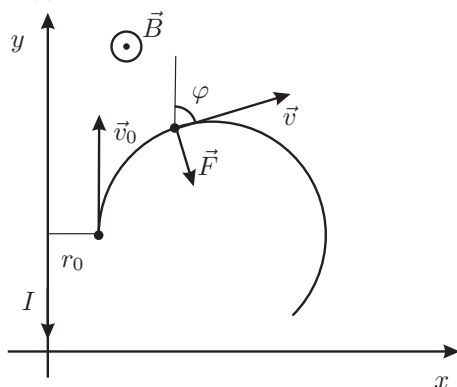


Рис. 151

Уравнение движения принимает вид

$$m\ddot{y} = -q\dot{x}B, \quad \text{или} \quad m\ddot{y} + \frac{\mu_0 q I \dot{r}}{2\pi r} = 0.$$

Интегрируем это уравнение с учётом того, что при $t = 0$ имеем $\dot{y} = v_0$, а $r = r_0$:

$$\dot{y} = v_0 - \frac{\mu_0 q I}{2\pi m} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (203)$$

Поскольку сила Лоренца не меняет модуль скорости, при минимальном расстоянии $r = r_{\min}$ имеем $\dot{y} = v_0$, а при максимальном расстоянии $r = r_{\max}$ имеем $\dot{y} = -v_0$ (рис. 151). Поэтому из уравнения (203) получаем

$$r_{\min} = r_0, \quad r_{\max} = r_0 \exp\left(\frac{4\pi m v_0}{\mu_0 q I}\right).$$

Если скорость частицы перпендикулярна проводу, то $\dot{y} = 0$. В этом случае из формулы (203) находим

$$r = R = r_0 \exp\left(\frac{2\pi m v_0}{\mu_0 q I}\right). \quad (204)$$

Во втором пункте требуется найти скорость дрейфа. Какой смысл вкладывается в этот термин? Если

$$\frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\min}} \ll 1,$$

то есть $\alpha \ll 1$, то приближённо можно пренебречь неоднородностью магнитного поля. Поэтому в этих условиях движение частицы мало отличается от движения по окружности радиусом

$$R_0 = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{2}$$

с угловой скоростью

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m} = \frac{q}{m} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{v_0}{\alpha r}.$$

Величину R_0 называют циклотронным радиусом, а ω — циклотронной частотой. Центр орбиты частицы всё время находится на расстоянии R , определяемом формулой (204), от провода. Неоднородность магнитного поля искажает движение по круговой орбите: циклотронный кружок как бы медленно смещается вдоль оси y , дрейфует. Скорость этого дрейфа и требуется определить в задаче. Для этого нужно поделить смещение частицы вдоль оси y за период на это время:

$$u_y = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{y} dt = \frac{1}{T} \int_0^T v_0 \cos \varphi dt, \quad (205)$$

где φ — угол, который образует скорость $\vec{v}$ с осью y . Для нахождения зависимости этого угла от времени обратимся к уравнению (203), переписав его следующим образом:

$$r = r_0 \exp(\alpha(1 - \cos \varphi)).$$

Продифференцируем это уравнение по времени:

$$\dot{r} = v_0 \sin \varphi = (\alpha r_0 \exp(\alpha(1 - \cos \varphi)) \sin \varphi) \dot{\varphi}.$$

Подставим выраженную отсюда величину dt в формулу (205) и учтём малость α :

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} v_0 \frac{\alpha r_0 \exp(\alpha(1 - \cos \varphi)) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{v_0 \sin \varphi} \approx \\ &\approx \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \alpha r_0 \cos \varphi (1 + \alpha(1 - \cos \varphi)) d\varphi = -\frac{\pi m v_0^2}{\mu_0 q I}. \end{aligned}$$

Итак, скорость дрейфа составляет

$$u = \frac{\pi m v_0^2}{\mu_0 q I}$$

и направлена вдоль тока.

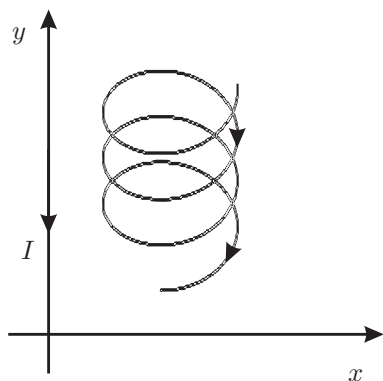


Рис. 152

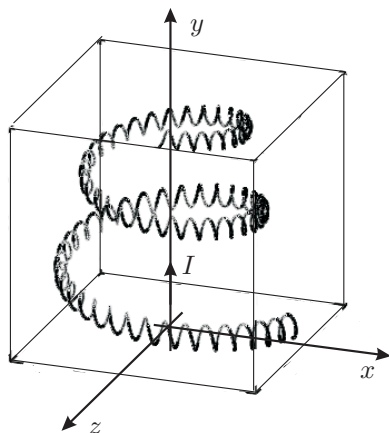


Рис. 153

На рис. 152 показана построенная с помощью системы компьютерной математики MathCAD траектория частицы в условиях данной задачи. На рис. 153 приведена полученная аналогичным образом траектория движения частицы вблизи провода при условии, что её начальная скорость не лежит в одной

плоскости с током и что ток монотонно меняется со временем. Видно, что модель дрейфа циклотронных кружков даёт наглядное представление о характере движения. Эта модель широко используется в физике плазмы, и не только для наглядности, но и для получения количественных результатов.

Задача 83. Шестиугольник (2003 год)

На рис. 154 представлена схема заданной в условии цепи. Сопротивление каждого из резисторов R . Следует найти сопротивление между гвоздями A и B , к которым подаётся некоторое напряжение. Отыскать участки, соединённые последовательно или параллельно, не удаётся. Попробуем использовать симметрию схемы. Не позволит ли она упростить задачу?

Гвозди A и B непосредственно подсоединяются к источнику напряжения. Остальные вершины шестиугольника 1, 2, 3, 4 находятся в иных, но в одинаковых для каждой из них условиях. Все они подсоединены через резистор R к точкам A и B , а также к каждому из остальных гвоздей. Поэтому нет физической причины, вследствие которой потенциалы гвоздей 1, 2, 3, 4 были бы различны. Таким образом, из соображений физической симметрии приходим к заключению о равенстве потенциалов этих точек. Поэтому можно перейти к эквивалентной схеме, изображённой на рис. 155. На этой схеме легко выделить последовательные и параллельные участки и найти искомое сопротивление R_x :

$$R_x = \frac{R}{3}.$$

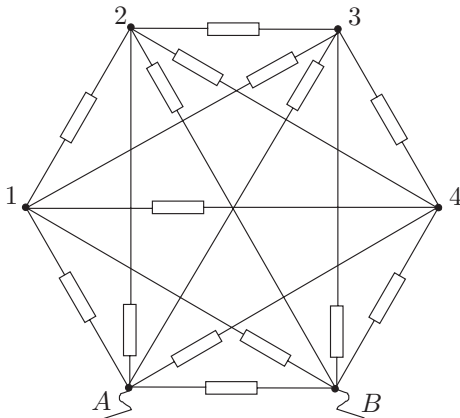


Рис. 154

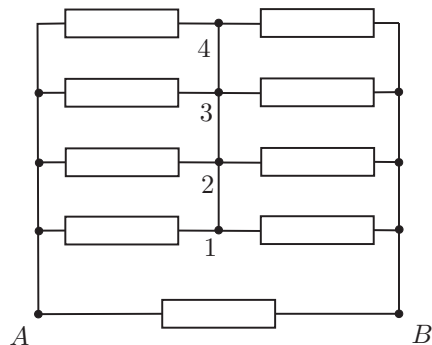


Рис. 155

Можно было и изолировать друг от друга точки 1, 2, 3, 4. Получилась бы схема, отличающаяся от той, что изображена на рис. 155, отсутствием соединений этих точек. Однако равенство потенциалов точек 1, 2, 3, 4 в новой схеме не будет нарушено. Поэтому и она эквивалентна исходной и приводит к прежнему ответу.

Задача 84. Конечная цепочка (2003 год)

Пусть I — искомый ток через резистор R_4 , а I_0 — ток, текущий через источник $\mathcal{E}$ (рис. 156). Так как $R_4 + R_3 = R_2$, токи на параллельно соединённых участках $C-R_4-D$ и $C-R_2-D$ одинаковы. Вследствие этого ток, покидающий узел D , равен $2I$.

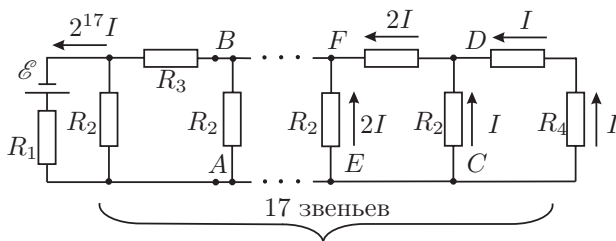


Рис. 156

Сопротивления участков $E-R_2-F$ и $E-C-D-F$ также одинаковы, поэтому ток, покидающий узел F , вдвое больше тока $2I$, текущего по участку $D-F$. Аналогичная ситуация повторяется и далее: при приближении от R_4 к источнику $\mathcal{E}$ ток удваивается после каждого из 17 звеньев цепочки. Таким образом,

$$I_0 = 2^{17}I. \quad (206)$$

Сопротивление всей цепи, подключённой последовательно к R_1 , равно $R_2/2$. По закону Ома

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + \frac{R_2}{2}}. \quad (207)$$

Из формул (206) и (207) получаем

$$I = \frac{I_0}{2^{17}} = \frac{\mathcal{E}}{2^{17}(R_1 + \frac{R_2}{2})} = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ А}.$$

Во втором пункте обозначим через R сопротивление всего правого участка цепи, подключённого к точкам A и B (рис. 156). Для эквивалентного источника это сопротивление нагрузки. По закону Ома ток I нагрузки вычисляется по формуле

$$I = \frac{\mathcal{E}_e}{R + R_e}. \quad (208)$$

Получим формулу для тока нагрузки без модели эквивалентного источника. К реальному источнику $\mathcal{E}$ последовательно подсоединены резистор R_1 и параллельно соединённые участки, сопротивления которых равны R_2 и $R_3 + R$. По правилам Киргофа

$$\mathcal{E} = I_0 R_1 + I(R_3 + R),$$

$$\mathcal{E} = I_0 R_1 + (I_0 - I)R_2.$$

Исключим из этой пары уравнений ток источника I_0 :

$$I = \frac{\frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 + R_2}}{R + R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}. \quad (209)$$

Сравнивая формулы (208) и (209), видим, что параметры эквивалентного источника таковы:

$$\mathcal{E}_e = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 + R_2}, \quad R_e = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (210)$$

Решение третьей части задачи существенно упрощается использованием рассмотренной в предыдущем пункте модели эквивалентного источника. Участок цепи, включающий источник $\mathcal{E}$, резистор R_1 и первое из 17 звеньев R_2 – R_3 , заменяем эквивалентным источником. Параметры его находим по формулам (210):

$$\mathcal{E}_e = \frac{2}{3}\mathcal{E}, \quad R_e = R_1.$$

Введение рассмотренного эквивалентного источника приводит к следующим изменениям анализируемой цепи: ЭДС источника умножается на $2/3$, резистор R_1 можно считать его внутренним сопротивлением. Зато подключённая к источнику цепочка резисторов уменьшается на одно звено. После 17 таких процедур получаем простую схему: источник, ЭДС которого $(2/3)^{17}\mathcal{E}$, последовательно соединён с резисторами R_1 и R_4 . По закону Ома ток I_4 через резистор R_4 равен

$$I_4 = \frac{(2/3)^{17}\mathcal{E}}{R_1 + R_4} = 5,1 \cdot 10^{-4} \text{ А}.$$

Задача 85. Счётчик Гейгера (2003 год)

Попадающие в камеру α -частицы ионизируют молекулы газа. Возникшие ионы оседают на электродах, меняя их первоначальный заряд. Затем заряд осевших ионов стекает через резистор R , и снова устанавливается равновесие. Предположим, что время оседания зарядов на электродах много меньше времени, в течение которого избыточный заряд рассасывается. Тогда задача сводится, во-первых, к нахождению заряда Q , обусловленного осевшими ионами, и, во-вторых, к определению напряжения на резисторе R как функции времени $U = U(t)$.

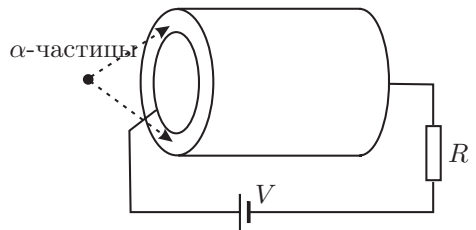


Рис. 157

Число пар ионов, генерированных попавшей в камеру частицей, равно $N = E/E_i$. Тогда возникший на электродах вследствие ионизации избыточный заряд определяется формулой

$$Q_0 = e \cdot N = e \frac{E}{E_i},$$

где e — элементарный заряд. Восстановление равновесия при протекании через резистор R тока I описывается соотношениями

$$I = -\frac{dQ}{dt}, \quad V = -IR + \frac{Q_e + Q}{C}, \quad U = IR.$$

Здесь V — напряжение источника (рис. 157), $Q_e = CV$ — равновесный заряд конденсатора, Q — избыточный заряд в момент времени t , U — напряжение на резисторе. Из этих соотношений следует, что

$$\frac{dU}{U} = -\frac{dt}{RC}.$$

При интегрировании полученного уравнения нужно учесть, что в начальный момент времени $Q = Q_0 = eE/E_i$. Поэтому в этот момент

$$U = \frac{Q_0}{C} = \frac{eE}{CE_i} = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ В.}$$

С учётом этого после интегрирования получаем

$$U = \frac{eE}{CE_i} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (211)$$

Видно, что напряжение на конденсаторе существенно убывает в течение времени RC . Поскольку в условии сказано, что RC много больше времени оседания ионов на электродах, сделанное в процессе решения предположение справедливо.

Счётчики Гейгера, в которых регистрируются импульсы, вызванные отдельными частицами, называют импульсными ионизационными камерами. Величина импульса, как видно из формулы (211), позволяет измерить энергию частицы E . Параметр RC характеризует разрешающую способность метода, то есть возможность регистрировать каждую частицу в отдельности. Как следует из решения, RC должно быть много больше времени, в течение которого ионы достигают электродов. Это и ограничивает разрешающую способность импульсной ионизационной камеры. Недостатком метода является его малая чувствительность, обусловленная малостью величины U . В данной задаче оказалось, что $U \lesssim 10^{-4}$ В. Можно существенно увеличить чувствительность метода, если повысить напряжение источника V до такой величины, при которой возникает вторичная ионизация, вызванная столкновением ионов и электронов

с молекулами газа. Эта идея реализуется в так называемых счётчиках Гейгера–Мюллера. В них на электроды подаётся напряжение, близкое к пробивному. Ионизирующие элементарные частицы инициируют образование лавины ионов. Возникает самостоятельный разряд, который гасится специальными радиотехническими средствами. Счётчики Гейгера–Мюллера обладают большой чувствительностью, но не позволяют измерять энергии регистрируемых частиц. Какое напряжение следует подавать на счётчик Гейгера–Мюллера? Ответы на этот и другие вопросы содержатся в пункте два задачи.

В этом пункте требуется найти распределение напряжённости и потенциала электрического поля внутри камеры счётчика Гейгера. Подобные задачи электростатики удобно решать с помощью теоремы Гаусса. В качестве замкнутой поверхности, через которую следует вычислять поток напряжённости поля, возьмём поверхность соосного с электродами цилиндра радиусом r , расположенного между катодом и анодом. Длина цилиндра равна l . Напряжённость поля направлена в каждой точке от оси цилиндра. Заряд, заключённый внутри выбранной поверхности, равен λl . На основании теоремы Гаусса запишем

$$E(r)2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0},$$

где ε_0 — электрическая постоянная, $E(r)$ — модуль напряжённости поля в точках, удалённых от оси на расстояние r . Эту величину и требуется найти:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}. \quad (212)$$

Для нахождения $\varphi(r)$ воспользуемся формулой, связывающей потенциал с напряжённостью поля:

$$-\frac{d\varphi}{dr} = E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Проинтегрируем это уравнение, положив потенциал катода равным нулю:

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_c}{r}. \quad (213)$$

Это ещё одно искомое в задаче соотношение.

Для нахождения пробивного напряжения заметим, что пробой может произойти там, где напряжённость поля достигает критического значения E_b . Из формулы (212) видно, что поле максимально вблизи анода, то есть при $r = R_a$. При $\lambda = \lambda_b$ оно достигает пробивного значения, для которого

$$E_b = \frac{\lambda_b}{2\pi\varepsilon_0 R_a}. \quad (214)$$

Подставляя величины, соответствующие наступлению пробоя, в формулу (213), получим

$$\varphi_b = \frac{\lambda_b}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_c}{R_a} = E_b R_a \ln \frac{R_c}{R_a} \approx 11 \text{ кВ}.$$

Таким образом, выясняется, что зарождение ионной лавины, ведущей к пробое, возможно вблизи анода. Чтобы напряжённость поля здесь была близка к пробивному значению, напряжение на счётчике должно быть тем меньше, чем меньше радиус анода. Вот почему анод в счётчиках Гейгера–Мюллера делают в виде тонкой нити.

В отличие от предыдущих пунктов, в пункте 3 анализируется стационарное состояние счётчика, при котором число частиц, генерируемых в любом объёме внутри камеры, равно потоку этих частиц, покидающих данный объём. Счётчики, в которых реализуется такой режим, называют ионизационной камерой непрерывного действия.

Ввиду осевой симметрии конструкции счётчика удобно рассмотреть объём, заключённый между анодом и соосной с ним цилиндрической поверхностью радиусом $r \leq R_c$. Число положительных ионов, генерируемых в этом объёме в единицу времени, равно

$$N = \Gamma \pi (r^2 - R_a^2) l, \quad (215)$$

где l — длина выбранной цилиндрической поверхности. Поток ионов, вытекающих из этого объёма в единицу времени, определяется по формуле $\Phi(r) = n(r)v(r)2\pi r l$, где $n(r)$ — число положительных ионов в единице объёма на расстоянии r от оси цилиндра, $v(r)$ — скорость их движения в этом месте. В соответствии с условием $v(r) = \mu E(r)$, а напряжённость $E(r)$ определяется формулой (212). После подстановки этих значений получим

$$\Phi(r) = n(r) \cdot \mu \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \cdot 2\pi r l = n(r) \frac{\lambda \mu}{\varepsilon_0} l.$$

Именно эта величина в стационарном состоянии должна быть равна числу генерируемых ежесекундно в выделенном объёме частиц (215). Поэтому

$$n(r) \frac{\lambda \mu}{\varepsilon_0} l = \Gamma \pi (r^2 - R_a^2) l, \quad \text{или} \quad n(r) = \frac{\pi \varepsilon_0 \Gamma}{\mu \lambda} (r^2 - R_a^2).$$

Таким образом, концентрация положительных ионов стремится к нулю вблизи анода и достигает наибольшего значения вблизи катода.

Задача 86. Полубесконечная цепочка (2004 год)

Из симметрии схемы, изображённой на рис. 158, относительно линии, соединяющей точки A и B , следует, что потенциалы всех точек, симметричных относительно этой линии, равны, то есть схемы на рис. 158 и 159 эквивалентны. Рассчитать сопротивление схемы на рис. 159 уже легко:

$$R_\infty = \frac{\frac{R}{2} \left(R_\infty + \frac{3R}{2} \right)}{R_\infty + \frac{3R}{2} + \frac{R}{2}},$$

откуда $R_\infty = \frac{(\sqrt{21} - 3)R}{4}$. Таким образом,

$$R_{AB} = \frac{(R_\infty + R)R}{R_\infty + 2R} = \frac{\sqrt{21} + 1}{\sqrt{21} + 5}R \approx 0,58R.$$

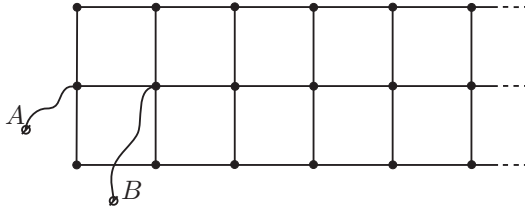


Рис. 158

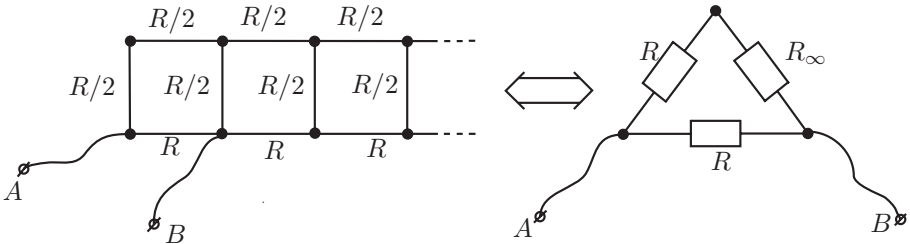


Рис. 159

Задача 87. Эффект Холла (2004 год)

Вначале выясним, почему возникает холловская разность потенциалов. На рис. 160 показаны направление магнитного поля $\vec{B}$, направление тока I и соответствующие ему направления движения положительных (дырок) и отрицательных (электронов) носителей зарядов. Магнитное поле искривляет траекторию движения носителей зарядов, как это показано на рис. 160.

Из-за различия потоков электронов и дырок на поверхности A собираются положительные заряды, а на поверхности B отрицательные. Возникает напряжение $\varphi_A - \varphi_B = U$, создающее поперечную напряжённость электрического поля $E_\perp = U/b$, препятствующую дальнейшему оседанию зарядов на поверхностях (рис. 160). В стационарном состоянии поток электронов к пластине должен быть равен потоку дырок:

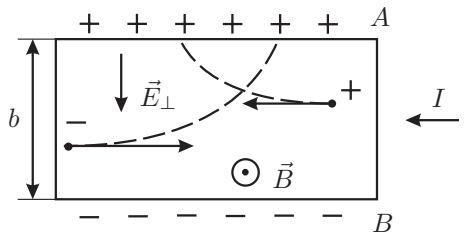


Рис. 160

$$n \cdot v_\perp^n = p \cdot v_\perp^p, \quad (216)$$

где $v_{\perp}^n$ и $v_{\perp}^p$ — перпендикулярные к граням A и B составляющие скорости электронов и дырок. Эти составляющие обусловлены как силой Лоренца, так и поперечной к пластинам напряжённостью электрического поля $E_{\perp}$, создаваемого зарядами пластин:

$$v_{\perp}^n = \mu_n(v_n B + E_{\perp}) = \mu_n^2 E B + E_{\perp} \mu_n, \quad (217)$$

$$v_{\perp}^p = \mu_p(v_p B - E_{\perp}) = \mu_p^2 E B - E_{\perp} \mu_p. \quad (218)$$

Здесь E — составляющая напряжённости электрического поля вдоль тока I . Она определяет скорость движения носителей вдоль пластин:

$$v_n = \mu_n E, \quad v_p = \mu_p E.$$

Эти скорости обеспечивают ток I :

$$I = e(nv_n + pv_p)ab = eE(n\mu_n + p\mu_p)ab, \quad (219)$$

где e — элементарный заряд, b — ширина пластины. Подставляем выражения (217) и (218) в формулу (216):

$$EB(\mu_p^2 p - \mu_n^2 n) = E_{\perp}(\mu_n n + \mu_p p).$$

Имеем $E_{\perp} = U/b$, а E определяется равенством (219). Учитывая это, получим

$$U = \frac{BI}{a} \cdot \frac{\mu_p^2 p - \mu_n^2 n}{e(\mu_n n + \mu_p p)^2},$$

откуда

$$R = \frac{\mu_p^2 p - \mu_n^2 n}{e(\mu_n n + \mu_p p)^2}.$$

Знак коэффициента Холла определяет тип проводимости полупроводника: для полупроводника с дырочной проводимостью $R > 0$, для электронного $R < 0$.

