Разбор заключительного этапа олимпиады GAPC 2024

Physics Hub
А.К.Тулегенов
Н.Э.Раяпов
Версия I

Содержание

1 Введение

Заключительный этап олимпиады по физике Global Autumn Physics Competition 2024 (далее GAPC2024) состоялся 20 октября 2024 года в оффлайн и онлайн-формате. Олимпиада проводилась для двух категорий