Задача 88. Батарейки (2005 год)

На рис. 161 изображена схема цепи с последовательным соединением элементов. Запишем для неё закон Ома:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + n\mathcal{E}_2}{R + r_1 + nr_2}, \quad (220)$$

где I — ток нагрузки. При $n = 0$ из формулы (220) получим

$$I = \frac{\mathcal{E}_1}{R + r_1}. \quad (221)$$

При очень больших n из формулы (220) следует, что

$$I = \frac{n\mathcal{E}_2}{nr_2} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}. \quad (222)$$

Поскольку ток нагрузки по условию не зависит от n , из формул (221) и (222) получаем

$$\frac{\mathcal{E}_1}{R + r_1} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}, \quad \text{или} \quad R + r_1 = 2r_2. \quad (223)$$

Рассмотрим теперь цепь с параллельным соединением батареек, схема которой изображена на рис. 162. Она эквивалентна цепи, изображённой на рис. 163, где I_{eq} — ток в эквивалентном источнике $\mathcal{E}_2$, а $r_{eq} = r_2/n$ — его внутреннее сопротивление. В этом можно убедиться, применив правила Киргофа для контура, состоящего из нагрузки R и одной из батареек $\mathcal{E}_2$:

$$I \left(R + \frac{r}{n} \right) = \mathcal{E}_2, \quad \text{или} \quad I(R + r_{eq}) = \mathcal{E}_{eq}.$$

По первому правилу Киргофа

$$I_{eq} = I - I_1.$$

По второму правилу Киргофа для внешнего контура схемы, показанной на рис. 163, получаем

$$\mathcal{E}_1 = I_1 r_1 + IR,$$

откуда

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - IR}{r_1}.$$

При $n = 0$ имеем $I_{eq} = 0$, и тогда

$$I = I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R + r_1}. \quad (224)$$

В случае бесконечного числа n батареек $\mathcal{E}_2$ сопротивление r_{eq} равно нулю, а ток нагрузки принимает прежнее значение I . Поэтому второе правило Киргофа для контура $\mathcal{E}_2$ – R приводит к соотношению

$$I = \frac{\mathcal{E}_2}{R}.$$

Из последнего уравнения и уравнения (224) найдём

$$\frac{\mathcal{E}_1}{R + r_1} = \frac{\mathcal{E}_2}{R}, \quad \text{или} \quad R + r_1 = 2R. \quad (225)$$

Из формул (223) и (225) следует ответ: $R = r_1$ и $r_2 = r_1$.

При решении данной задачи использован полезный метод эквивалентных схем. Группу соединённых друг с другом источников тока можно заменить одним эквивалентным источником. На практике используют батареи элементов. При последовательном соединении источников одинаковой полярности ЭДС и внутреннее сопротивление эквивалентного источника равны сумме соответствующих величин для составляющих элементов. Параллельно соединяют одинаковые источники. Эквивалентная ЭДС в этом случае равна ЭДС отдельных элементов, зато внутреннее сопротивление эквивалентного источника меньше сопротивления одного элемента. При соединении n элементов внутреннее сопротивление полученной батареи в n раз меньше сопротивления отдельного элемента.

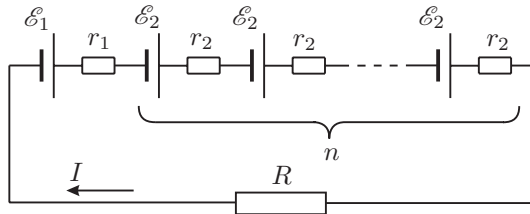


Рис. 161

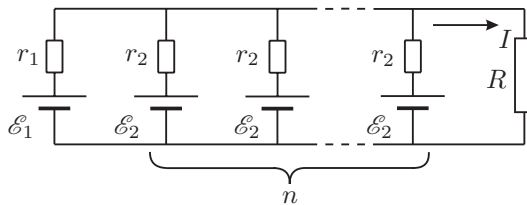


Рис. 162

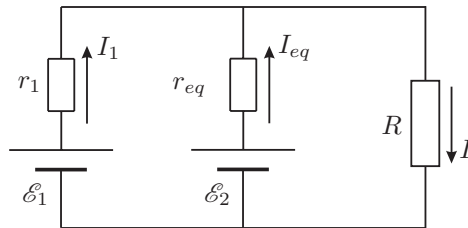


Рис. 163

Задача 89. Молекулярные кристаллы (2005 год)

Для схематического изображения графика потенциала Леннарда-Джонса обратим внимание на поведение функции $U(r)$ при достаточно больших и до-

статочно малых r . В первом случае

$$\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} \ll \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 \quad \text{и} \quad U(r) \approx -4\epsilon \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6.$$

График такой функции имеет вид кривой 1 на рис. 164. При малых r определяющую роль играет, напротив, слагаемое, пропорциональное r^{-12} . График $U(r)$ в этом приближении имеет вид 2 (рис. 165). Таким образом, функция $U(r)$ при изменении r от 0 до ∞ вначале резко убывает, а затем возрастает, так что её график имеет вид сплошной линии на рис. 165. Равновесному состоянию соответствует расстояние r_0 , при котором $U(r)$ имеет минимальное значение (рис. 165).

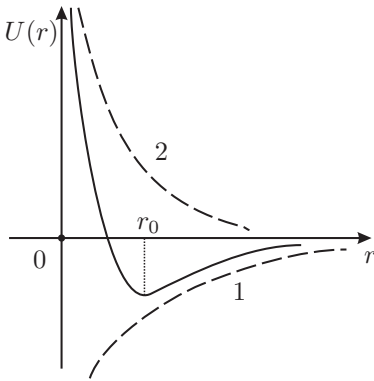


Рис. 164

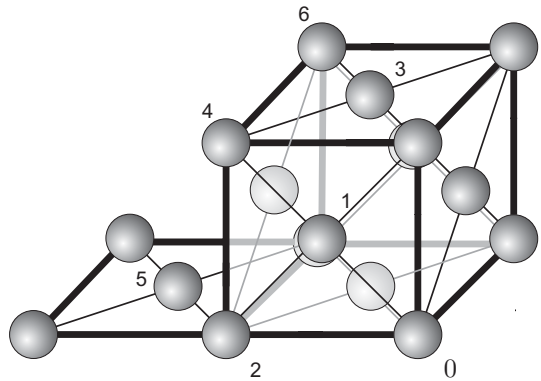


Рис. 165

Для нахождения равновесного расстояния r_0 воспользуемся стандартным приёмом определения экстремума функции, то есть приравняем к нулю производную функции $U(r)$:

$$\frac{dU}{dr} = 4\epsilon \left(-12 \frac{\sigma^{12}}{r^{13}} + 6 \frac{\sigma^6}{r^7} \right) = 0.$$

Корнем этого уравнения является искомая величина:

$$r_0 = \sqrt[6]{2} \cdot \sigma \approx 3,82 \text{ \AA}.$$

Для нахождения потенциальной энергии взаимодействия атома со всей решёткой E нужно сложить энергии взаимодействия рассматриваемого атома с каждым из остальных атомов кристалла:

$$E = \sum_i 4\epsilon \left(\left(\frac{\sigma}{r_i} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_i} \right)^6 \right), \quad (226)$$

где r_i — расстояние между рассматриваемым атомом и i -м атомом кристалла. Суммирование в формуле (226) предполагается по всем атомам, число которых

огромно. Задача нахождения суммы такого числа слагаемых на первый взгляд кажется практически неразрешимой. Тем не менее можно «подобрать ключик» к приближённому решению задачи. Учтём то обстоятельство, что слагаемые приблизительно пропорциональны r_i^{-6} , то есть существенный вклад в сумму вносят главным образом атомы решётки, не очень удалённые от рассматриваемого атома. К тому же вклад в сумму от равноудалённых атомов одинаков. Поступим следующим образом. Вначале учтём в формуле (226) вклад ближайших соседей. Из рис. 165 видно, что расстояние от атома 0 до ближайших соседей $r_1 = a/\sqrt{2}$. Подсчитаем число ближайших к атому 0 соседей. В изображённой на рисунке ячейке это три атома типа 1. К атому 0 примыкают восемь таких ячеек, однако атомы типа 1 одновременно принадлежат двум из рассматриваемых восьми ячеек, так что число ближайших соседей атома 0 равно $3 \cdot 8/2 = 12$. Их вклад в сумму (226) составляет

$$E_1 = 12 \cdot 4\varepsilon \left(\left(\frac{\sigma}{r_1} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_1} \right)^6 \right). \quad (227)$$

Несколько дальше находятся атомы типа 2 (рис. 165), удалённые на расстояние $r_1\sqrt{2}$. Число таких соседей равно $3 \cdot 8/4 = 6$. Каждый из атомов типа 2 одновременно принадлежит четырём из восьми примыкающих к атому 0 ячеек. Вклад этих соседей в формулу (226) составляет

$$E_2 = 6 \cdot 4\varepsilon \left(\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}r_1} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}r_1} \right)^6 \right). \quad (228)$$

Мы рассмотрели две группы равноудалённых соседей. Аналогично можно выделить группы соседей типа 3, 4, 5, 6 (рис. 165). В приведённой ниже таблице указаны типы соседей атома 0, их числа и расстояния до них.

Типы соседей	1	2	3	4	5	6
Число соседей	12	6	24	12	24	8
Расстояние до соседей	r_1	$\sqrt{2}r_1$	$\sqrt{3}r_1$	$2r_1$	$\sqrt{5}r_1$	$\sqrt{6}r_1$

Запишем вклады в сумму (226) от всех указанных групп аналогично (227) и (228) и сложим полученные равенства. Получим

$$E = 4\varepsilon \left(A \left(\frac{\sigma}{r_1} \right)^{12} - B \left(\frac{\sigma}{r_1} \right)^6 \right),$$

где

$$\begin{aligned} A &= 12 + 6 \frac{1}{(\sqrt{2})^{12}} + 24 \frac{1}{(\sqrt{3})^{12}} + 12 \frac{1}{2^{12}} + 24 \frac{1}{(\sqrt{5})^{12}} + 8 \frac{1}{(\sqrt{6})^{12}} \approx \\ &\approx 12 + 0,094 + 0,033 + 2,930 \cdot 10^{-3} + 1,536 \cdot 10^{-3} + 1,715 \cdot 10^{-4} \approx 12,132, \end{aligned}$$

$$B = 12 + 6\frac{1}{(\sqrt{2})^6} + 24\frac{1}{(\sqrt{3})^6} + 12\frac{1}{2^6} + 24\frac{1}{(\sqrt{5})^6} + 8\frac{1}{(\sqrt{6})^6} \approx \\ \approx 12 + 0,75 + 0,889 + 0,188 + 0,192 + 0,037 \approx 14,055.$$

Видно, что каждое следующее слагаемое в выражениях для A и B существенно меньше предыдущего. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением небольшого числа групп соседей. Результаты, полученные для шести таких групп, особенно число A , мало отличаются от табличных значений, найденных при учёте большего числа соседей: $A \approx 12,13$ и $B \approx 14,45$.

Равновесное расстояние r_1 между ближайшими атомами находится приравнованием к нулю производной функции $E = E(r_1)$:

$$\frac{dE}{dr_1} = 4\varepsilon \left(-12A\frac{\sigma^{12}}{r_1^{13}} + 6B\frac{\sigma^6}{r_1^7} \right) = 0.$$

Значение r_1 является корнем этого уравнения:

$$r_1 = \sqrt[6]{2\frac{A}{B}} \cdot \sigma \approx 3,72 \text{ \AA}. \quad (229)$$

Искомая постоянная решётки кристалла аргона: $a = \sqrt{2}r_1 \approx 5,27 \text{ \AA}$, что мало отличается от значения $a = 5,30 \text{ \AA}$, получаемого в эксперименте.

Теперь найдём модуль всестороннего сжатия $\varkappa = -Vdp/dV$. Для этого применим к кристаллу закон изменения энергии:

$$p dV = -du,$$

где u — энергия кристалла. Получим

$$\varkappa = V \frac{d^2 u}{dV^2}.$$

Энергия кристалла u равна половине произведения найденной выше величины E на число атомов N , поскольку в произведении NE дважды учитывается взаимодействие каждого атома. Входящее в E равновесное расстояние между ближайшими атомами r_1 определяет объём ячейки a^3 , от которого зависит V . Объём V равен

$$V = \frac{N}{4}a^3 = \frac{Nr_1^3}{\sqrt{2}}.$$

Множитель $1/4$ учитывает, что на одну элементарную ячейку приходится два атома. Используя выражение для V , найдём

$$u(V) = 2N\varepsilon \left(A\frac{N^4\sigma^{12}}{4V^4} - B\frac{N^2\sigma^6}{2V^2} \right).$$

После дифференцирования получим

$$\frac{d^2 u}{dV^2} = 2N\varepsilon \left(5A \frac{N^4 \sigma^{12}}{V^6} - 3B \frac{N^2 \sigma^6}{V^4} \right) = 2N\varepsilon \left(40A \frac{\sigma^{12}}{N^2 r_1^{18}} - 12B \frac{\sigma^6}{N^2 r_1^{12}} \right).$$

Для получения окончательного результата остаётся подставить выражение (229) для r_1 . Тогда

$$\varkappa = V \frac{d^2 u}{dV^2} = \frac{4\varepsilon}{\sigma^3} \frac{B^{5/2}}{A^{3/2}} \approx 2,89 \cdot 10^9 \text{ Па.}$$

Задача 90. Колебания в цепи с диодами (2005 год)

Будем рассматривать процесс поэтапно, вычисляя промежутки времени с помощью формулы Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$ для периода колебаний T в контуре, содержащем катушку индуктивностью L и конденсатор ёмкостью C . Заранее введём обозначение $L_0 = L_1 L_2 / (L_1 + L_2)$ для индуктивности параллельно соединённых катушек.

1. Первый этап. Сразу после замыкания ключа (рис. 166) конденсатор C_2 начинает разряжаться через параллельно соединённые катушки L_1 и L_2 без участия конденсатора C_1 , так как на этом этапе диод D_2 открыт, а D_1 — закрыт. Указанный первый этап завершается в момент полной разрядки конденсатора C_2 , то есть через время τ_1 , равное четверти периода T_1 колебаний в контуре, содержащем катушку индуктивностью L_0 и конденсатор ёмкостью C_2 :

$$\tau_1 = \frac{T_1}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{L_0 C_2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \cdot C_2}.$$

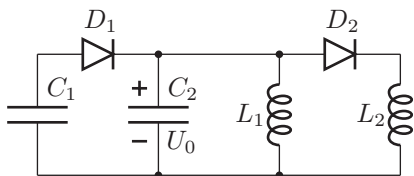


Рис. 166

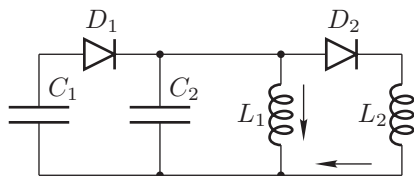


Рис. 167

2. Второй этап. Сразу после полной разрядки конденсатора C_2 (рис. 167) параллельно соединённые катушки начинают заряжать параллельно соединённые конденсаторы, так как на этом этапе оба диода открыты. Указанный второй этап завершается в момент прекращения тока в цепи, то есть через время τ_2 , равное четверти периода T_2 колебаний в контуре, содержащем катушку индуктивностью L_0 и конденсатор ёмкостью $C_1 + C_2$:

$$\tau_2 = \frac{T_2}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{L_0 (C_1 + C_2)} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \cdot (C_1 + C_2)}.$$

В конце второго этапа (рис. 168) ток через ключ не течёт в первый раз после его замыкания, поэтому для определения искомого напряжения U_1 применим закон сохранения энергии в течение первых двух этапов:

$$\frac{C_2 U_0^2}{2} = \frac{(C_1 + C_2) U_1^2}{2},$$

откуда

$$U_1 = U_0 \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}}.$$

В дальнейшем из-за наличия диода D_1 напряжение на конденсаторе C_1 не может стать меньше U_1 , значит, по закону сохранения энергии напряжение на конденсаторе C_2 не может стать больше U_1 , следовательно, с этого момента диод D_1 будет всё время закрыт, а заряд на конденсаторе C_1 не изменится.

3. Третий этап. Сразу после прекращения тока в цепи (рис. 168) конденсатор C_2 начинает разряжаться через катушку L_1 без участия конденсатора C_1 и катушки L_2 , так как на этом этапе оба диода закрыты. Указанный третий этап завершается в момент полной разрядки конденсатора C_2 , то есть через время τ_3 , равное четверти периода T_3 колебаний в контуре, содержащем катушку индуктивностью L_1 и конденсатор ёмкостью C_2 :

$$\tau_3 = \frac{T_3}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{L_1 C_2}.$$

Для определения искомого напряжения U_2 потребуется сила тока I_1 в конце третьего этапа (рис. 169), поэтому найдём её сейчас, применив закон сохранения энергии в течение данного этапа:

$$\frac{C_2 U_1^2}{2} = \frac{L_1 I_1^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad I_1 = U_1 \sqrt{\frac{C_2}{L_1}} = \frac{C_2 U_0}{\sqrt{L_1 (C_1 + C_2)}}. \quad (230)$$

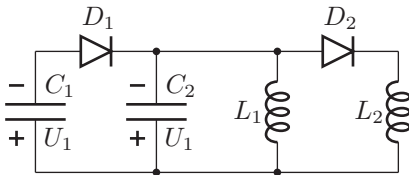


Рис. 168

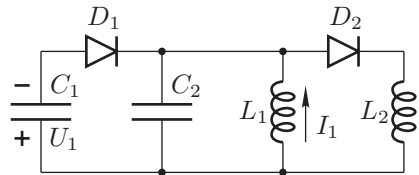


Рис. 169

4. Граничный момент. Сразу после полной разрядки конденсатора C_2 (рис. 169) начинаются его перезарядка и перераспределение токов в катушках без участия конденсатора C_1 , так как теперь диод D_2 открыт, а D_1 по-прежнему закрыт. Мысленно заменим диод D_2 на проводник, тогда в ходе дальнейших колебаний сила тока в каждой катушке будет изменяться по синусоидальному закону, причём граничных значений она будет достигать в моменты полной

разрядки конденсатора C_2 . В один из этих моментов ток в катушке L_2 отсутствует (рис. 169), а в другой — направлен вниз на той же схеме, значит, и ни в какой иной момент времени ток не идёт вверх на схеме, то есть против направления пропускания диода D_2 , который был мысленно заменён на проводник. Это означает, что диод D_2 больше не влияет на процессы в цепи. Поскольку последнее изменение состояния диодов произошло в конце третьего этапа, искомая длительность переходного процесса составляет

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{L_1 L_2 C_2}{L_1 + L_2}} + \sqrt{\frac{L_1 L_2 (C_1 + C_2)}{L_1 + L_2}} + \sqrt{L_1 C_2} \right).$$

Описанные в этом пункте колебания происходят уже после завершения переходного процесса, то есть в установившемся режиме, а их период составляет

$$T = T_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L_1 L_2 C_2}{L_1 + L_2}}.$$

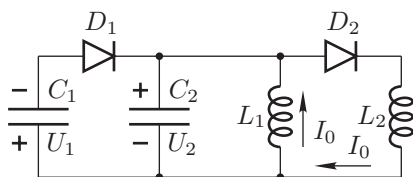


Рис. 170

5. Установившийся режим. В момент завершения переходного процесса (рис. 169) сила тока I_1 через катушку L_1 даётся формулой (230), а ток через катушку L_2 отсутствует, то есть $I_2 = 0$. Параллельно соединённые катушки (диод D_2 открыт) можно заменить на одну катушку индуктивностью L_0 , через которую в данный момент течёт ток силой $I = I_1 + I_2$. Дальнейшие колебания происходят в контуре, содержащем эквивалентную катушку и конденсатор C_2 .

Когда ток через ключ не течёт во второй раз после его замыкания, тока нет и через эквивалентную катушку, но в реальных катушках остаётся кольцевой ток (рис. 170), силу I_0 которого можно при желании найти из закона сохранения магнитного потока или из второго правила Кирхгофа. Однако мы не будем искать эту интересную саму по себе величину I_0 , а просто применим закон сохранения энергии для колебаний в эквивалентном контуре:

$$\frac{L_0 I^2}{2} = \frac{C_2 U_2^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad U_2 = I \sqrt{\frac{L_0}{C_2}} = U_0 \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}} \sqrt{\frac{L_2}{L_1 + L_2}}.$$

После завершения переходного процесса амплитудное напряжение A на конденсаторе C_2 достигается, когда через эквивалентную катушку не течёт ток. На основе предыдущих рассуждений сразу получаем

$$A = U_2 = U_0 \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}} \sqrt{\frac{L_2}{L_1 + L_2}}.$$

Итоговый качественный график зависимости $U(t)$ показан на рис. 171.

Примечание. Заметим, что $U_2 < U_1$, так как часть энергии остаётся в катушках из-за кольцевого тока, что даёт ещё один способ расчёта его силы I_0 . Рекомендуем читателям самостоятельно вычислить I_0 и подумать о причинах сходства полученного результата с выражением для скорости совместного движения брусков после их неупругого столкновения, если изначально один брусок двигался, а другой — покоился. Объяснение этого феномена можно найти в литературе по ключевым словам «электромеханические аналогии». Кроме того, стоит обратить внимание на использованный приём замены параллельно соединённых катушек при наличии текущих через них произвольных токов.

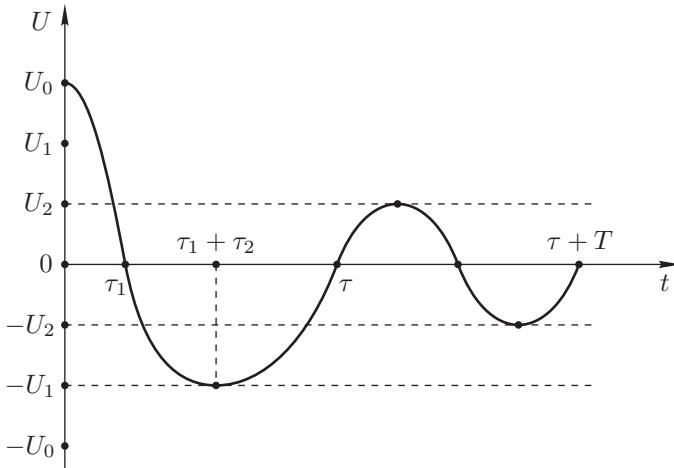


Рис. 171

Примерная система оценивания

Ответ для τ	3
Ответ для T	1
Ответ для U_1	2
Ответ для U_2	2
Ответ для A	1
График	1

Задача 91. Миниатюрный кипятильник (2006 год)

Для плавления льда и доведения воды до кипения нужно подвести количество теплоты

$$Q = \lambda m_2 + c(m_1 + m_2)(100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}) \approx 1,55 \text{ кДж}.$$

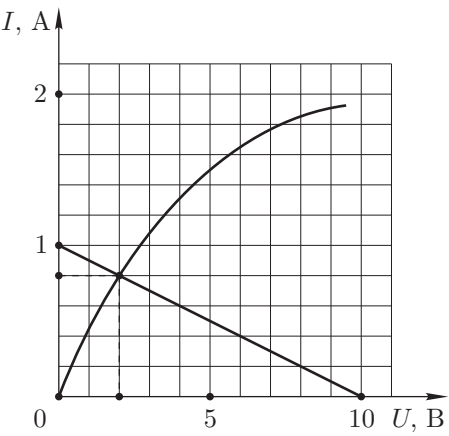
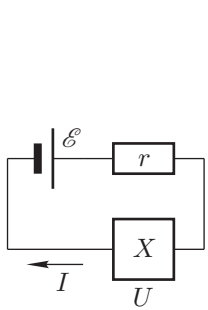
Пусть U — напряжение на кипятильнике, I — сила тока в цепи (рис. 172), тогда по второму правилу Кирхгофа $\mathcal{E} = U + Ir$, откуда

$$I = \frac{\mathcal{E} - U}{r}.$$

Ещё одним уравнением, связывающим U и I , является приведённая в условии ВАХ кипятильника. Значения U и I найдём как координаты точки пересечения графиков двух рассматриваемых зависимостей (рис. 173): $U = 2,0$ В, $I = 0,8$ А.

Следовательно, мощность кипятильника $P = UI = 1,6$ Вт, а искомое время составляет

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{\lambda m_2 + c(m_1 + m_2)(100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C})}{IU} \approx 970 \text{ с} \approx 16 \text{ мин.}$$



Примерная система оценивания

Выражение для Q	2
Применение второго правила Кирхгофа	2
Графическое решение системы уравнений	2
Выражение для P	1
Ответ для t в общем виде	1
Численный ответ для t	2

Задача 92. Схема (2006 год)

Известно, что схемы треугольника, составленного из резисторов сопротивлениями R_1 , R_2 и R_3 (рис. 174), и звезды, составленной из резисторов сопротивлений r_1 , r_2 и r_3 (рис. 175), эквивалентны, если

$$r_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad r_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad r_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Этот факт можно доказать, поочерёдно мысленно подключая омметр к каждой паре выводов и приравнивая соответствующие сопротивления.

Введём обозначения на исходной схеме (рис. 176), сложим последовательные сопротивления (рис. 177) и поочерёдно применим преобразование «треугольник–звезда» к части цепи между точками C , D и F (рис. 178) и к части цепи между точками A , D и E (рис. 179).

Снова сложим последовательные сопротивления (рис. 180) и применим преобразование «треугольник–звезда» к части цепи между точками B , G и H (рис. 181).

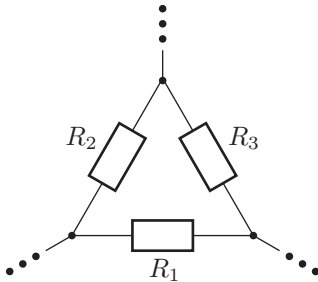


Рис. 174

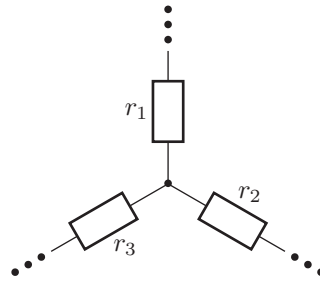


Рис. 175

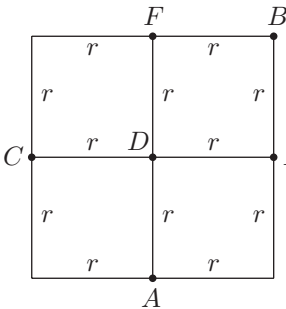


Рис. 176

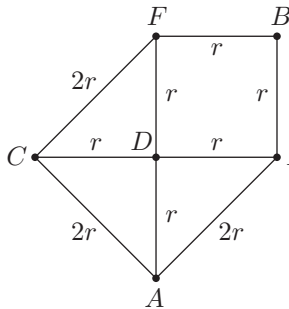


Рис. 177

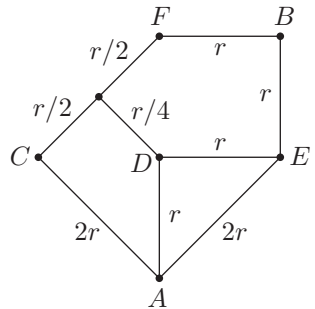


Рис. 178

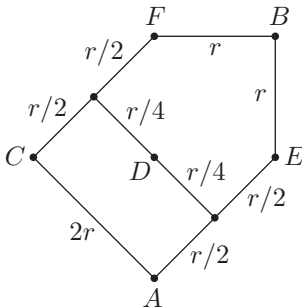


Рис. 179

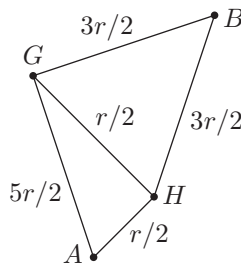


Рис. 180

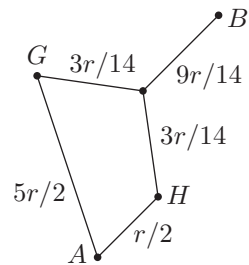


Рис. 181

Используя формулы для последовательного и параллельного соединений резисторов, окончательно получим

$$R = \frac{9}{14}r + \frac{\left(\frac{5}{2}r + \frac{3}{14}r\right) \cdot \left(\frac{1}{2}r + \frac{3}{14}r\right)}{\left(\frac{5}{2}r + \frac{3}{14}r\right) + \left(\frac{1}{2}r + \frac{3}{14}r\right)} = \frac{29}{24}r.$$

Примерная система оценивания

Упрощение последовательного и параллельного соединений	2
Применение преобразования «треугольник-звезда»	3
Правильное неоднократное применение методов упрощения схем	2
Ответ	3

Задача 93. Диод (2006 год)

1. Согласно закону сохранения энергии имеем

$$\frac{mu_1^2}{2} + q\varphi_1 = \frac{mu_2^2}{2} + q\varphi_2, \quad u_2 = u_1 \sqrt{1 + \frac{2q}{mu_1^2}(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Поскольку при переходе частицы из одной области в другую на неё действует электрическое поле, перпендикулярное границе раздела областей, составляющая скорости частицы, параллельная границе, остаётся неизменной, и, таким образом,

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{u_1}{u_2}, \quad \sin \beta = \sin \alpha \frac{1}{\sqrt{1 + 2q(\varphi_1 - \varphi_2)/mu_1^2}},$$

где β — угол, задающий направление движения частицы во второй области.

2. Ток в цепи перестаёт течь, когда электроны из-за электрического поля в промежутке между анодом и катодом не достигают анода. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = eU_0,$$

откуда

$$U_0 = \frac{mv_0^2}{2e}.$$

3. Пусть потенциал катода нулевой: $\varphi_k = 0$, тогда скорость электрона v_1 на расстоянии r_1 от центра диода в области с потенциалом φ_1 находим из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} - e\varphi_k = \frac{mv_1^2}{2} - e\varphi_1,$$

откуда

$$v_1 = v_0 \sqrt{1 + \frac{2e\varphi_1}{mv_0^2}}.$$

Рассмотрим переход электрона из области с потенциалом φ_1 и радиусом r_1 в область с потенциалом φ_2 и радиусом r_2 , причём $r_2 - r_1 \ll r_1$ (рис. 182). В этом случае

$$v_1 = v_0 \sqrt{1 + \frac{2e\varphi_1}{mv_0^2}}, \quad v_2 = v_0 \sqrt{1 + \frac{2e\varphi_2}{mv_0^2}}.$$

Согласно первому пункту задачи компонента скорости электрона, перпендикулярная радиусу, не претерпевает изменения при переходе между областями с различным потенциалом, поэтому

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{1 + 2e\varphi_2/mv_0^2}}{\sqrt{1 + 2e\varphi_1/mv_0^2}}.$$

По теореме синусов для треугольника OAB получаем

$$\frac{\sin \alpha_1}{r_2} = \frac{\sin \beta_1}{r_1}.$$

Таким образом, для углов α и β_1 имеем следующую связь:

$$\sin \alpha \sqrt{1 + \frac{2e\varphi_1}{mv_0^2}} r_1 = \sin \beta_1 \sqrt{1 + \frac{2e\varphi_2}{mv_0^2}} r_2.$$

Разбивая пространство между катодом и анодом на множество поясков с одинаковым потенциалом на протяжении каждого из них, можно воспользоваться оптическим законом Снеллиуса: если принять для i -го слоя

$$n_i = \sqrt{1 + \frac{2e\varphi_i}{mv_0^2}},$$

то

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = \dots = n_i \sin \alpha_i.$$

Для нахождения критического угла α_0 вылета электронов из катода запишем «закон Снеллиуса» для двух поясков, один из которых непосредственно прилегает к катоду, а другой — к аноду, причём в последний из поясков электрон попадает под прямым углом:

$$r \sin \alpha_0 = R \sqrt{1 - \frac{2eU}{mv_0^2}},$$

откуда

$$\sin \alpha_0 = \frac{R}{r} \sqrt{1 - \frac{2eU}{mv_0^2}}.$$

Поскольку электроны вылетают из катода равномерно во все стороны, только часть электронов, заключённая внутри телесного угла с раствором α_0 , достигнет анода, поэтому в установившемся режиме сила тока через диод составляет

$$I = 4\pi r^2 n \frac{2\pi(1 - \cos \alpha_0)}{2\pi} = 4\pi r^2 n \left(1 - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2eU}{mv_0^2} \right) \frac{R^2}{r^2}} \right).$$

Здесь необходимо заметить, что формула для синуса критического угла работает только при напряжениях

$$U \geq U_1 = \frac{mv_0^2}{2e} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

При меньших напряжениях все электроны, вылетающие из катода, достигают анода и ток через диод составляет $I_0 = 4\pi r^2 n$. Схематичный вид зависимости $I(U)$ показан на рис. 183.

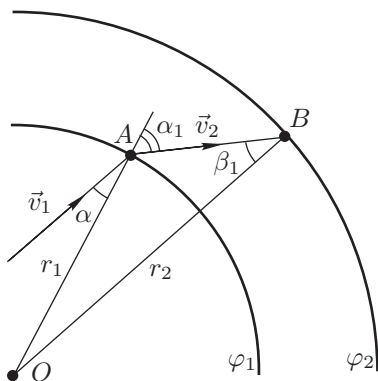


Рис. 182

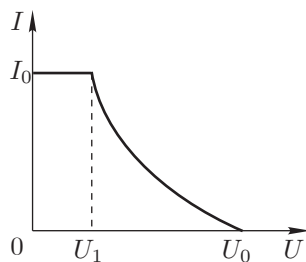


Рис. 183

Задача 94. Электрическая сеточка (2007 год)

1. Поскольку внутренние сопротивления амперметров малы, при расчёте R_{BC} амперметры можно заменить на проводники (рис. 184). Потенциалы точек B_1, B_2, B_3, B_4, C_1 и C_2 равны, так как все эти точки соединены между собой проводами. Следовательно, ток пойдёт только через резисторы, непосредственно подключённые к точкам B и C . По свойствам последовательно и параллельно соединённых резисторов находим

$$R_{BC} = R_B + R_C = \frac{R}{4} + \frac{R}{2} = \frac{3}{4}R = 75 \text{ Ом}.$$

2. Сила тока между точками B и C цепи:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_{BC}} = \frac{4\mathcal{E}}{3R} = 320 \text{ мА}.$$

Силы токов через каждый из резисторов, непосредственно соединённых с точкой B или C :

$$I_B = \frac{1}{4}I_0 = 80 \text{ мА}, \quad I_C = \frac{1}{2}I_0 = 160 \text{ мА}.$$

Поскольку ток через другие резисторы не идёт, при расчёте токов через амперметры эти резисторы можно заменить на разрывы цепи (рис. 185).

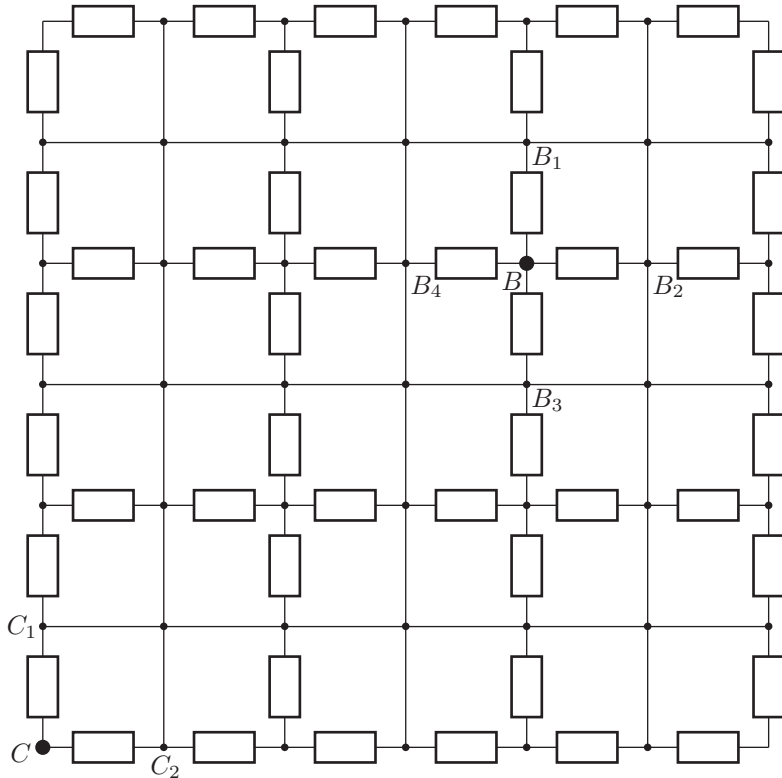


Рис. 184

Схема симметрична относительно прямой BC , поэтому распределение токов в «треугольных» половинках схемы также будет симметричным. Рассмотрим одну половинку схемы (рис. 186), удалив из неё амперметры, имеющие неподключённые выводы, и обозначим через I_1 , I_2 , I_3 , I_4 и I_5 все различные силы токов (силы токов через последовательно соединённые элементы одинаковы). По свойствам последовательного соединения $I_1 = I_B = 80 \text{ мА}$, $I_5 = I_C = 160 \text{ мА}$.

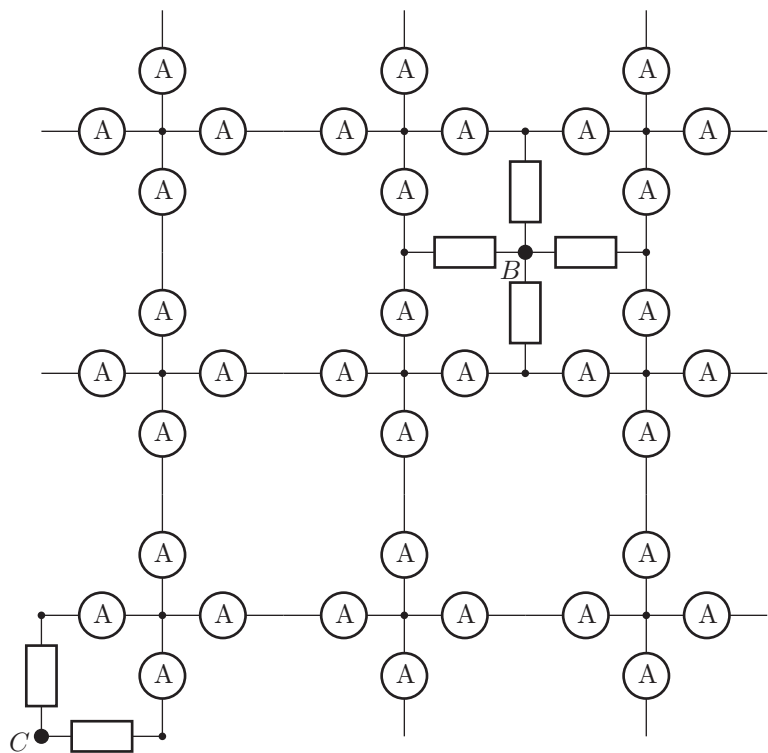


Рис. 185

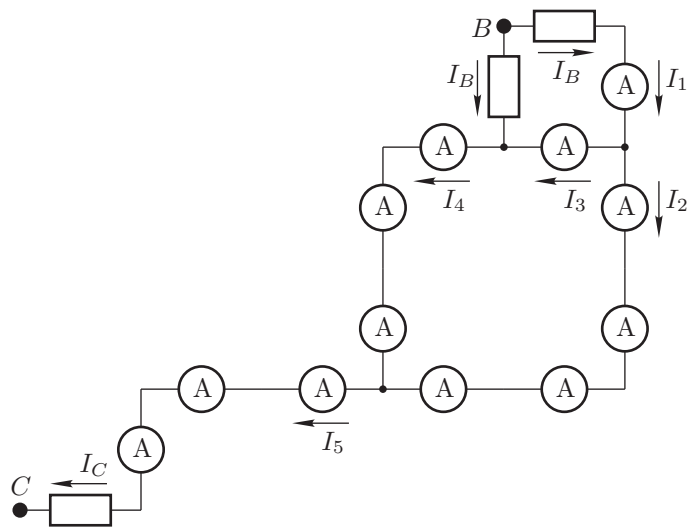


Рис. 186

Для нахождения I_2 , I_3 и I_4 запишем правила Кирхгофа для контура, имеющего вид квадрата из 8 амперметров:

$$0 = 4rI_2 - rI_3 - 3rI_4, \quad I_B = I_2 + I_3, \quad I_C = I_2 + I_4,$$

где r — внутреннее сопротивление амперметра. Решая систему, находим

$$I_2 = \frac{7}{32}I_0 = 70 \text{ мА}, \quad I_3 = \frac{1}{32}I_0 = 10 \text{ мА}, \quad I_4 = \frac{9}{32}I_0 = 90 \text{ мА}.$$

Окончательный ответ приведён на рис. 187.

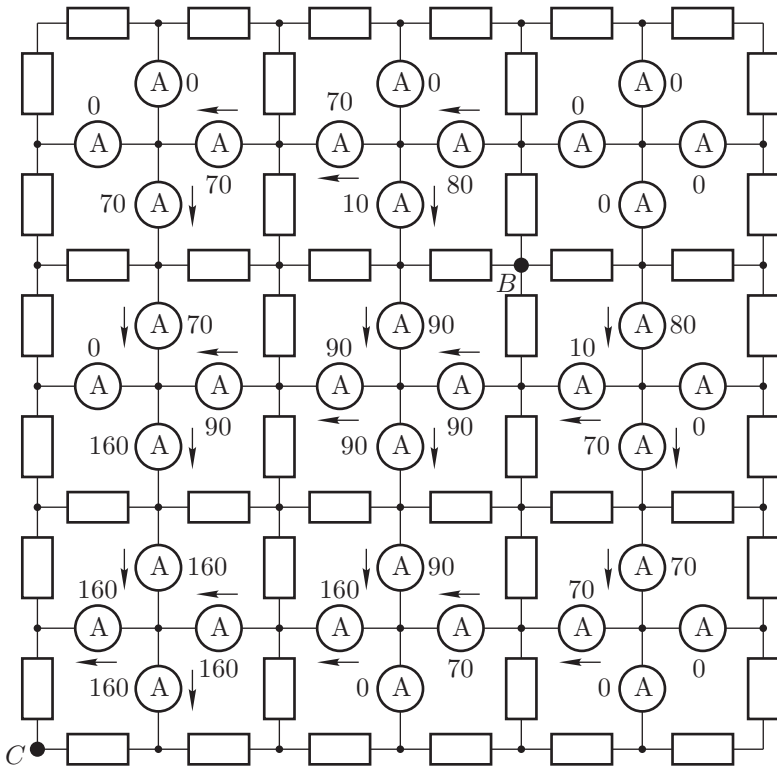


Рис. 187

Примерная система оценивания

Ответ для R_{BC} в общем виде	1
Численный ответ для R_{BC}	1
Упрощение схемы для нахождения токов	1
Указание всех токов силой 0 мА	1
Указание всех токов силой 80 мА	1
Указание всех токов силой 160 мА	1
Запись правил Кирхгофа	1

Указание всех токов силой 10 мА	1
Указание всех токов силой 70 мА	1
Указание всех токов силой 90 мА	1

При указании не всех или лишних токов заданной силы балл не ставится.

Задача 95. Диск Корбино (2007 год)

1. Кольца являются хорошими проводниками, а потому задают две эквипотенциальные поверхности вне зависимости от места подключения к ним проводов от источника. Следовательно, в силу симметрии достаточно найти зависимость E от расстояния r до центра диска. Пусть e — заряд электрона, n — концентрация электронов, участвующих в создании тока, v — средняя скорость установившегося движения электронов, тогда плотность тока вычисляется по формуле

$$j = env = en\mu E, \quad (231)$$

причём вектор напряжённости направлен вдоль радиуса, как и ток. В стационарном режиме в образце толщиной h сила тока $I = j \cdot 2\pi rh = 2\pi hen\mu \cdot Er$ не зависит от r , поэтому $E = A/r$, где A — константа, определяемая из условия, что разность потенциалов между кольцами равна U :

$$\int_{r_1}^{r_2} E dr = A \ln \frac{r_2}{r_1} = U,$$

откуда

$$E = \frac{U}{\ln(r_2/r_1)} \cdot \frac{1}{r}.$$

2. Изменение сопротивления между кольцами при приложении внешнего магнитного поля обусловлено отличием радиальной компоненты плотности тока $j_{\parallel}$ от определяемой выражением (231) величины j в отсутствие поля. Из-за силы Лоренца электроны начнут двигаться по искривлённым траекториям, имея ненулевые радиальную $v_{\parallel}$ и тангенциальную $v_{\perp}$ составляющие скорости (рис. 188). Средняя скорость установившегося движения электрона в образце $\vec{v} = \mu \vec{F}/e$, где $\vec{F}$ — суммарная внешняя сила, действующая на электрон. В частном случае, когда есть только электрическое поле, это выражение сводится к формуле, приведённой в условии. Учитывая это, найдём проекции скорости:

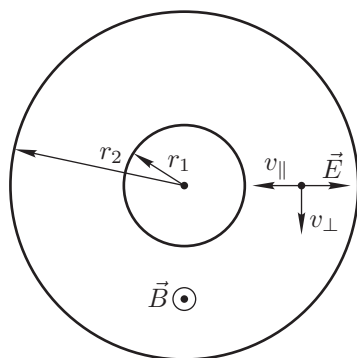


Рис. 188

$$v_{\parallel} = \mu(E - v_{\perp} B), \quad v_{\perp} = \mu v_{\parallel} B,$$

откуда

$$v_{\parallel} = \frac{\mu E}{1 + \mu^2 B^2}, \quad \text{а} \quad j_{\parallel} = en v_{\parallel} = \frac{en \mu E}{1 + \mu^2 B^2}.$$

Сравнивая $j_{\parallel}$ с j в отсутствие поля, видим, что при неизменном напряжении U ток уменьшился в $(1 + \mu^2 B^2)$ раз, следовательно, сопротивление возросло в то же число раз:

$$R = R_0(1 + \mu^2 B^2).$$

Примерная система оценивания

Выражение для j	1
Доказательство пропорции $E \sim 1/r$	1
Ответ для E	2
Выражение для $v_{\parallel}$	2
Выражение для $v_{\perp}$	2
Ответ для R	2

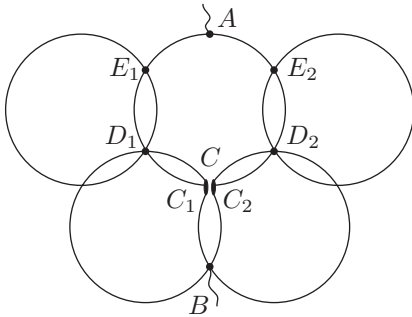


Рис. 189

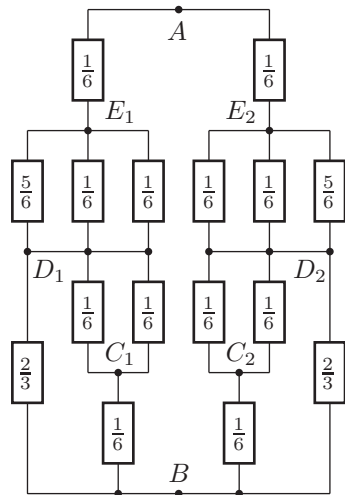


Рис. 190

Задача 96. Олимпийская эмблема (2008 год)

В силу симметрии схемы относительно оси AB узел C можно разделить на два (рис. 189). Изобразим эквивалентную схему (рис. 190), на которой буквами обозначены соответствующие узлы, а численные значения сопротивлений указаны в единицах r . Пользуясь свойствами последовательного и параллельного соединений, найдём сопротивления участков цепи:

$$R_{AE_1} = R_{AE_2} = \frac{1}{6}r, \quad R_{E_1D_1} = R_{E_2D_2} = \frac{5}{66}r, \quad R_{D_1B} = R_{D_2B} = \frac{2}{11}r.$$

Находим искомое общее сопротивление:

$$R = \frac{1}{2} (R_{AE_1} + R_{E_1D_1} + R_{D_1B}) = \frac{7}{33}r.$$

Примерная система оценивания

Разделение узла C	2
Эквивалентная схема	3
Ответ для R	5

Задача 97. Заземлённый контур (2008 год)

Рассмотрим проводящую сферу и Землю как две обкладки конденсатора некоторой ёмкостью C_0 и перерисуем схему (рис. 191). Для нахождения C_0 мысленно поместим на сферу заряд q , тогда разность потенциалов сферы и бесконечно удалённой точки будет $U = q/(4\pi\epsilon_0 r)$, откуда

$$C_0 = \frac{q}{U} = 4\pi\epsilon_0 r.$$

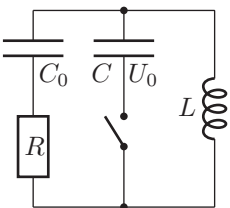


Рис. 191

Непосредственно перед замыканием ключа напряжение на конденсаторе C_0 было равно нулю, так как колебаний в цепи не было.

1. Поскольку сопротивление R мало, можно считать конденсаторы соединёнными параллельно, тогда

$$T = 2\pi\sqrt{L(C + C_0)} = 2\pi\sqrt{L(C + 4\pi\epsilon_0 r)}.$$

2. Сразу после замыкания ключа начальный заряд $q_0 = CU_0$ конденсатора C распределится по обоим конденсаторам, поэтому напряжение на них будет

$$U_1 = \frac{q_0}{C + C_0}.$$

Поскольку R мало, это произойдёт за время, много меньшее периода колебаний, и можно считать, что колебания начнутся уже после перераспределения зарядов. Отметим, что за счёт большой силы тока через резистор в течение этого малого времени выделится существенное количество теплоты, поэтому ошибочно считать начальную энергию колебаний равной $CU_0^2/2$.

А вот выделением тепла на резисторе в течение первой четверти периода можно пренебречь, поэтому из закона сохранения энергии

$$\frac{(C + C_0)U_1^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{2}$$

находим

$$I_{\max} = U_1\sqrt{\frac{C + C_0}{L}} = \frac{CU_0}{\sqrt{L(C + 4\pi\epsilon_0 r)}}.$$

В дальнейшем сила тока будет убывать из-за потерь энергии на резисторе.

3. Пусть I_0 — сила тока через катушку в какой-то из моментов времени, когда конденсаторы разряжены, тогда запасённая в цепи энергия $W = LI_0^2/2$, а действующее значение силы тока в течение рассматриваемого периода $I_e = I_0/\sqrt{2}$. Силы токов через каждый из конденсаторов пропорциональны их амплитудным зарядам, которые в свою очередь пропорциональны ёмкостям, так как сопротивление R мало и можно пренебречь различием напряжений на конденсаторах. Отсюда найдём действующее значение силы тока через резистор в течение рассматриваемого периода:

$$I = I_e \cdot \frac{C_0}{C + C_0}$$

и потери энергии:

$$\Delta W_T = I^2 R T = \frac{C_0^2 I_0^2}{2(C + C_0)^2} \cdot R \cdot 2\pi \sqrt{L(C + C_0)}.$$

Найдём добротность:

$$Q = \frac{2\pi W}{\Delta W_T} = \frac{L(C + C_0)^2}{C_0^2 R \sqrt{L(C + C_0)}} = \frac{1}{R} \left(\frac{C}{4\pi\epsilon_0 r} + 1 \right)^2 \sqrt{\frac{L}{C + 4\pi\epsilon_0 r}}.$$

Примерная система оценивания

Замена сферы и заземления на эквивалентный конденсатор	1
Ответ для T	2
Ответ для $I_{\max}$	3
Ответ для Q	4

Задача 98. Заряженный ртутный пузырь (2009 год)

Поскольку трубочка оставалась открытой с обоих концов, давление воздуха внутри и снаружи пузыря одинаковое. Значит, силы поверхностного натяжения должны уравниваться силами электростатического отталкивания. Границ раздела у оболочки пузыря две, а внутренний и внешний радиусы можно считать одинаковыми, поэтому можем найти давление за счёт поверхностного натяжения:

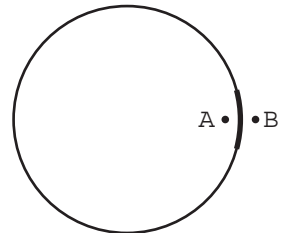


Рис. 192

$$P_1 = 2 \cdot \frac{2\sigma}{r} = \frac{4\sigma}{r}.$$

Из формулы для потенциала $U = q/(4\pi\epsilon_0 r)$ выразим общий заряд пузыря $q = 4\pi\epsilon_0 r U$, который будет равномерно распределён по его внешней поверхности (влиянием тонкой трубочки пренебрегаем).

Рассмотрим маленький кусочек внешней поверхности пузыря. Напряжённости электрических полей E_A и E_B в точках A и B вблизи кусочка внутри и снаружи от внешней поверхности пузыря (рис. 192) можно представить в виде векторной суммы напряжённости E_0 , создаваемой в месте расположения кусочка всем пузырём за вычетом кусочка, и напряжённости E , создаваемой только кусочком:

$$E_0 - E = E_A = 0, \quad E_0 + E = E_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{U}{r}, \quad \text{откуда} \quad E_0 = \frac{U}{2r}.$$

Пусть ΔS — площадь рассматриваемого кусочка, тогда можно найти его заряд:

$$\Delta q = \frac{q\Delta S}{4\pi r^2} = \frac{\epsilon_0 U \Delta S}{r}$$

и силу, действующую на него со стороны пузыря за вычетом кусочка:

$$\Delta F = E_0 \Delta q = \frac{\epsilon_0 U^2 \Delta S}{2r^2}.$$

Можно определить электростатическое давление

$$P_2 = \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{\epsilon_0 U^2}{2r^2}.$$

В состоянии равновесия должно выполняться равенство $P_1 = P_2$, откуда

$$r = \frac{\epsilon_0 U^2}{8\sigma}.$$

Примерная система оценивания

Выражение для P_1	2
Выражение для q через U	1
Выражение для E_0	2
Выражение для Δq	1
Выражение для ΔF	1
Выражение для P_2	1
Ответ	2

Задача 99. Электрогаз (2010 год)

В первом опыте ионы «налипали» до тех пор, пока их суммарный потенциал не стал нулевым, то есть пока сами они не создали на поверхности шара потенциал U противоположного знака. Поэтому, когда во втором опыте напряжение сняли, каждый ион остался только в поле остальных ионов, создающих потенциал U . Найдём полную энергию взаимодействия ионов:

$$W = \frac{1}{2} \cdot Ne \cdot U, \tag{232}$$

где N — количество «налипших» ионов, e — элементарный заряд. Типичной ошибкой является потеря коэффициента $1/2$, который учитывает, что энергия взаимодействия пары зарядов в равной степени относится к каждому из них.

Поскольку сосуд большой, после разлёта ионов можно пренебречь их взаимодействием и учитывать только их кинетическую энергию (как для одноатомного идеального газа):

$$W = \frac{3}{2}kT \cdot N, \quad (233)$$

где k — постоянная Больцмана. Из сравнения формул (232) и (233) получаем

$$T = \frac{eU}{3k}.$$

Примерная система оценивания

Выражение W через электрическое взаимодействие	5
Выражение W через формулу для идеального газа	3
Ответ	2

Задача 100. Треугольный фрактал (2010 год)

1. Пусть P — периметр наибольшего треугольника, тогда общую длину L использованной проволоки можно найти по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $0,5$, так как периметр каждого следующего треугольника в 2 раза меньше предыдущего:

$$L = P + \frac{P}{2} + \frac{P}{4} + \frac{P}{8} + \dots = \frac{P}{1 - 0,5} = 2P.$$

Длина одной стороны наибольшего треугольника $a = P/3 = L/6$, значит, её сопротивление $r = R_0/6 = 1$ Ом.

2. Добавим к цепи ещё один треугольник, для которого стороны a станут средними линиями (рис. 193). Новая система вложенных треугольников подобна исходной с коэффициентом подобия 2 , следовательно, сопротивление R' между точками A' и B' больше R в то же число раз: $R' = 2R$.

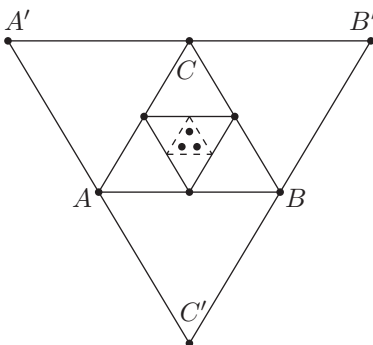


Рис. 193

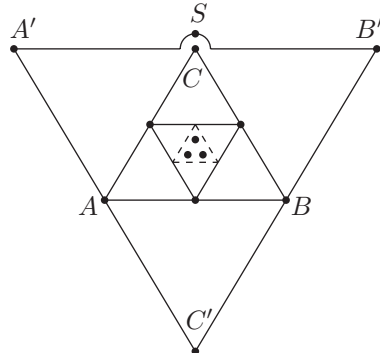


Рис. 194

3. Если разъединить вершину C и середину S стороны $A'B'$ (рис. 194), то сопротивление R' не изменится, так как в силу симметрии цепи точки C и S имеют одинаковые потенциалы. Пользуясь свойствами последовательного и параллельного соединений, по эквивалентной схеме (рис. 195) находим

$$R' = \frac{1}{\frac{1}{r+r} + \frac{1}{r + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{r+r}}}} = \frac{4r(R+r)}{3R+4r}.$$

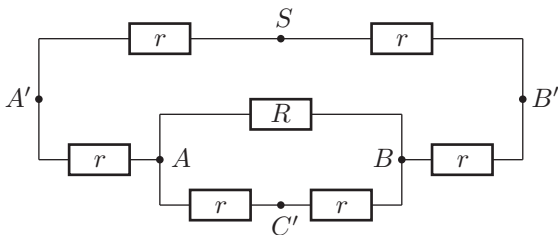


Рис. 195

4. Приравняем выражения для R' , полученные в пунктах 2 и 3:

$$2R = \frac{4r(R+r)}{3R+4r},$$

что после приведения к каноническому виду даёт уравнение

$$3R^2 + 2rR - 2r^2 = 0,$$

откуда

$$R = \frac{\sqrt{7}-1}{3} \cdot r = \frac{\sqrt{7}-1}{18} \cdot R_0 \approx 0,55 \text{ Ом}$$

(второй корень отрицательный и не имеет физического смысла).

Примерная система оценивания

Нахождение r через R_0	2
Идея добавления ещё одного треугольника	1
Связь R' и R через подобие	2
Идея разъединения точек	1
Связь R' и R через эквивалентную схему	2
Ответ в общем виде	1
Численный ответ	1

Задача 101. Алмазный детектор (2010 год)

1. Поскольку $\lambda \ll d$, α -частица теряет в детекторе всю свою кинетическую энергию на образование электронно-дырочных пар в тонком слое вблизи

верхнего электрода. В силу малости R напряжение на детекторе равно ЭДС источника. Напряжённость электрического поля между электродами $E = \mathcal{E}/d$. Дрейфовая скорость носителей заряда в алмазе $v = \mu E = \mu \mathcal{E}/d$. Время прохождения заряда между электродами $t = d/v = d^2/(\mu \mathcal{E})$. Весь образовавшийся заряд пройдёт по измерительной цепи, если электронно-дырочные пары не успеют рекомбинировать, то есть $t < \tau$, откуда

$$\mathcal{E} > \mathcal{E}_{\min} = \frac{d^2}{\mu \tau} = 45 \text{ В.}$$

2. Протёкший через измерительную цепь заряд q можно найти двумя способами. Во-первых, одна α -частица создала в алмазе $N = W/\delta$ электронно-дырочных пар, откуда $q = eN = eW/\delta$. Во-вторых, через резистор R в течение времени T протекал ток силой $I = U/R$, откуда $q = TI = TU/R$. Приравняв эти выражения для q , находим

$$W = \frac{\delta UT}{eR} = 8,45 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} \approx 5,3 \text{ МэВ.}$$

Примечание. Частицы с такой энергией образуются, например, в результате α -распада ядер урана ${}_{92}^{232}\text{U}$.

3. Поскольку $W \ll 4mc^2$, для оценок можно использовать нерелятивистские формулы. Время торможения α -частицы в алмазе составляет

$$t_\alpha \sim \frac{d}{v_\alpha} = \frac{d}{\sqrt{2W/(4m)}} = d\sqrt{\frac{2m}{W}} \approx 0,02 \text{ нс} \ll T,$$

то есть длительность импульса определяется именно временем дрейфа зарядов между электродами, а не временем рождения электронно-дырочных пар. Повторив рассуждения из пункта 1, находим

$$\mathcal{E} = \frac{d^2}{\mu T} = 90 \text{ В.}$$

Примерная система оценивания

Использование приближения $\lambda \ll d$	1
Ответ для $\mathcal{E}_{\min}$ в общем виде	1
Численный ответ для $\mathcal{E}_{\min}$	1
Выражение q через электронно-дырочные пары	1
Выражение q через ток и время	1
Ответ для W в общем виде	1
Численный ответ для W	1
Указание на нерелятивистский случай	1
Проверка смысла T	1
Численный ответ для $\mathcal{E}$	1

Задача 102. Неизвестная цепь (2011 год)

Любая цепь, имеющая два вывода и состоящая только из источников постоянного напряжения и резисторов, эквивалентна одному неидеальному источнику постоянного напряжения с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r .

При подключении к цепи только идеального вольтметра ток через эквивалентный источник не течёт, поэтому $\mathcal{E} = U_0$. Применим закон Ома и свойства последовательного и параллельного соединений резисторов к случаям подключения к цепи:

1) одного резистора —

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r} \cdot R_1 = \frac{U_0 R_1}{R_1 + r}, \quad \text{откуда} \quad r = \frac{U_0 - U_1}{U_1} \cdot R_1;$$

2) двух резисторов —

$$\begin{aligned} U_2 &= I_2 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + r} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \\ &= \frac{\frac{U_0}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{U_0 - U_1}{U_1} \cdot R_1}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{U_0 - U_1}{U_1} \cdot R_1} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{U_0 U_1 R_2}{U_0(R_1 + R_2) - U_1 R_1}. \end{aligned}$$

Примерная система оценивания

Идея об эквивалентности цепи одному неидеальному источнику	1
Выражение для $\mathcal{E}$	1
Применение закона Ома	1
Применение свойств последовательного и параллельного соединений	1
Выражение для r	1
Ответ для U_2	5

Задача 103. Подвижность носителей в графене (2011 год)

Пусть S — площадь графеновой плёнки, тогда ёмкость образованного плёнкой и подложкой плоского конденсатора $C = \varepsilon \varepsilon_0 S/d$, модуль заряда обкладки $q = C\mathcal{E} = \varepsilon \varepsilon_0 S\mathcal{E}/d$, поверхностная плотность этого заряда $\sigma = q/S = \varepsilon \varepsilon_0 \mathcal{E}/d$.

Пусть U — напряжение между выводами омметра, тогда напряжённость поля вдоль плёнки $E = U/L$, скорость электронов $v = \mu E = \mu U/L$, сила тока

$$I = \sigma H v = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mathcal{E}}{d} \cdot H \cdot \frac{\mu U}{L} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mathcal{E} \mu U}{2d}.$$

Из сравнения полученной формулы с законом Ома $I = U/R$ получаем

$$\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mathcal{E} \mu}{2d},$$

откуда

$$\mu = \frac{2d}{\varepsilon\varepsilon_0\mathcal{E}R} \approx 1,9 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с}).$$

Найденное значение превосходит подвижность электронов в кремнии более чем на порядок. При напряжённости электрического поля в проводнике порядка 100 В/м электроны будут двигаться в графене со скоростью около 200 м/с, что в миллион раз больше аналогичной скорости для металлов.

Примерная система оценивания

Выражение для C	1
Выражение для q	1
Выражение для σ	1
Выражение для E	1
Выражение для I	1
Ответ в общем виде	3
Численный ответ	2

Задача 104. Простенькая схемка (2012 год)

Установление постоянного тока через амперметр означает, что вызванные его подключением процессы перезарядки конденсаторов закончились и токи через конденсаторы больше не текут. В этом случае можно упростить схему, заменив каждый конденсатор на разрыв цепи (рис. 196). Для удобства обозначения узлов на схеме введена система координат (x,y) .

Рассмотрим произвольный контур, состоящий из двух источников и двух одинаковых резисторов (одну «клеточку» на схеме). Обозначив ЭДС источников через $\mathcal{E}$, сопротивления резисторов через r и направив вправо токи i_1 и i_2 через верхний и нижний резисторы, запишем второе правило Кирхгофа:

$$\mathcal{E} - \mathcal{E} = ri_1 - ri_2,$$

откуда

$$i_1 = i_2.$$

Это означает, что силы токов через все одинаковые резисторы равны между собой и направлены в одну сторону, поэтому можно обозначить через I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 и I_6 силы токов через резисторы сопротивлениями $R, 2R, 3R, 4R, 5R$ и $6R$ соответственно. Отметим, что обнаруженное равенство сил токов наблюдается только в случае идеальных источников, то есть таких, внутренним сопротивлением которых можно пренебречь по сравнению с R .

Подключим амперметр к двум произвольным узлам $C(x_1; y_1)$ и $D(x_2; y_2)$, не лежащим на одной вертикали (в противном случае амперметр окажется подключённым напрямую к идеальным источникам и сила тока через него устремится к бесконечности). Без ограничения общности можно считать, что узел C лежит левее узла D , то есть $x_1 < x_2$, а ток силой I_A через амперметр

направлен от D к C . Чтобы было проще следить по рисунку за ходом рассуждений, удобно выбрать для себя какие-нибудь конкретные положения точек C и D , например, считать C совпадающей с B , а D — с A .

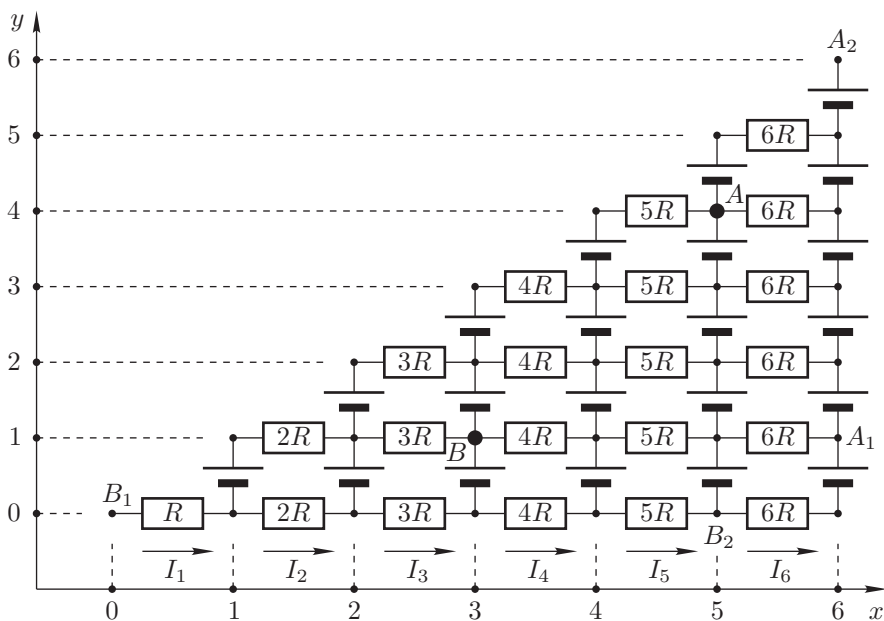


Рис. 196

Вертикальные прямые, проходящие через точки C и D , разделяют схему на три части: левее C , между C и D , правее D . В двух крайних частях цепи токов нет, так как токи через одинаковые резисторы текут в одну сторону, а на краях цепи заряду негде накапливаться и неоткуда взяться, поэтому далее будем рассматривать только среднюю часть цепи — между точками C и D .

Сгруппируем узлы, лежащие на одной вертикали, в обобщённые узлы, тогда токи через источники станут для них внутренними, а внутренние токи не учитываются при записи первого правила Кирхгофа. В обобщённый узел с координатой x_1 втекает ток силой I_A , а вытекают $x_1 + 1$ токов силой I_{x_1+1} ; в обобщённый узел с координатой $x_1 + 1$ втекают те же $x_1 + 1$ токов силой I_{x_1+1} , а вытекают $x_1 + 2$ токов силой I_{x_1+2} ; и т. д. до обобщённого узла с координатой $x_2 - 1$, в который втекают $x_2 - 1$ токов силой I_{x_2-1} и вытекают x_2 токов силой I_{x_2} . Тогда по первому правилу Кирхгофа

$$I_A = (x_1 + 1)I_{x_1+1} = (x_1 + 2)I_{x_1+2} = \dots = (x_2 - 1)I_{x_2-1} = x_2 I_{x_2},$$

откуда для любого x от $x_1 + 1$ до x_2 включительно находим

$$I_x = \frac{I_A}{x}. \quad (234)$$

Рассмотрим следующий контур: начинаем из узла $D(x_2; y_2)$, проходим через амперметр в узел $C(x_1; y_1)$, проходим через резисторы $(x_1 + 1)R$, $(x_1 + 2)R$, ..., $x_2 R$ по горизонтали до узла с координатой x_2 , проходим через $|y_2 - y_1|$ источников по вертикали до узла D . Запишем для этого контура второе правило Кирхгофа

$$(y_2 - y_1) \cdot \mathcal{E} = (x_1 + 1)R \cdot I_{x_1+1} + (x_1 + 2)R \cdot I_{x_1+2} + \dots + x_2 R \cdot I_{x_2},$$

откуда после подстановки выражения (234) получим

$$(y_2 - y_1)\mathcal{E} = (x_2 - x_1)RI_A.$$

Амперметр показывает абсолютную величину силы тока, поэтому

$$I_A = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (235)$$

где Δx и Δy — модули разностей соответствующих координат точек подключения амперметра.

Используя выражение (235) и численные данные из условия, запишем

$$\frac{I_{A2}}{I_{A1}} = \frac{\Delta x_1 \cdot \Delta y_2}{\Delta x_2 \cdot \Delta y_1} = 36, \quad (236)$$

где Δx_1 , Δy_1 , Δx_2 , Δy_2 — модули разностей соответствующих координат точек подключения амперметра в первом и втором опытах соответственно. Поскольку все модули разностей координат являются натуральными числами от 1 до 6, условие (236) может быть выполнено только при $\Delta x_1 = \Delta y_2 = 6$ и $\Delta x_2 = \Delta y_1 = 1$. Следовательно, в первом опыте амперметр был подключен к точкам $A_1(6; 1)$ и $B_1(0; 0)$, а во втором — к $A_2(6; 6)$ и $B_2(5; 0)$.

Используя данные первого или второго опыта, из формулы (235) находим

$$\frac{\mathcal{E}}{R} = I_{A1} \cdot \frac{\Delta x_1}{\Delta y_1} = I_{A2} \cdot \frac{\Delta x_2}{\Delta y_2} = 120 \text{ мА}.$$

Для вычисления силы тока через амперметр, подключённый к точкам $A(5; 4)$ и $B(3; 1)$, подставим в выражение (235) значения $\Delta x_3 = 2$ и $\Delta y_3 = 3$:

$$I_{A3} = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{\Delta y_3}{\Delta x_3} = 180 \text{ мА}.$$

Примерная система оценивания

Упрощение схемы с помощью удаления конденсаторов	1
Обоснование равенства сил токов через одинаковые резисторы	1
Применение обоих правил Кирхгофа для общего случая	2
Получение общей формулы для силы тока через амперметр	1

Нахождение точек подключения в первом и втором опытах	2
Численный ответ для I_{A3}	3

Задача 105. Микроэлектромеханическое устройство (2012 год)

Малое сопротивление цепи позволяет считать, что все процессы перезарядки конденсатора происходят очень быстро, так что смещением верхней пластины за это время можно пренебречь.

1. Ёмкость плоского конденсатора $C = \varepsilon_0 S/d$. Заряд верхней пластины $q = CU_1 = \varepsilon_0 SU_1/d$. Напряжённость однородного электрического поля между обкладками конденсатора $E = U_1/d$, причём каждая из пластин обеспечивает половину этой величины. Найдём искомую силу:

$$F_1 = q \cdot \frac{E}{2} = \frac{\varepsilon_0 SU_1^2}{2d^2}.$$

В следующих пунктах будем считать, что пружина изначально не растянута и сила тяжести на верхнюю пластину не действует. Это упрощение не повлияет на результаты, так как силу упругости пружины можно представить в виде суммы её начального значения и её изменения, а поскольку согласно условию равновесия начальная сила упругости равна силе тяжести, они взаимно уничтожатся во всех уравнениях, в том числе при расчёте работы.

2. Поскольку напряжение U увеличивают медленно, расстояние x между пластинами уменьшается тоже медленно и можно считать, что электрическая сила в каждый момент времени уравнивается силой упругости:

$$\frac{\varepsilon_0 SU^2}{2x^2} = k(d - x). \quad (237)$$

Данное уравнение является кубическим относительно x , поэтому для его анализа применим графический метод. Графиком правой части уравнения является прямая, а левой — семейство квадратичных гипербол, зависящих от параметра U . На рис. 197 показаны прямая и три характерные гиперболы для значений U , равных V_1 , V_2 , V_3 и удовлетворяющих условию $V_1 < V_2 < V_3$.

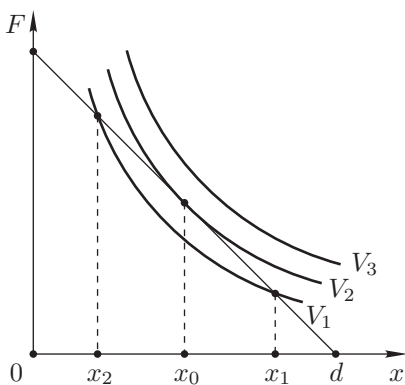


Рис. 197

При $U = V_1$ уравнение имеет два корня (графики пересекаются при x_1 и x_2), причём x_1 соответствует устойчивому положению равновесия, а x_2 — неустойчивому, что определяется по направлению результирующей силы, возникающей при небольшом отклонении от положения равновесия. Отсюда следует, что при плавном уменьшении x от значения d система окажется в состоянии x_1 и уже не попадёт в состояние x_2 .

По мере увеличения U от V_1 до V_2 точки x_1 и x_2 приближаются друг к другу и сходятся в точке x_0 , соответствующей случаю касания гиперболы и прямой. Положение равновесия x_0 является устойчивым при увеличении x и неустойчивым при уменьшении x , поэтому при $U = V_2$ подвижная пластина конденсатора начнёт двигаться ускоренно и пластины схлопнутся. Таким образом, искомое напряжение $U_2 = V_2$. Отметим, что при $U = V_3$ положений равновесия уже нет, так что пластины начнут схлопываться ускоренно при любом x .

Для упрощения преобразований перепишем уравнение (237) в виде

$$\frac{a}{2x^2} = d - x, \quad \text{где} \quad a = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{k}.$$

В точке касания графиков функций должны быть равны не только значения функций, но и значения их производных, то есть

$$\frac{a_0}{2x_0^2} = d - x_0, \quad -\frac{a_0}{x_0^2} = -x_0, \quad \text{где} \quad a_0 = \frac{\varepsilon_0 S U_2^2}{k}.$$

Решая систему из этих двух уравнений, находим

$$x_0 = \frac{2}{3}d = \sqrt[3]{a_0},$$

откуда

$$U_2 = \sqrt{\frac{8kd^3}{27\varepsilon_0 S}}.$$

Возможны и другие способы рассуждений, например нахождение U_2 как максимального значения функции $U(x)$ с аналогичным анализом устойчивости положений равновесия.

3. После размыкания цепи заряд на конденсаторе будет сохраняться, а потому напряжённость поля и электрическая сила, действующая на подвижную пластину, изменяться не будут. Пользуясь результатом первого пункта, находим

$$F_3 = \frac{\varepsilon_0 S U_3^2}{2d^2} = \text{const.}$$

При минимальном значении U_3 пластина сначала будет ускоряться, а затем замедляться из-за постепенного растяжения пружины, так что пластины схлопнутся с пренебрежимо малой скоростью. Из закона сохранения энергии $F_3 d = kd^2/2$ получаем

$$U_3 = \sqrt{\frac{kd^3}{\varepsilon_0 S}}.$$

Отметим, что в данном случае потребовалось большее напряжение, чем во втором пункте, что вполне логично, так как в предыдущем случае по мере сближения пластин их заряд, напряжённость поля и сила взаимодействия существенно возрастали за счёт действия источника.

4. В этом пункте мы наоборот ожидаем получить меньшее напряжение, чем во втором случае, так как пластина может преодолеть участок между положениями равновесия x_1 и x_2 за счёт кинетической энергии, накопленной при разгоне на участке от d до x_1 .

Аналогично первому пункту находим электрическую силу, действующую на подвижную пластину, находящуюся на расстоянии x от неподвижной:

$$F_4 = \frac{\varepsilon_0 S U_4^2}{2x^2}.$$

Работа этой силы на участке от d до x :

$$A = \int_d^x \left(-\frac{\varepsilon_0 S U_4^2}{2x^2} \right) dx = \frac{\varepsilon_0 S U_4^2}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d} \right).$$

С помощью закона сохранения энергии выразим кинетическую энергию:

$$W = A - \frac{k(d-x)^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U_4^2 (d-x)}{2xd} - \frac{k(d-x)^2}{2}.$$

Пластина не остановится, если в каждой точке $x \in (0; d)$ будет выполнено условие $W \geq 0$, откуда после упрощения получаем неравенство

$$x^2 - d \cdot x + \frac{\varepsilon_0 S U_4^2}{kd} \geq 0.$$

Графиком левой части является парабола с вершиной $x_4 = d/2$, лежащей в рассматриваемом промежутке, поэтому для нахождения минимального U_4 достаточно наложить условие на дискриминант:

$$D = d^2 - \frac{4\varepsilon_0 S U_4^2}{kd} = 0,$$

откуда

$$U_4 = \sqrt{\frac{kd^3}{4\varepsilon_0 S}}.$$

Примечание. Обратите внимание на упрощение рассуждений за счёт исключения из рассмотрения силы тяжести и начального растяжения пружины: это стандартный приём, полезный во многих подобных задачах.

Примерная система оценивания

Ответ для F_1	1
Получение кубического уравнения для x при заданном U	1
Качественный анализ уравнения	1
Ответ для U_2	2
Ответ для U_3	2

Получение выражения для A	1
Ответ для U_4	2

Задача 106. Униполярный электродвигатель (2012 год)

Ротор разгоняется механическим моментом силы Ампера, возникающим в результате взаимодействия радиального тока с магнитным полем диска. С учётом полярности подключения источника и направления магнитного поля, отмеченного на рисунке в условии, отсюда сразу следует ответ на первый вопрос: вращение будет происходить против часовой стрелки, если смотреть сверху. По мере разгона ротора увеличивается ЭДС индукции, направленная в соответствии с правилом Ленца против ЭДС источника, что приводит к уменьшению тока в цепи и момента силы Ампера. Когда момент силы Ампера сравняется с моментом силы трения, разгон ротора прекратится и он продолжит вращение с установившейся частотой ν .

Для расчёта ЭДС индукции рассмотрим движение пробного заряда q вдоль радиуса AC при вращении ротора с угловой скоростью ω (рис. 198). Пусть x — расстояние от заряда до оси вращения в рассматриваемый момент времени, тогда тангенциальная проекция скорости заряда $v_y = \omega x$, радиальная проекция силы Лоренца $F_x = qv_y B = qB\omega x$, работа сторонних сил против силы Лоренца

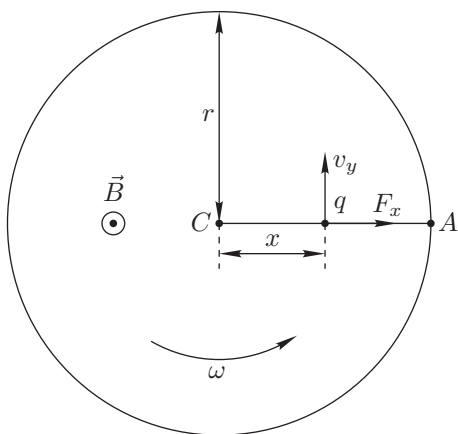


Рис. 198

$$A = \int_0^r F_x(x) dx = \frac{1}{2} q B \omega r^2,$$

ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = \frac{A}{q} = \frac{1}{2} B \omega r^2.$$

В отсутствие трения ротор будет вращаться с такой установившейся угловой скоростью $\omega_{\max}$, при которой ток в цепи прекратится из-за равенства ЭДС источника и ЭДС индукции:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} B \omega_{\max} r^2, \quad \text{откуда} \quad \omega_{\max} = \frac{2\mathcal{E}}{B r^2}.$$

Таким образом,

$$\nu_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{2\pi} = \frac{\mathcal{E}}{\pi B r^2} \approx 1200 \text{ Гц}.$$

Рассмотрим теперь случай с трением. По закону Ома находим силу тока в цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_i}{R} = \frac{2\mathcal{E} - B\omega r^2}{2R}.$$

Расстояние x от оси ротора до элемента тока $I dx$ является плечом соответствующей силы Ампера, поэтому можем найти суммарный момент силы Ампера:

$$M = \int_0^r x \cdot I dx \cdot B = \frac{Br^2}{4R} (2\mathcal{E} - B\omega r^2).$$

В процессе установившегося вращения моменты сил Ампера и трения компенсируют друг друга:

$$\frac{Br^2}{4R} (2\mathcal{E} - B\omega r^2) = F_0 r,$$

откуда

$$\omega = \frac{2Br\mathcal{E} - 4F_0 R}{B^2 r^3}.$$

Окончательно находим

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{Br\mathcal{E} - 2F_0 R}{\pi B^2 r^3} \approx 120 \text{ Гц}.$$

Отметим, что выражение для ν тождественно равно $\nu_{\max}$ при $F_0 = 0$, что может использоваться как проверка общего ответа для предельных случаев или как альтернативный способ нахождения $\nu_{\max}$.

Примечание. Может показаться, что рассмотренный двигатель не должен работать: в отличие от традиционного устройства, в предлагаемой модели ротор смещён со статором! Это напоминает барона Мюнхгаузена, вытаскивающего себя из болота за собственные волосы: механический момент возникает в результате взаимодействия магнитного поля ротора с током, текущим в нём самом! Однако эксперимент полностью подтверждает теоретическое решение и наглядно иллюстрирует выполнение закона сохранения момента импульса: если всю конструкцию подвесить на нитке, то источник тока с подводящими проводами будет крутиться в сторону, противоположную вращению ротора.

Примерная система оценивания

Определение направления вращения ротора	1
Выражение для ЭДС индукции	2
Ответ для $\nu_{\max}$ в общем виде	1
Численный ответ для $\nu_{\max}$	1
Выражение для момента силы Ампера	2
Ответ для ν в общем виде	2
Численный ответ для ν	1

Решения задач. Оптика

Задача 107. Зеркала (1996 год)

Из геометрических соображений следует, что предмет S находится перед передним фокусом F линзы, а задний её фокус совпадает с точкой касания зеркал C (рис. 199). Интересующие нас световые лучи сначала проходят через линзу, затем отражаются от пары зеркал, после чего снова проходят через линзу в обратном направлении. Для нахождения изображения S' вычислим положения промежуточных изображений, даваемых по отдельности линзой и зеркалами по мере прохождения лучей через систему.

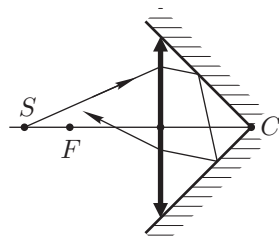


Рис. 199

Для иллюстрации рассуждений на рис. 200 показаны продолжения лучей, создающих промежуточные изображения S_1 , S_2 и S_3 , а на рис. 201 — вспомогательные построения для поиска изображений. Точки O , A и B — это соответственно оптический центр линзы и её точки касания с каждым из зеркал.

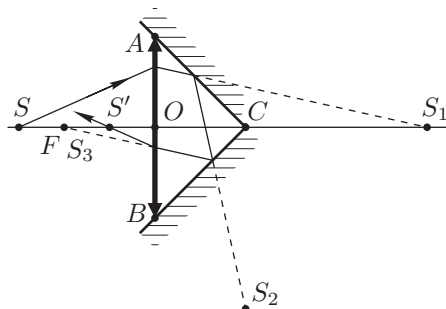


Рис. 200

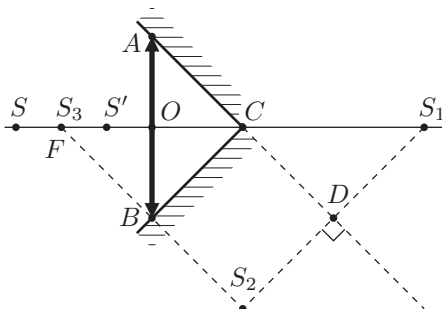


Рис. 201

1. Пусть a и b — расстояния от линзы до предмета и до изображения соответственно, тогда по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

откуда

$$b = \frac{af}{a - f}, \quad (238)$$

причём значение любого из расстояний (f , a , b) в этой формуле может быть отрицательным: $f < 0$ означает рассеивающую линзу, $a < 0$ — мнимый предмет, $b < 0$ — мнимое изображение. Точка S_1 — изображение источника S в линзе без учёта зеркал, поэтому из формулы (238) при $a = SO = 1,5f$ получаем $OS_1 = b = 3f$.

2. Зеркало даёт изображение, симметричное предмету относительно плоскости зеркала, причём это свойство применимо как к действительным, так и к мнимым предметам. Точка S_2 — изображение предмета S_1 в зеркале AC без учёта второго зеркала, значит, построив к плоскости зеркала AC перпендикуляр S_1D и продолжив его на такое же расстояние, находим S_2 .

3. Рассуждая аналогично, строим точку S_3 — изображение предмета S_2 в зеркале BC без учёта линзы. Последовательное применение двух отражений относительно взаимно перпендикулярных прямых эквивалентно одному отражению относительно их точки пересечения (вспомните свойство центральной симметрии графика нечётной функции), поэтому $S_3C = CS_1$, откуда

$$S_3O = S_3C - OC = CS_1 - OC = OS_1 - 2OC = 3f - 2f = f,$$

то есть изображение S_3 совпадает с передним фокусом F линзы.

4. Искомая точка S' является действительным изображением мнимого предмета S_3 , поэтому из формулы (238) при $a = -S_3O = -f$ получаем $S'O = b = f/2$.

В самом начале решения был выбран луч, который сперва отражается от зеркала AC , а потом — от BC , однако существуют лучи, которые испытывают отражения в обратном порядке. В данном случае из симметрии ясно, что они пересекутся в той же точке, однако при другом расположении зеркал могли бы возникнуть два конечных изображения. Таким образом, окончательный ответ: изображение будет на расстоянии $f/2$ перед линзой.

Примерная система оценивания

Качественный анализ хода лучей	2
Нахождение промежуточного изображения S_1	2
Нахождение промежуточных изображений S_2 и S_3	3
Рассмотрены случаи с разным порядком отражений	1
Ответ	2

Задача 108. Котлован (1999 год)

Человек, находящийся в точке A (рис. 202), оценивает глубину водоёма по двум близким лучам, идущим из точек B и C . Ему кажется, что лучи исходят не из точки S , а из точки S_1 , и поэтому видимая глубина водоёма h_1 . Изменения направлений лучей на поверхности воды подчиняются закону Снеллиуса:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} = n \tag{239}$$

где n — показатель преломления воды, а углы α , β , α' и β' показаны на рис. 202. Пусть Δ — длина отрезка BC . Тогда из прямоугольных треугольников, показанных на рис. 202, следует, что

$$\Delta = h(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta') = h_1(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'). \tag{240}$$

Углы α и α' , β и β' мало отличаются, поэтому, если $\alpha - \alpha' = \Delta\alpha$ и $\beta - \beta' = \Delta\beta$, то

$$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta' \approx \frac{\Delta\beta}{\cos^2 \beta}, \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha' \approx \frac{\Delta\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Подставляя полученные соотношения в формулу (240), находим

$$h_1 = h \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}.$$

Запишем закон Снеллиуса (239) для маленьких приращений углов:

$$\cos \alpha \Delta\alpha = n \cos \beta \Delta\beta,$$

откуда

$$h_1 = \frac{h}{n} \cdot \frac{\cos^3 \alpha}{\cos^3 \beta} = \frac{h}{n} \cdot \frac{\cos^3 \alpha}{\left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}\right)^{3/2}}. \quad (241)$$

Для угла α из рис. 202 находим

$$\sin \alpha = \frac{x - OB}{\sqrt{(x - OB)^2 + H^2}} \approx \frac{x}{\sqrt{x^2 + H^2}},$$

так как $OB \ll x$ при малых h . Осталось подставить полученное выражение для $\sin \alpha$ в формулу (241) и произвести алгебраические преобразования:

$$h_1 = \frac{n^2 h H^3}{((n^2 - 1)x^2 + n^2 H^2)^{3/2}}.$$

График этой зависимости, построенный с помощью MathCAD, представлен на рис. 203. Видно, что вдали от обрыва водоём кажется более мелким.

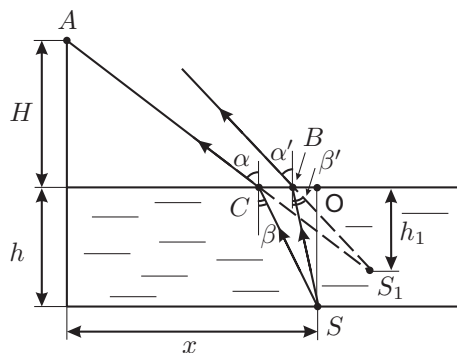


Рис. 202

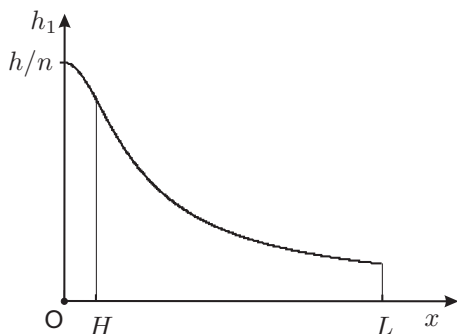


Рис. 203

Задача 109. Световой зайчик (2000 год)

Если бы скорость света была бесконечно большой, то человек видел бы световое пятно в том месте, где луч фонарика пересекает стену. Из-за конечности скорости распространения света человек увидит в этом месте зайчик спустя некоторое время. В этот момент луч фонарика будет уже направлен в иную точку.

Найдём скорость зайчика с точки зрения наблюдателя:

$$v = \frac{dx}{dt_1}, \quad (242)$$

где v — проекция на ось x скорости зайчика (рис. 204), который наблюдатель видит в момент времени t_1 . Луч фонарика был направлен в эту точку в момент времени t . Время t_1 больше t на величину, необходимую свету для прохождения от A к B и обратно (рис. 204):

$$t_1 = t + \frac{2h}{c \cdot \cos \omega t}. \quad (243)$$

Поскольку переменные t_1 и t связаны соотношением (243), целесообразно представить уравнение (242) в виде

$$v = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dt_1} = \frac{dx}{dt} \left(\frac{dt_1}{dt} \right)^{-1}. \quad (244)$$

Из рис. 204 видно, что

$$x = h \operatorname{tg} \omega t. \quad (245)$$

Продифференцировав функции (243) и (245), найдём производные, входящие в уравнение (244), и после их подстановки получим

$$v = \frac{c \omega h}{c \cdot \cos^2 \omega t + 2 \omega h \sin \omega t}. \quad (246)$$

Формулы (245), (246) и (243) содержат ответы на поставленные в задаче вопросы. Проанализируем полученные соотношения.

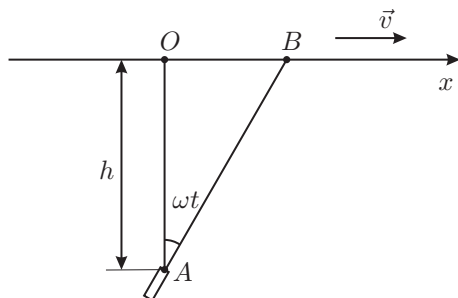


Рис. 204

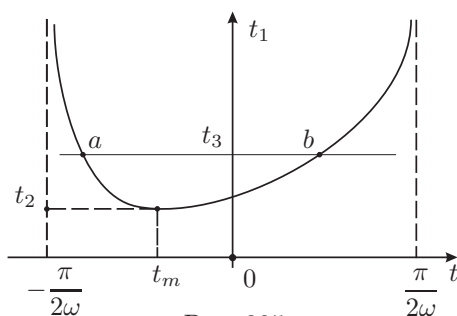


Рис. 205

Изобразим приблизительный график зависимости (243) (рис. 205). Величина t_1 имеет минимальное значение t_2 в точке t_m , для нахождения которой следует приравнять к нулю производную функции $t_1(t)$:

$$\sin \omega t_m = \frac{\omega h}{c} - \sqrt{1 + \left(\frac{\omega h}{c}\right)^2}. \quad (247)$$

По формуле (245) можно найти координату зайчика x_m в момент времени t_2 :

$$x_m = -\frac{h}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(\frac{c}{\omega h}\right)^2 + 1} - 1}. \quad (248)$$

При подстановке выражения (247) в формулу (246) обнаруживаем, что функция $v(t)$ испытывает разрыв в точке t_m , меняя знак. Поведение функции $v(t)$ качественно представлено графиком, изображённым на рис. 206. Сплошными линиями показан график при $\omega h < c/2$, пунктирными — при $\omega h > c/2$. Сопоставляя величины v и t_1 при одинаковых значениях параметра t , можно нарисовать и приближённый график зависимости наблюдаемой скорости зайчика $v(t_1)$ (рис. 207).

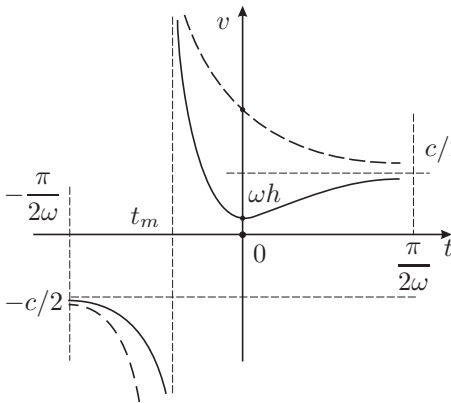


Рис. 206

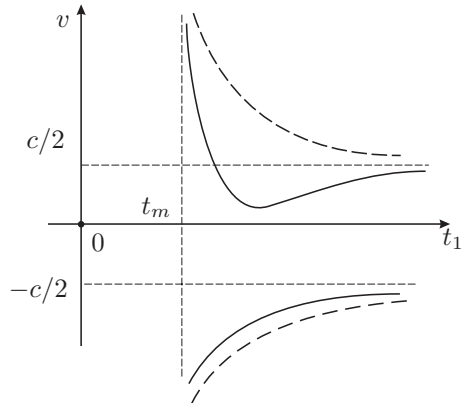


Рис. 207

О каком движении светового зайчика говорят эти графики? Раньше всего наблюдатель увидит зайчик, находящийся в точке x_m в момент времени t_2 . В последующие моменты времени $t_1 = t_3 > t_2$ наблюдатель увидит два зайчика, координаты которых соответствуют точкам a и b на рис. 205. Скорости этих зайчиков направлены в противоположные стороны. При $t_1 \rightarrow \infty$ проекция скорости одного стремится к $c/2$, а другого — к $-c/2$. После следующего прохождения вращающегося луча фонарика через точку x_m появится ещё одна пара разбегающихся зайчиков и так далее.

Не является ли обнаруженное здесь парадоксальное свойство световых зайчиков результатом ошибки данной теоретической модели? Одним из тестов на

ошибочность новых физических теорий служит принцип соответствия. Согласно этому принципу новая теория в предельных частных случаях даёт те же результаты, что и верная старая теория. Релятивистская физика даёт немало парадоксальных результатов, противоречащих «здравому смыслу». Однако она успешно выдерживает испытание принципом соответствия. Испытаем этим принципом результаты данной задачи. Посмотрим, что дают полученные формулы при $c \rightarrow \infty$. Из уравнения (242) следует, что $t_1 = t$, то есть наблюдатель видит зайчик в точке x в тот же момент времени, в который через эту точку проходит луч фонарика. Из формулы (246) следует, что $v = \omega h / \cos^2 \omega t$. Это естественно согласуется с формулой (245), и в этом случае не возникает никаких пар зайчиков. Таким образом, полученные в задаче результаты согласуются с принципом соответствия.

Задача 110. Сферическое зеркало (2001 год)

На рис. 208 показан ход луча, падающего на зеркало на расстоянии x от его оптической оси. Точка O — центр кривизны зеркала. Фокус F удалён от центра на расстояние $OF = R/2$.

Отражённый луч пересекает главную оптическую ось в точке F_x , для которой, как видно из рисунка, $OF_x = \frac{R}{2 \cos \alpha}$. Угол α зависит от x , так как $\sin \alpha = x/R$. Найдём, на каком расстоянии y от главной оптической оси луч пересекает фокальную плоскость. Это нетрудно сделать с помощью рис. 208:

$$y = \left(\frac{R}{2 \cos \alpha} - \frac{R}{2} \right) \operatorname{tg}(2\alpha). \quad (249)$$

В соответствии с условием задачи углы α малы, поэтому можно использовать приближения

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha \quad \text{и} \quad \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2},$$

которые существенно упрощают формулу (249):

$$y \approx \frac{R}{2} \alpha^3 = \frac{x^3}{2R^2}. \quad (250)$$

Чтобы найти среднюю освещённость экрана, следует световой поток, падающий на него, поделить на площадь пятна на экране. Какие же лучи попадают на экран? На зеркало падают лучи, проходящие мимо экрана. Для них

$$r < x < \frac{D}{2}, \quad (251)$$

и, согласно формуле (250),

$$\frac{r^3}{2R^2} < y < \frac{D^3}{16R^2}. \quad (252)$$

Все эти лучи попадают на экран, если он достаточно велик, то есть при

$$r > \frac{D^3}{16R^2}. \quad (253)$$

В этом случае площадь освещённого пятна на экране составляет

$$S_1 = \pi \left(\left(\frac{D^3}{16R^2} \right)^2 - \left(\frac{r^3}{2R^2} \right)^2 \right).$$

Световой поток Φ , падающий на это пятно, найдём по формуле $\Phi = NS_2$, где N — мощность солнечного излучения, приходящегося на единичную площадку, перпендикулярную лучам, а S_2 — площадь так же ориентированной площадки, которую пересекают лучи, попадающие на зеркало. Эта площадь равна

$$S_2 = \pi \left(\left(\frac{D}{2} \right)^2 - r^2 \right).$$

Таким образом, получаем формулу для средней освещённости E светового пятна при условии $r > D^3/(16R^2)$:

$$E = \frac{N \left(\left(\frac{D}{2} \right)^2 - r^2 \right)}{\left(\frac{D^3}{16R^2} \right)^2 - \left(\frac{r^3}{2R^2} \right)^2} = \frac{4R^4 N}{\left(\frac{D}{2} \right)^4 + r^2 \left(\frac{D}{2} \right)^2 + r^4}. \quad (254)$$

Если экран небольшой, то есть $r \leq D^3/(16R^2)$, то на него попадают не все лучи, отражённые зеркалом. Площадь освещённого пятна S_1 в этом случае равна

$$S_1 = \pi \left(r^2 - \left(\frac{r^3}{2R^2} \right)^2 \right).$$

Площадь S_2 в этом случае принимает значение

$$S_2 = \pi(x_1^2 - r^2),$$

где x_1 находится из формулы (250) при подстановке в неё $y = r$: $x_1^3 = 2R^2r$. Зная S_1 и S_2 , находим освещённость E при условии $r \leq D^3/(16R^2)$:

$$E = N \frac{x_1^2 - r^2}{r^2 - \left(\frac{r^3}{2R^2} \right)^2} = N \frac{(2R^2r)^{2/3} - r^2}{r^2 - \left(\frac{r^3}{2R^2} \right)^2}. \quad (255)$$

При $r \ll R$ из полученного выражения находим

$$E \approx 2^{2/3} \cdot N \left(\frac{R}{r} \right)^{4/3},$$

то есть при $r \rightarrow 0$ освещённость неограниченно возрастает. Такое заключение получилось в рамках геометрической оптики, справедливой, когда длина волны света $\lambda \ll D$. Дифракция света приводит к тому, что в фокальной плоскости получается не точка, а пятнышко, что ограничивает величину E . При больших r , изменяющихся в пределах от $D^3/(16R^2)$ до $D/2$, то есть в $8R^2/D^2$ раз, освещённость в соответствии с формулой (254) изменяется всего в 3 раза, что говорит о слабой зависимости E от r . Качественно характер зависимости $E(r)$ отражает рис. 209, на котором

$$E_m = \frac{64}{3} N \left(\frac{R}{D} \right)^4.$$

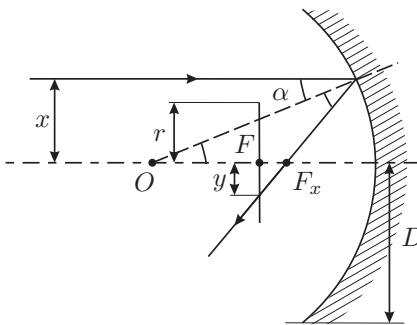


Рис. 208

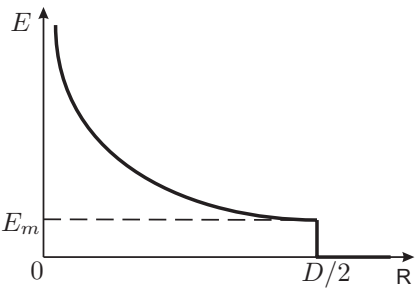


Рис. 209

Задача 111. Аквариум (2004 год)

Прохождение узкого пучка света через участок стенки аквариума можно рассматривать как последовательное преломление на плоско-выпуклой линзе с радиусом кривизны R , на плоско-параллельной пластине толщиной δ и на плоско-вогнутой линзе с радиусом кривизны $R - \delta$ (рис. 210). Прямая, соединяющая вершину рассматриваемого участка P с центром аквариума O , служит главной оптической осью. Рассмотрим луч пучка, падающий параллельно этой оси, и найдём точку его пересечения с осью после прохождения стенки. Эта точка является фокусом.

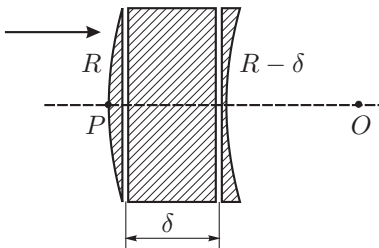


Рис. 210

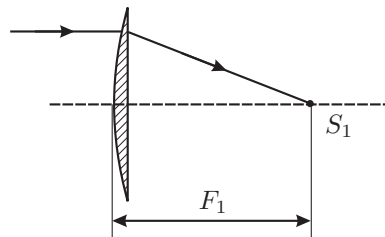


Рис. 211

После преломления на первой линзе луч идёт к точке S_1 (рис. 211), удаление которой от линзы

$$F_1 = \frac{R}{n-1}. \quad (256)$$

Далее луч проходит через плоско-параллельную пластину, смещающую точку пересечения луча с осью на некоторую величину Δ , которую можно найти из треугольника ABC (рис. 212) по теореме синусов:

$$\frac{BC}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha)}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\delta}{\cos \beta \cdot \sin \alpha}.$$

Учитывая что рассматриваются лишь лучи, близкие к оптической оси, так что $\sin \alpha \approx \alpha$, $\sin \beta \approx \beta$, $\cos \alpha \approx \cos \beta \approx 1$, а также $\alpha/\beta \approx n$, из последнего равенства найдём

$$\Delta = \frac{\delta \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta \cdot \sin \alpha} \approx \delta \frac{n-1}{n}. \quad (257)$$

В точку S_2 луч не попадает, поскольку преломляется примыкающей к пластине плоско-вогнутой линзой, фокусное расстояние которой

$$F_2 = -\frac{R - \delta}{n-1}. \quad (258)$$

Дальнейший ход луча показан на рис. 213. Луч выходит из системы так, как будто бы идёт из точки S_3 .

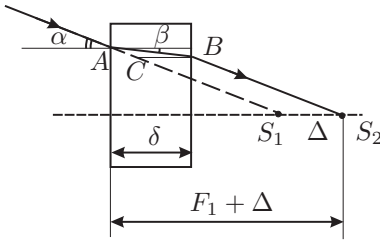


Рис. 212

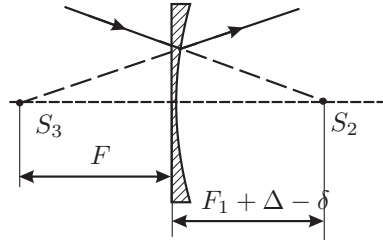


Рис. 213

Расстояние от S_3 до линзы, взятое со знаком «минус», является фокусным расстоянием стенки аквариума F . Для показанной на рис. 213 линзы S_3 является мнимым изображением мнимого источника S_2 . Для нахождения F применим формулу линзы:

$$\frac{1}{F} - \frac{1}{F_1 + \Delta - \delta} = \frac{1}{F_2},$$

или, с учётом формул (256), (257) и (258),

$$\frac{1}{F} = -\frac{n-1}{R-\delta} + \frac{1}{\frac{R}{n-1} + \delta \frac{n-1}{n} - \delta} \approx -\frac{n-1}{nR^2} \delta,$$

поскольку $\delta \ll R$. Итак,

$$F = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{R^2}{\delta} = -5,3 \text{ м},$$

то есть стенка аквариума подобна рассеивающей линзе.

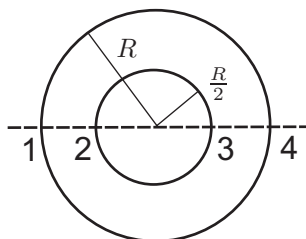


Рис. 214

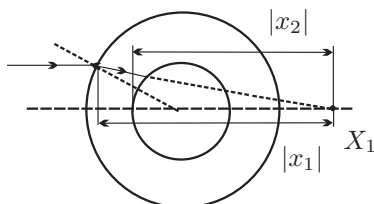


Рис. 215

Найдём фокусное расстояние толстого аквариума. Для этого нужно рассматривать преломление луча на четырёх поверхностях 1, 2, 3 и 4 (рис. 214). Нужно применить формулу сферической поверхности

$$\frac{n_1}{a} - \frac{n_2}{b} = \frac{n_1 - n_2}{R}. \quad (259)$$

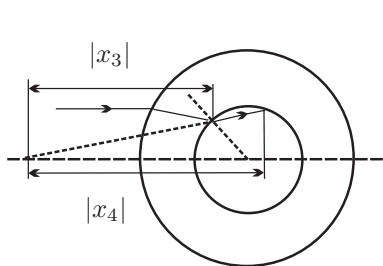


Рис. 216

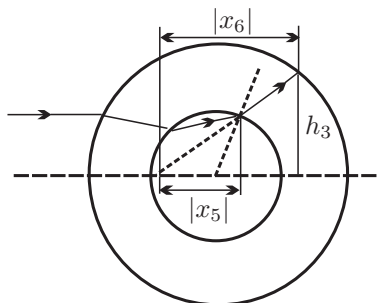


Рис. 217

Луч падает на первую поверхность параллельно главной оптической оси, поэтому $a = -\infty$, $b = x_1$ — расстояние от первой поверхности до точки схождения преломлённых лучей X_1 , $n_1 = 1$, $n_2 = n$ (рис. 215). Из формулы (259) получаем

$$\frac{n}{x_1} = \frac{n-1}{R},$$

откуда

$$x_1 = \frac{n}{n-1} R.$$

Найдём расстояние от точки X_1 до второй поверхности (рис. 215):

$$x_2 = x_1 - \frac{R}{2} = \frac{n+1}{2(n-1)}R.$$

Применяем формулу (259) для второй поверхности (рис. 216), учитывая, что в этом случае $n_1 = n$, $n_2 = 1$:

$$\frac{n}{x_2} - \frac{1}{x_3} = \frac{n-1}{R/2}.$$

Отсюда находим положение мнимого изображения, даваемого этой поверхностью:

$$x_3 = -\frac{R}{2} \cdot \frac{n+1}{n-1}.$$

Найдём расстояние от полученного изображения до третьей поверхности:

$$x_4 = -x_3 + R = \frac{3n-1}{2(n-1)}R.$$

Снова применим формулу (259) для нахождения положения нового изображения (рис. 217):

$$-\frac{1}{x_4} - \frac{n}{x_5} = \frac{1-n}{-R/2},$$

откуда

$$x_5 = \frac{3n-1}{6(1-n)}R.$$

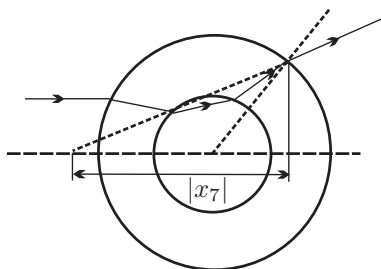


Рис. 218

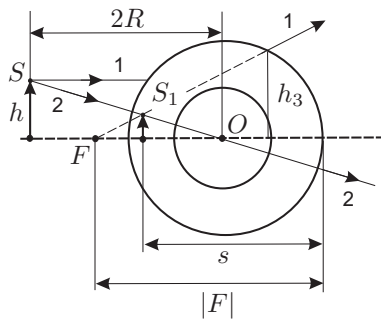


Рис. 219

Найдём расстояние от этого изображения до последней поверхности:

$$x_6 = -x_5 + \frac{R}{2} = \frac{3n-2}{3(n-1)}R.$$

И снова применим формулу (259) для нахождения положения фокуса всей системы (рис. 218):

$$-\frac{n}{x_6} - \frac{1}{x_7} = \frac{n-1}{-R},$$

откуда

$$x_7 = \frac{3n-2}{2(1-n)}R.$$

Это и есть искомое фокусное расстояние

$$F = -\frac{3n-2}{2(n-1)}R \approx -23,3 \text{ см.}$$

Толстый аквариум подобен рассеивающей линзе.

Для нахождения положения S_1 источника S рассмотрим два луча 1 и 2, на пересечении которых и находится S_1 (рис. 219). Из подобия треугольников с вершинами в точках O и F получим

$$\frac{h}{h_0} = \frac{2R}{s-R}; \quad \frac{h_3}{h_0} = \frac{|F|}{|F|-s}, \quad (260)$$

где h_0 — размер изображения, h — размер предмета, h_3 — расстояние от оптической оси до точки пересечения луча 1 с внешней поверхностью аквариума (рис. 219). При выводе соотношений предполагалось, что углы между всеми изображёнными на рис. 219 лучами и главной оптической осью малы. Из соотношений (260) получим

$$s = \frac{|F|R \left(2 + \frac{h}{h_3} \right)}{|F| \frac{h}{h_3} + 2R}. \quad (261)$$

Пользуясь подобием треугольников на рис. 215, 216 и 217, можно получить следующие соотношения между расстояниями от оптической оси до точек пересечения лучей со сферами:

$$\frac{h}{h_1} = \left| \frac{x_1}{x_2} \right|; \quad \frac{h_1}{h_2} = \left| \frac{x_3}{x_4} \right|; \quad \frac{h_2}{h_3} = \left| \frac{x_5}{x_6} \right|.$$

Перемножая эти соотношения, получим

$$\frac{h}{h_3} = \left| \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_3}{x_4} \cdot \frac{x_5}{x_6} \right| = \frac{n}{3n-2}. \quad (262)$$

Осталось в формулу (261) подставить соотношение (262), а также выражение для F :

$$s = \frac{7n-4}{5n-4}R = 18 \text{ см.}$$

Задача 112. Стеклянная призма (2006 год)

Из соображений симметрии для того, чтобы луч вышел из призмы параллельно AC , отрезок луча FG должен быть параллелен AC . При этом

$\angle GFD = \angle EFA = \theta/2$ (рис. 220). Тогда из треугольника AEF находим $\angle AEF = 180^\circ - 3\theta/2$. Поэтому для преломления в точке E имеем

$$\frac{\sin(90^\circ - \theta/2)}{\sin(90^\circ - 3\theta/2)} = n, \quad \frac{\cos(\theta/2)}{\cos(3\theta/2)} = n.$$

После тригонометрических расчётов находим

$$\cos(3\theta/2) = \cos(\theta + \theta/2) = \cos\theta \cdot \cos(\theta/2) - \sin\theta \cdot \sin(\theta/2) = 4\cos^3(\theta/2) - 3\cos(\theta/2).$$

Подставляя полученное соотношение в закон Снеллиуса, получаем

$$\cos(\theta/2) = \sqrt{\frac{3n+1}{4n}}, \quad \text{откуда} \quad \theta = 2 \arccos \left(\sqrt{\frac{3n+1}{4n}} \right) \approx 35^\circ 39'.$$

Пусть α — угол падения луча на призму, β и $\beta + \Delta\beta$ — углы преломления, отвечающие показателям преломления n и $n + \Delta n$ (рис. 220). Согласно закону Снеллиуса $\sin\alpha = n \sin\beta$, откуда, дифференцируя при фиксированном угле падения α , имеем

$$n \cos\beta \cdot \Delta\beta + \Delta n \sin\beta = 0. \quad (263)$$

Пусть α' — угол выхода луча из призмы, β' и $\beta' + \Delta\beta'$ — углы падения на границе стекло–воздух, отвечающие показателям преломления n и $n + \Delta n$ (рис. 220). Тогда аналогично случаю падения можно записать

$$n \cos\beta' \cdot \Delta\beta' + \Delta n \sin\beta' = \cos\alpha' \cdot \Delta\alpha'. \quad (264)$$

Поскольку $n \gg \Delta n$, можно положить $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$. Однако следует отметить, что $\Delta\alpha \neq \Delta\alpha'$ и $\Delta\beta \neq \Delta\beta'$. Покажем, что $\Delta\beta = -\Delta\beta'$. Действительно, из треугольников AEF и CHG находим $\angle EFA = 90^\circ - \beta - \theta$ и $\angle HGC = 90^\circ - \beta' - \theta$. Далее рассмотрим треугольник FGD , для него $\theta = \angle GFD + \angle FGD$, а поскольку $\angle FGD = \angle HGC$ и $\angle GFD = \angle EFA$, имеем $\beta + \beta' = 180^\circ - 3\theta$. Теперь, производя дифференцирование, приходим к искомому результату: $\Delta\beta = -\Delta\beta'$. Для нахождения угла $\varepsilon = \Delta\alpha'$ между двумя выходящими из призмы лучами воспользуемся полученным выше соотношением между $\Delta\beta$ и $\Delta\beta'$, а также уравнениями (263) и (264):

$$-\Delta\beta = \frac{\Delta n \sin\beta}{n \cos\beta} = \Delta\beta' = \frac{\varepsilon \cos\alpha - \Delta n \sin\beta}{n \cos\beta}, \quad \varepsilon = 2 \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} \Delta n = 2 \frac{\cos(3\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \Delta n.$$

Пользуясь полученными ранее выражениями для $\cos(3\theta/2)$ и $\cos(\theta/2)$, приходим к ответу:

$$\varepsilon = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{3n+1}{n-1}} \Delta n \approx 1,75'.$$

Для определения линейного расстояния y между двумя изображениями, видимыми в фокальной плоскости объектива, достаточно знать f и ε :

$$y = f \operatorname{tg} \varepsilon \approx \varepsilon f = \frac{2f}{n} \sqrt{\frac{3n+1}{n-1}} \Delta n = 0,2 \text{ мм.}$$

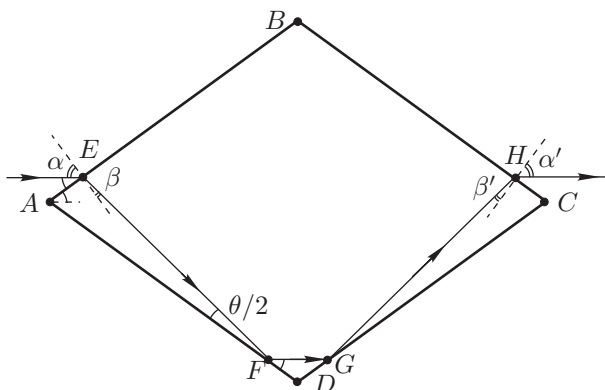


Рис. 220

Задача 113. Холмс выбирает костюм (2007 год)

Холмс не увидел в зеркале пола, значит, луч, идущий от низа ботинок и попавший в глаз, отразился от нижнего края зеркала, а до отражения шёл горизонтально на очень малой высоте над полом. Это возможно, только если плоскость зеркала составляет некий угол φ с вертикалью. Исходя из этого построим изображение Холмса AB и цилиндра BC в зеркале (рис. 221). Изображение $B'C'$ цилиндра образует угол 2φ с вертикалью, следовательно,

$$x = h \cos 2\varphi = h \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}. \quad (265)$$

Для нахождения угла φ рассмотрим дополнительно положение, когда Холмс перестал видеть себя ниже уровня глаз (рис. 222), отойдя от зеркала на расстояние $L = nl$, где l — расстояние от него до зеркала в первом случае. Во втором положении луч, идущий от глаза и попавший в глаз, отразился от нижнего края зеркала, так как в противном случае Холмс увидел бы своё изображение ниже уровня глаз. Поскольку этот луч возвращается в исходную точку, он перпендикулярен зеркалу. Пусть H — высота глаз Холмса над уровнем пола, тогда из геометрических соображений в первом и втором положениях выражаем

$$\frac{H}{l} = \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{L} = \frac{H}{nl},$$

откуда

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = 1 - \frac{2}{n}.$$

Подставив это выражение в формулу (265), находим

$$x = \frac{h}{n - 1} = 15 \text{ см.}$$

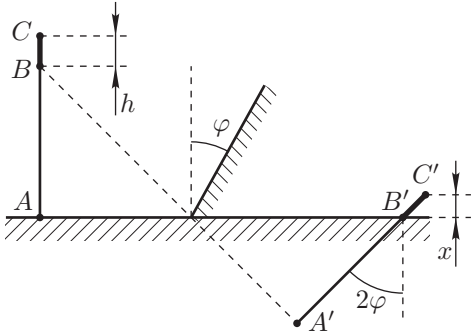


Рис. 221

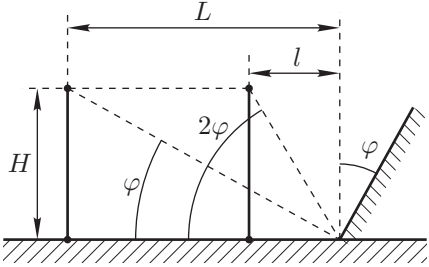


Рис. 222

Примерная система оценивания

Понимание хода лучей в первом случае	1
Выражение x через φ	3
Понимание хода лучей во втором случае	1
Выражение φ через n	3
Ответ в общем виде	1
Численный ответ	1

Задача 114. Без окон и дверей (2009 год)

Пусть P — мощность излучения первого источника, S — суммарная площадь стен, пола и потолка павильона, E_1 и E_2 — средние освещённости до и после произведённых изменений, тогда условия равенства количеств испущенного и поглощённого света в первом и втором случаях имеют вид

$$P = SE_1(1 - R), \quad \alpha P = SE_2(1 - \beta R),$$

откуда

$$\gamma = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\alpha(1 - R)}{1 - \beta R} = 3.$$

Примерная система оценивания

Условия равенства количеств испущенного и поглощённого света	4
Ответ в общем виде	3
Численный ответ	3

Задача 115. Детектор перед зеркалом (2009 год)

В пространстве перед зеркалом происходит интерференция падающей и отражённой волн. Результат интерференции зависит в данном случае только от разности хода волн. Для любых двух точек, равноудалённых от зеркала, разность хода одинакова.

Пусть детектор расположен в точке D на расстоянии x от зеркала (рис. 223), тогда искомая разность хода $\Delta = AD - BD$, так как точки A и B принадлежат одному волновому фронту (свет достигает их одновременно). По условию угол падения $\angle A'AN = \varphi$, по закону отражения угол отражения $\angle DAN = \varphi$. Из геометрических соображений находим $\angle HDA = \varphi$, $\angle BAD = 2\varphi - \pi/2$,

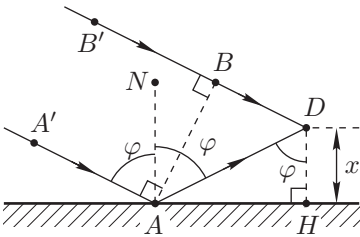


Рис. 223

$$\Delta = AD - BD = AD \cdot \left(1 - \sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{x}{\cos \varphi} \cdot (1 + \cos 2\varphi) = 2x \cos \varphi.$$

Разность хода изменяется на λ при изменении x на

$$d = \frac{\lambda}{2 \cos \varphi}.$$

Таким образом, мы нашли расстояние между соседними интерференционными максимумами или минимумами. Найдём частоту сигнала детектора:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{|\dot{x}|}{d} = \frac{2|\dot{x}| \cos \varphi}{\lambda}.$$

1. При движении детектора $|\dot{x}| = v \sin \alpha$, откуда

$$\nu_1 = \frac{2v \sin \alpha \cos \varphi}{\lambda}.$$

2. Максимальная частота $\nu_{1 \max} = 2v/\lambda$ достигается при $\varphi_1 = 0$ и $\alpha_1 = 90^\circ$.
3. При движении зеркала $|\dot{x}| = u \sin \varphi$, откуда

$$\nu_2 = \frac{2u \sin \varphi \cos \varphi}{\lambda} = \frac{u \sin 2\varphi}{\lambda}.$$

4. Максимальная частота $\nu_{2 \max} = u/\lambda$ достигается при $\varphi_2 = 45^\circ$.

Примерная система оценивания

Ответ для ν_1	3
Ответ для $\nu_{1 \max}$	1
Ответ для φ_1 и α_1	1
Ответ для ν_2	3

а с учётом равенства (266) находим

$$D = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \approx -3,2 \text{ дптр.}$$

Примерная система оценивания

Объяснение наблюдаемых эффектов	3
Формула линзы для граничных случаев	2
Формула линзы с учётом очков	2
Ответ в общем виде	1
Численный ответ (модуль)	1
Численный ответ (знак)	1

Задача 117. Прямые углы в линзе (2011 год)

Пусть x' и y' — координаты точки C' , тогда из свойств тонкой линзы

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{-x} = \frac{1}{f} \quad \text{и} \quad \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$$

находим

$$x' = \frac{fx}{f+x} \quad \text{и} \quad y' = \frac{fy}{f+x}.$$

Рассмотрим отрезок CD длиной l , образующий угол α с осью Ox , и его изображение — отрезок $C'D'$, образующий угол α' с осью Ox . Выразим координаты точки D и её изображения D' :

$$\begin{aligned} x_D &= x + l \cos \alpha, & y_D &= y + l \sin \alpha; \\ x'_D &= \frac{fx_D}{f+x_D} = \frac{f(x+l \cos \alpha)}{f+x+l \cos \alpha}, & y'_D &= \frac{fy_D}{f+x_D} = \frac{f(y+l \sin \alpha)}{f+x+l \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Зная координаты двух точек отрезка, можно найти его наклон:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{y'_D - y'}{x'_D - x'} = \frac{(f+x) \operatorname{tg} \alpha - y}{f}.$$

Пусть α_1 и α_2 — углы наклона катетов треугольника ABC , α'_1 и α'_2 — углы наклона катетов треугольника $A'B'C'$, тогда условия прямоугловости треугольников примут вид

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = -1, \quad \operatorname{tg} \alpha'_1 \operatorname{tg} \alpha'_2 = -1.$$

Подставив во второе условие выражения

$$\operatorname{tg} \alpha'_1 = \frac{(f+x) \operatorname{tg} \alpha_1 - y}{f}, \quad \operatorname{tg} \alpha'_2 = \frac{(f+x) \operatorname{tg} \alpha_2 - y}{f}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1},$$

получим

$$\frac{(f+x) \operatorname{tg} \alpha_1 - y}{f} \cdot \frac{(f+x) \cdot \frac{-1}{\operatorname{tg} \alpha_1} - y}{f} = -1,$$

что сводится к квадратному уравнению относительно $\operatorname{tg} \alpha_1$:

$$(f+x)y \operatorname{tg}^2 \alpha_1 + (x^2 + 2fx - y^2) \operatorname{tg} \alpha_1 - (f+x)y = 0.$$

Двумя корнями этого уравнения являются $\operatorname{tg} \alpha_1$ и $\operatorname{tg} \alpha_2$:

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{y^2 - 2fx - x^2 \pm \sqrt{(x^2 + 2fx - y^2)^2 + 4y^2(f+x)^2}}{2y(f+x)}.$$

Отметим, что формула справедлива при любых допустимых значениях параметров и что $x \neq -f$, так как иначе изображение не было бы треугольником.

Примерная система оценивания

Применение свойств линзы в координатах	2
Выражение α' через α	3
Условия прямоугольности треугольников	1
Ответ для α_1	2
Ответ для α_2	2

Задача 118. Отражения (2012 год)

Построить изображение в оптической системе с зеркалом можно, не только отразив лучи в зеркале, но и отразив все элементы системы в зеркале и удалив рассматриваемое зеркало.

Применим этот метод в данной задаче. Построим изображение одного из зеркал во втором и удалим второе зеркало, повторим эту операцию для новой пары зеркал и т. д. После большого числа отражений множество удалённых зеркал и их изображений будет иметь вид кольца с центром O и радиусом $R \approx a/\varphi \gg D$ (рис. 225).

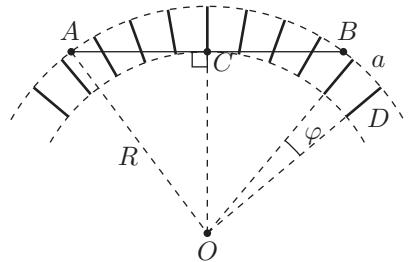


Рис. 225

Луч, идущий на рисунке прямолинейно внутри этого кольца, на самом деле отражается при каждом пересечении изображения удалённого зеркала, то есть испытывает примерно одно отражение на каждом своём отрезке длиной a . Наибольшее число отражений будет иметь самый длинный луч, то есть луч AB , концы A и B которого расположены вблизи одного края зеркала, а середина C — вблизи противоположного, причём в зависимости от чётности числа отражений указанные точки могут оказаться как на одном, так и на обоих зеркалах, что в любом случае не влияет на ответ. Таким образом, можем найти

искоемое число отражений:

$$\begin{aligned} N &= \frac{AB}{a} = \frac{2AC}{a} = \frac{2\sqrt{OA^2 - OC^2}}{a} = \frac{2\sqrt{R^2 - (R - D)^2}}{a} = \\ &= \frac{2\sqrt{2RD - D^2}}{a} \approx \frac{2\sqrt{2RD}}{a} = 2\sqrt{\frac{2D}{\varphi a}} = 200. \end{aligned}$$

Примерная система оценивания

Идея о многократных отражениях системы в зеркалах	2
Правильный рисунок и вспомогательные расчёты.....	3
Ответ в общем виде.....	3
Численный ответ	2

Задача 119. Прибрежные волны на море (2012 год)

Показатель преломления среды обратно пропорционален скорости волны в данной среде, поэтому преломление морских волн может быть рассчитано с помощью «оптического» закона Снеллиуса, который удобно записать в виде

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha'_2}{v_2},$$

где α_1 и α'_2 — углы падения и преломления соответственно, v_1 и v_2 — скорости волн в соответствующей среде.

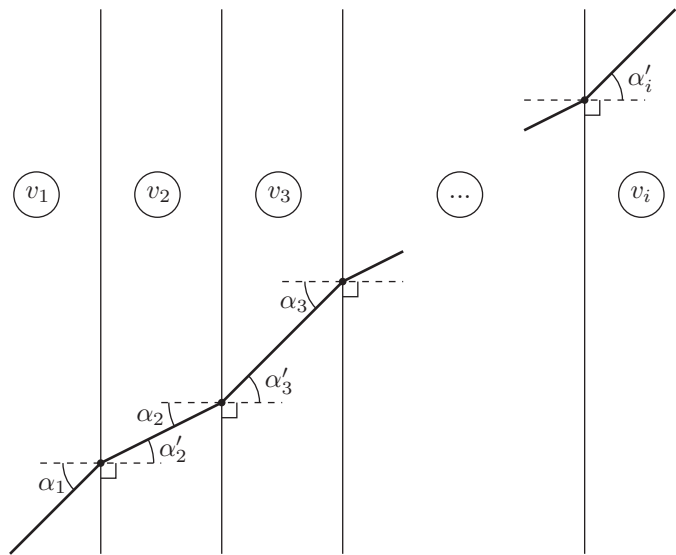


Рис. 226

Рассмотрим преломление волны при прохождении через набор произвольных однородных изотропных сред, границы раздела между которыми являются параллельными плоскостями (рис. 226). Обозначим через $v_1, v_2, \dots, v_i$ скорости волны в каждой среде и предположим, что эффект полного внутреннего отражения отсутствует. Запишем законы преломления для каждой границы раздела сред и свойства равенства накрест лежащих углов:

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha'_2}{v_2}, \quad \alpha'_2 = \alpha_2, \quad \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \frac{\sin \alpha'_3}{v_3}, \quad \alpha'_3 = \alpha_3, \quad \dots$$

Последовательно объединяя записанные уравнения, получаем

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \frac{\sin \alpha_3}{v_3} = \dots = \frac{\sin \alpha'_i}{v_i}, \quad (267)$$

откуда

$$\sin \alpha'_i = \frac{v_i}{v_1} \cdot \sin \alpha_1. \quad (268)$$

Скорость волн зависит от расстояния до берега, поэтому море в целом является неоднородной средой, однако если разбить его на множество тонких вертикальных параллельных берегу слоёв, то каждый из них можно считать однородным. Поскольку $H \gg \lambda \gg h$, скорости волн v_α и v_β вдали и вблизи берега соответственно найдём из предельных случаев закона дисперсии:

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad v_\beta = \sqrt{gh}. \quad (269)$$

Применяя результат (268) и выражения (269), получаем

$$\beta = \arcsin \left(\frac{v_\beta}{v_\alpha} \sin \alpha \right) = \arcsin \left(\sqrt{\frac{2\pi h}{\lambda}} \sin \alpha \right) \approx 3,72^\circ.$$

Конечный результат сходится с экспериментальными наблюдениями, согласно которым гребни прибрежных волн почти параллельны берегу независимо от их направления в открытом море.

Примечание. Отметим, что инвариант (267), записанный через скорости или показатели преломления, полезно помнить как готовый факт, так как он встречается и оказывается полезен во многих задачах.

Примерная система оценивания

Запись закона преломления через скорости	1
Идея о разбиении на однородные слои	1
Получение инварианта для слоёв	1
Выражение для v_α	1
Выражение для v_β	1
Ответ в общем виде	3
Численный ответ	2

Список членов жюри всех прошедших олимпиад

Ниже в алфавитном порядке перечислены все председатели и члены жюри олимпиады «Туймаада» по физике с момента её основания в 1994 году по нынешний 2012 год включительно, причём все должности и регалии указаны на момент самого позднего участия их обладателя в работе жюри.

- **Александров Дмитрий Анатольевич** — доцент МФТИ, член жюри Всероссийской олимпиады школьников по физике, тренер сборной России по физике
- **Алфёров Роман Фёдорович** — студент МФТИ, член сборной России по физике (2000 год)
- **Андрианова Ольга Георгиевна** — преподаватель кафедры теплофизики ФТИ СВФУ
- **Бочкарёв Родион Николаевич** — к. ф.-м. н., заведующий кафедрой физики твёрдого тела ФТИ СВФУ
- **Вавилов Виталий Викторович** — студент МФТИ, серебряный медалист Международной физической олимпиады (Англия, 2000 год)
- **Варламов Сергей Дмитриевич** — к. ф.-м. н., доцент СУНЦ МГУ, член центральной методической комиссии и жюри Всероссийской олимпиады школьников по физике, член жюри Московской городской олимпиады по физике
- **Виноградов Станислав Владиленович** — к. ф.-м. н., доцент МФТИ, тренер сборной России по физике
- **Герасимов Константин Спиридонович** — к. ф.-м. н., доцент кафедры общей физики СВФУ
- **Григорьев Алексей Иванович** — аспирант кафедры теоретической физики ФТИ СВФУ
- **Григорьев Юрий Михайлович** — д. ф.-м. н., действительный член АН РС(Я), заведующий кафедрой теоретической физики ФТИ СВФУ, заместитель директора ФТИ СВФУ
- **Гуденко Алексей Викторович** — к. ф.-м. н., доцент МФТИ, член центральной методической комиссии и жюри Всероссийской олимпиады школьников по физике, тренер сборной России по физике
- **Заякин Андрей Викторович** — студент МГУ, дипломант Международной олимпиады «Туймаада» по физике

- **Иоголевич Иван Александрович** — учитель физики высшей категории ФМЛ № 31 города Челябинск
- **Ким Александр Алексеевич** — студент МФТИ, дипломант Всероссийской олимпиады школьников по физике, Международной олимпиады «Туймаада» по физике и Международной Жаутыковской олимпиады
- **Козел Станислав Миронович** — д. ф.-м. н., профессор МФТИ, председатель центральной методической комиссии и жюри Всероссийской олимпиады школьников по физике
- **Ларионов Александр Валерьевич** — студент МФТИ, дипломант Всероссийской олимпиады школьников по физике и Международной олимпиады «Туймаада» по физике
- **Мохначевский Александр Николаевич** — аспирант кафедры теоретической физики ФТИ СВФУ, дипломант Всероссийской олимпиады школьников по физике и Международной олимпиады «Туймаада» по физике
- **Муксунов Иван Харлампьевич** — доцент кафедры радиофизики и электроники ФТИ СВФУ
- **Муравьев Вячеслав Михайлович** — студент МФТИ, серебряный медалист Международной физической олимпиады (Турция, 2001 год), член жюри Всероссийской олимпиады школьников по физике, тренер сборной России по физике
- **Неустроев Ефим Петрович** — к. ф.-м. н., доцент кафедры радиофизики и электроники ФТИ СВФУ
- **Николаев Николай Егорович** — старший преподаватель кафедры физики твёрдого тела СВФУ
- **Петров Зим Егорович** — д. т. н., заведующий кафедрой радиотехники и информационных технологий ФТИ СВФУ
- **Попов Ким Филиппович** — к. х. н., доцент кафедры экспериментальной физики СВФУ
- **Потапов Виктор Филиппович** — преподаватель физики Республиканского лицея-интерната, заслуженный учитель России
- **Рындин Максим Геннадьевич** — студент МФТИ, член сборной России по физике (2006 год), дипломант Всероссийской олимпиады школьников по физике и Международной олимпиады «Туймаада» по физике

- **Саввинова Надежда Александровна** — д. ф.-м. н., заведующая кафедрой теплофизики ФТИ СВФУ
- **Семёнов Семён Семёнович** — к. ф.-м. н., доцент кафедры теоретической физики СВФУ
- **Сивцев Василий Иванович** — к. ф.-м. н., доцент кафедры общей физики ФТИ СВФУ
- **Скрябин Николай Николаевич** — студент МФТИ, дипломант Всероссийской олимпиады школьников по физике, Международной олимпиады «Туймаада» по физике и Международной Жаутыковской олимпиады
- **Соболев Николай Александрович** — студент МФТИ, дипломант Международной олимпиады «Туймаада» по физике
- **Соловьёв Тимофей Николаевич** — к. ф.-м. н., профессор кафедры радиофизики и электроники ФТИ СВФУ
- **Соловьёва Наталья Михайловна** — заместитель заведующего кафедрой методики преподавания физики ФТИ СВФУ
- **Сыромятников Валерий Гаврильевич** — к. ф.-м. н., заведующий кафедрой методики преподавания физики ФТИ СВФУ
- **Татаринов Айсен Петрович** — студент МФТИ, дипломант Всероссийской олимпиады школьников по физике и Международной олимпиады «Туймаада» по физике
- **Харбанов Михаил Владимирович** — студент МФТИ, дипломант Всероссийской олимпиады школьников по физике и Международной олимпиады «Туймаада» по физике
- **Чудновский Александр Витальевич** — выпускник МФТИ, золотой медалист Международной физической олимпиады (Италия, 1999 год), член центральной методической комиссии и жюри Всероссийской олимпиады по физике, тренер сборной России по физике
- **Шелест Владимир Иванович** — учитель физики в школе № 130 Советского района Новосибирской области, директор «Научной лаборатории школьников»

Список дипломантов всех прошедших олимпиад

1994 год

1. Дину Валентин (Румыния) диплом I степени
2. Тэнасе Елена (Румыния) диплом II степени
3. Сидельников Олег (Республика Якутия) диплом III степени
4. Чертов Максим (Томская область) диплом IV степени
5. Сереп Салдыс (Республика Тыва) диплом V степени
6. Терешкин Григорий (Республика Якутия) диплом VI степени

1995 год

1. Бозго Лилио (Румыния) диплом I степени
2. Бурдан Михай (Румыния) диплом I степени
3. Сидельников Олег (Республика Якутия) диплом II степени
4. Захаров Анатолий (Республика Якутия) диплом III степени
5. Чертов Максим (Томская область) диплом IV степени
6. Кызыл-оол Айдар (Республика Тыва) диплом V степени
7. Денисенко Антон (Иркутская область) диплом V степени

1996 год

1. Бора Флорин (Румыния) диплом I степени
2. Энкулеску Михаэла (Румыния) диплом II степени
3. Заякин Андрей (Республика Якутия) диплом III степени

1997 год

1. Попа Рэзван-Александру (Румыния) диплом I степени
2. Гика Моника-Мария (Румыния) диплом I степени
3. Заякин Андрей (Республика Якутия) диплом II степени
4. Соболев Николай Александрович (Республика Якутия) диплом II степени
5. Ильин Александр (Республика Якутия) диплом III степени
6. Дашицыренов Дугар (Республика Бурятия) диплом III степени
7. Ке Лао (Китай) диплом III степени
8. Бобков Алексей (Республика Якутия) диплом III степени
9. Стучебров Сергей (Томская область) диплом III степени

1998 год

1. Чу Минг (Китай) диплом I степени
2. Мариною Богдан (Румыния) диплом I степени
3. Заякин Андрей (Республика Якутия) диплом II степени
4. Чепую Андреа (Румыния) диплом II степени
5. Ильин Александр (Республика Якутия) диплом III степени
6. Бобков Алексей (Республика Якутия) диплом III степени
7. Яковлев Вадим (Республика Якутия) диплом III степени

1999 год

1. Шварц Осип (Новосибирская область) диплом **I** степени
2. Ротаев Михаил Валерьевич (Новосибирская область) диплом **I** степени
3. Тодер Евгений (Новосибирская область) диплом **II** степени
4. Ахметов Алексей (Томская область) диплом **II** степени
5. Хие Ю (Китай) диплом **II** степени
6. Лукьянов Михаил Владимирович (Алтайский край) диплом **II** степени
7. Кондаков Василий (Республика Якутия) диплом **III** степени
8. Попова Надежда (Республика Якутия) диплом **III** степени

2000 год**Старшая лига**

1. Ахмеров Антон Рустямович (Новосибирская область) диплом **I** степени
2. Дозморов Андрей (Иркутская область) диплом **I** степени
3. Ликсандру Мэдэлина (Румыния) диплом **I** степени
4. Миле Джордже Серджу (Румыния) диплом **I** степени
5. Кондаков Василий (Республика Якутия) диплом **II** степени
6. Мэлэеску Богдан (Румыния) диплом **II** степени
7. Давыдов Сергей (Республика Якутия) диплом **III** степени
8. Еремеев Пётр (Республика Якутия) диплом **III** степени
9. Марина Адриан (Румыния) диплом **III** степени

Младшая лига

1. Дружинин Андрей Александрович (Ямало-Ненецкий АО) диплом **I** степени
2. Петров Андрей (Иркутская область) диплом **I** степени
3. Таллаев Егор (Республика Якутия) диплом **I** степени
4. Татаринцов Айсен Петрович (Республика Якутия) диплом **II** степени
5. Гибински Андрей (Московская область) диплом **II** степени
6. Журавлёв Михаил (Ямало-Ненецкий АО) диплом **III** степени
7. Мохначевский Александр Николаевич (Республика Якутия) ... диплом **III** степени
8. Егоров Юрий (Республика Якутия) диплом **III** степени
9. Ефремов Александр (Республика Якутия) диплом **III** степени

2001 год**Старшая лига**

1. Идрисов Георгий Искандерович (Алтайский край) диплом **I** степени
2. Егоров Юрий (Республика Якутия) диплом **II** степени
3. Киданов Вадим Александрович (Алтайский край) диплом **II** степени
4. Изотов Виталий (Приморский край) диплом **II** степени
5. Ахмеров Антон Рустямович (Новосибирская область) ... диплом **III** степени
6. Кережи Виорел (Румыния) диплом **III** степени
7. Унгуриану Серджу (Румыния) диплом **III** степени

Младшая лига

1. Татаринцов Айсен Петрович (Республика Якутия) диплом **I** степени

2. Егоров Николай (Республика Якутия) диплом **I** степени
3. Фёдоров Андрей (Приморский край) диплом **II** степени
4. Мохначевский Александр Николаевич (Республика Якутия) диплом **II** степени
5. Аполонская Инна (Алтайский край) диплом **III** степени
6. Ильин Алексей (Приморский край) диплом **III** степени
7. Чжун Хао (Китай) диплом **III** степени
8. Акимов Фёдор (Республика Якутия) диплом **III** степени

2002 год

Старшая лига

1. Татаринев Айсен Петрович (Республика Якутия) диплом **I** степени
2. Мохначевский Александр Николаевич (Республика Якутия) диплом **II** степени
3. Ефремов Александр (Республика Якутия) диплом **II** степени
4. Хенинг Александру (Румыния) диплом **III** степени
5. Денисов Андрей (Приморский край) диплом **III** степени
6. Константин Андрей (Румыния) диплом **III** степени

Младшая лига

1. Шавлюгин Евгений (Приморский край) диплом **I** степени
2. Харбанов Михаил Владимирович (Республика Якутия) диплом **II** степени
3. Ожегов Александр (Иркутская область) диплом **II** степени
4. Сыромятников Николай (Республика Якутия) диплом **III** степени
5. Антипин Василий (Республика Якутия) диплом **III** степени
6. Гуляев Алексей (Республика Якутия) диплом **III** степени

2003 год

Старшая лига

1. Молдован Михай (Румыния) диплом **I** степени
2. Татаринев Айсен Петрович (Республика Якутия) диплом **I** степени
3. Мохначевский Александр Николаевич (Республика Якутия) диплом **II** степени
4. Проистосеску Кристиан (Румыния) диплом **II** степени
5. Карп Александру-Михай (Румыния) диплом **III** степени
6. Харбанов Михаил Владимирович (Республика Якутия) ... диплом **III** степени

Младшая лига

1. Флегонтова Екатерина (Республика Якутия) диплом **I** степени
2. Гизатулин Денис Рашидович (Приморский край) диплом **II** степени
3. Кириллов Василий (Иркутская область) диплом **III** степени
4. Богач Максим Юрьевич (Иркутская область) диплом **III** степени
5. Григорьев Тимур Юрьевич (Республика Якутия) диплом **III** степени
6. Дайнеко Артём Борисович (Красноярский край) диплом **III** степени
7. Готовцев Михаил (Республика Якутия) диплом **III** степени

2004 год

Старшая лига

1. Харбанов Михаил Владимирович (Республика Якутия) диплом **I** степени

2. Дзябура Евгений Сергеевич (Сборная России)..... диплом II степени
3. Ангел Андрей (Румыния) диплом II степени
4. Стэнческу Траян (Румыния) диплом III степени
5. Богословский Никита (Сборная России) диплом III степени
6. Григорьев Тимур Юрьевич (Республика Якутия) диплом III степени
7. Моржаков Василий (Сборная России)..... диплом III степени
8. Григорьев Алексей Иванович (Республика Якутия) диплом III степени
9. Иванов Виктор Анатольевич (Республика Якутия)..... диплом III степени
10. Стойка Богдан (Румыния) диплом III степени
11. Рамазанов Болат (Казахстан)..... диплом III степени
12. Гизатулин Денис Рашидович (Приморский край) диплом III степени

Младшая лига

1. Кузин Денис Сергеевич (Республика Мордовия)..... диплом I степени
2. Ретивых Владимир (Иркутская область)..... диплом II степени
3. Попов Айсен Васильевич (Республика Якутия) диплом II степени
4. Ефремов Александр (Республика Якутия)..... диплом II степени
5. Васильева Сахаяна Семёновна (Республика Якутия) ... диплом III степени
6. Жуплев Антон Сергеевич (Приморский край)..... диплом III степени
7. Габышев Анатолий (Республика Якутия) диплом III степени
8. Готовцев Михаил (Республика Якутия) диплом III степени
9. Афанасьев Александр Андреевич (Приморский край) ... диплом III степени

2005 год

Старшая лига

1. Тимофеев Олег (Сборная России)..... диплом I степени
2. Гусихин Павел Артурович (Сборная России) диплом I степени
3. Иванов Виктор Анатольевич (Республика Якутия)..... диплом II степени
4. Гизатулин Денис Рашидович (Приморский край)..... диплом II степени
5. Михэилеску Ион-Габриэль (Румыния) диплом III степени
6. Сидоров Степан Сергеевич (Республика Якутия)..... диплом III степени
7. Рындин Максим Геннадьевич (Пермский край)..... диплом III степени
8. Томозею Михай-Мариан (Румыния) диплом III степени
9. Григорьев Тимур Юрьевич (Республика Якутия) диплом III степени
10. Мокану Лаура-Моника (Румыния)..... диплом III степени
11. Истомин Роман (Пермский край)..... диплом III степени

Младшая лига

1. Сметнёв Денис Владимирович (Нижегородская область) диплом I степени
2. Сивцев Пётр Васильевич (Республика Якутия)..... диплом II степени
3. Соловьёва Ксения Павловна (Пермский край)..... диплом II степени
4. Попов Айсен Васильевич (Республика Якутия)..... диплом II степени
5. Афанасьев Александр Андреевич (Приморский край) диплом II степени
6. Кузин Денис Сергеевич (Республика Мордовия)..... диплом III степени
7. Урозаев Диас (Казахстан)..... диплом III степени

2006 год**Старшая лига**

1. Федянин Дмитрий Юрьевич (Сборная России) диплом **I** степени
2. Марковцев Вадим Анатольевич (Сборная России) диплом **II** степени
3. Попа Кристина-Джорджета (Румыния) диплом **II** степени
4. Афанасьев Александр Андреевич (Приморский край) ... диплом **III** степени
5. Рындин Максим Геннадьевич (Сборная России) диплом **III** степени
6. Мемет Эдвин (Румыния) диплом **III** степени
7. Януш Андрада (Румыния) диплом **III** степени

Младшая лига

1. Семёнов Станислав (Нижегородская область) диплом **I** степени
2. Сексембаев Жандос (Казахстан) диплом **I** степени
3. Степанов Сергей Григорьевич (Республика Якутия).... диплом **II** степени
4. Васильева Сахаяна Семёновна (Республика Якутия) ... диплом **II** степени
5. Федотов Игорь Игоревич (Московская область) диплом **II** степени
6. Микелов Артём (Московская область) диплом **II** степени
7. Таинов Ринат (Казахстан) диплом **III** степени
8. Емельянов Борис Петрович (Республика Якутия) диплом **III** степени
9. Плешаков Руслан Владимирович (Приморский край) ... диплом **III** степени
10. Карпов Иван Евгеньевич (Иркутская область) диплом **III** степени
11. Мосунова Дарья (Нижегородская область) диплом **III** степени
12. Нашаров Аскар (Казахстан) диплом **III** степени
13. Цой Пётр Васильевич (Республика Якутия) диплом **III** степени

2007 год**Старшая лига**

1. Кулиев Виталий Максимович (Сборная России) диплом **I** степени
2. Проскурин Михаил Борисович (Сборная России) диплом **I** степени
3. Сметнёв Денис Владимирович (Нижегородская область) диплом **I** степени
4. Попов Айсен Васильевич (Республика Якутия) диплом **II** степени
5. Суханов Илья Евгеньевич (Сборная России) диплом **II** степени
6. Сивцев Пётр Васильевич (Республика Якутия) диплом **II** степени
7. Плешаков Руслан Владимирович (Приморский край) ... диплом **II** степени
8. Януш Андрада (Румыния) диплом **III** степени
9. Степанов Сергей Григорьевич (Республика Якутия) ... диплом **III** степени
10. Петрикэ Габриэль (Румыния) диплом **III** степени

Младшая лига

1. Буслаев Павел Ильич (Санкт-Петербург) диплом **I** степени
2. Цой Пётр Васильевич (Республика Якутия) диплом **I** степени
3. Бердибек Шапагат Сарсембайулы (Казахстан) диплом **II** степени
4. Худайбергенов Абиш Рахматтгул (Казахстан) диплом **II** степени
5. Сапожник Алексей Александрович (Иркутская область) ... диплом **II** степени
6. Сарсенов Ержан Тусупканович (Казахстан) диплом **II** степени

7. Урбан Анатолий Сергеевич (Республика Татарстан)....диплом **III** степени
8. Майхиев Нуразиз (Казахстан) диплом **III** степени
9. Попов Тимофей Саввич (Республика Якутия) диплом **III** степени
10. Горностаев Дмитрий Александрович (Республика Мордовия) .. диплом **III** степени
11. Юдин Анатолий Николаевич (Нижегородская область) .. диплом **III** степени
12. Казарин Александр Анатольевич (Нижегородская область) .. диплом **III** степени
13. Смолейчук Роман Анатольевич (Приморский край)...диплом **III** степени
14. Чириков Александр Александрович (Республика Якутия) .. диплом **III** степени
15. Максимов Игорь Васильевич (Республика Якутия)....диплом **III** степени

2008 год

Старшая лига

1. Михайлов Александр Евгеньевич (Сборная России) диплом **I** степени
2. Степанов Сергей Григорьевич (Республика Якутия).....диплом **I** степени
3. Барсков Кирилл Владиславович (Сборная России) диплом **II** степени
4. Плешаков Руслан Владимирович (Сборная России) диплом **II** степени
5. Нурманов Алдияр Есетович (Казахстан).....диплом **III** степени
6. Серзо Петер (Румыния).....диплом **III** степени
7. Константин Мариус (Румыния) диплом **III** степени
8. Магдэу Иоан-Богдан (Румыния) диплом **III** степени

Младшая лига

1. Гудименко Софья Алексеевна (Приморский край)..... диплом **I** степени
2. Куняев Дмитрий Сергеевич (Московская область).....диплом **I** степени
3. Юдин Анатолий Николаевич (Нижегородская область) диплом **II** степени
4. Унучек Дмитрий Сергеевич (Московская область) диплом **II** степени
5. Илиешу Виктор-Лука (Румыния) диплом **III** степени
6. Савинов Евгений Александрович (Иркутская область) ... диплом **III** степени
7. Булатов Айдар Жумашевич (Казахстан) диплом **III** степени
8. Ким Александр Алексеевич (Республика Якутия) диплом **III** степени
9. Скрыбин Николай Николаевич (Республика Якутия) ... диплом **III** степени
10. Смолейчук Роман Анатольевич (Приморский край)...диплом **III** степени
11. Кожамбетов Саид Ерболулы (Казахстан).....диплом **III** степени
12. Мухамедкали Шынгыс Алтайулы (Казахстан).....диплом **III** степени
13. Бегун Александр Михайлович (Приморский край) диплом **III** степени

2009 год

Старшая лига

1. Корольков Андрей Евгеньевич (Московская область) диплом **I** степени
2. Алюшин Алексей Сергеевич (Москва) диплом **I** степени
3. Чокырлан Даниэль (Румыния).....диплом **II** степени
4. Дубов Александр Владимирович (Вологодская область) диплом **II** степени
5. Савинов Евгений Александрович (Иркутская область) диплом **II** степени
6. Ким Александр Алексеевич (Республика Якутия) диплом **II** степени

7. Скрыбин Николай Николаевич (Республика Якутия) ... диплом III степени
8. Илиешу Виктор-Лука (Румыния) диплом III степени

Младшая лига

1. Джурджикэ-Тирон Тудор (Румыния) диплом I степени
2. Иванов Дьулус Харлампьевич (Республика Якутия) диплом I степени
3. Ноговицын Дьулустан Александрович (Республика Якутия) диплом I степени
4. Артамонов Дмитрий Михайлович (Нижегородская область) диплом II степени
5. Слепцов Афанасий Иванович (Республика Якутия) диплом II степени
6. Кожамбетов Саид Ерболулы (Казахстан) диплом III степени
7. Шалбай Ансар Манатович (Казахстан) диплом III степени
8. Бегун Александр Михайлович (Приморский край) диплом III степени
9. Заночкин Андрей Юрьевич (Нижегородская область) ... диплом III степени
10. Колесов Поликарп Федотович (Республика Якутия) .. диплом III степени

2010 год

Старшая лига

1. Антоненко Даниил Сергеевич (Сборная России) диплом I степени
2. Коновалов Александр (Сборная России) диплом II степени
3. Скрыбин Николай Николаевич (Республика Якутия) диплом II степени
4. Тарасов Артём (Сборная России) диплом II степени
5. Кононов Яков Александрович (Сборная России) диплом II степени
6. Кристя-Платон Тудор (Румыния) диплом III степени
7. Иванов Дьулус Харлампьевич (Республика Якутия) диплом III степени
8. Илиешу Виктор-Лука (Румыния) диплом III степени
9. Ким Александр Алексеевич (Республика Якутия) диплом III степени

Младшая лига

1. Дегтяренко Антон Игоревич (Приморский край) диплом I степени
2. Моеков Василий Иванович (Республика Якутия) диплом II степени
3. Денисов Артём Олегович (Приморский край) диплом II степени
4. Нохсоров Александр Александрович (Республика Якутия) диплом II степени
5. Рэилину Роберта (Румыния) диплом II степени
6. Ключиков Евгений Сергеевич (Приморский край) диплом III степени
7. Лимиарди Ека Санцерио (Индонезия) диплом III степени
8. Васильев Семён Семёнович (Республика Якутия) диплом III степени
9. Ионеску Андра-Мария (Румыния) диплом III степени

2011 год

Старшая лига

1. Ноян Алексей Аднанович (Сборная России) диплом I степени
2. Цыбров Фёдор Михайлович (Сборная России) диплом I степени
3. Вильковский Илья Сергеевич (Казахстан) диплом II степени
4. Рэкоряну Михай (Румыния) диплом II степени
5. Ионеску Андра-Мария (Румыния) диплом II степени

6. Френклах Давид Михайлович (Сборная России).....диплом III степени
7. Якубовский Илья Александрович (Иркутская область) ... диплом III степени
8. Боту Александру (Румыния)диплом III степени
9. Моеков Василий Иванович (Республика Якутия)..... диплом III степени
10. Козлов Даниил Андреевич (Иркутская область).....диплом III степени
11. Ноговицын Пётр Иванович (Республика Якутия).....диплом III степени

Младшая лига

1. Дегтяренко Антон Игоревич (Приморский край) диплом I степени
2. Денисов Артём Олегович (Приморский край)..... диплом I степени
3. Андроник Дан-Кристиан (Румыния) диплом I степени
4. Думитру Себастиан-Флорин (Румыния) диплом II степени
5. Ключиков Евгений Сергеевич (Приморский край)..... диплом II степени
6. Дармонеv Калоян Огнянов (Болгария)..... диплом II степени
7. Дианова Анастасия Александровна (Московская область) ... диплом III степени
8. Захария Кристиан (Румыния)диплом III степени
9. Склонин Илья Андреевич (Московская область) диплом III степени

2012 год

Старшая лига

1. Слободсков Игорь Олегович (Сборная России) диплом I степени
2. Дегтяренко Антон Игоревич (Приморский край) диплом I степени
3. Маслов Иван Владимирович (Сборная России) диплом I степени
4. Ноговицын Пётр Иванович (Республика Якутия)..... диплом II степени
5. Седов Александр Дмитриевич (Сборная России) диплом II степени
6. Гаврильев Владимир Титович (Республика Якутия)..... диплом II степени
7. Кис Алекс-Михай (Румыния) диплом II степени
8. Денисов Артём Олегович (Приморский край) диплом II степени
9. Константинов Фёдор Григорьевич (Московская область) ... диплом III степени
10. Новгородов Айаал Григорьевич (Республика Якутия) .. диплом III степени
11. Винокуров Лев Геннадьевич (Республика Якутия) диплом III степени
12. Ключиков Евгений Сергеевич (Приморский край) диплом III степени

Младшая лига

1. Игнат Иоан (Румыния) диплом I степени
2. Шарипов Динай Мухамедгалиевич (Казахстан) диплом II степени
3. Новицкий Василий Геннадьевич (Московская область) ... диплом III степени
4. Турсынбек Нурислам Болатбекулы (Казахстан) диплом III степени
5. Иванов Айсиэн Анатольевич (Республика Якутия)..... диплом III степени
6. Шевченко Александр Сергеевич (Приморский край) ... диплом III степени
7. Дьяконов Радимир Гаврильевич (Республика Якутия) ... диплом III степени
8. Иванова Светлана Афанасьевна (Республика Якутия) ... диплом III степени

Содержание

Вступительное слово министра образования Якутии	3
Предисловие	4
Условия задач. Механика	8
Условия задач. Термодинамика	28
Условия задач. Электричество	40
Условия задач. Оптика	57
Решения задач. Механика	62
Решения задач. Термодинамика	141
Решения задач. Электричество	176
Решения задач. Оптика	230
Список членов жюри всех прошедших олимпиад	251
Список дипломантов всех прошедших олимпиад	254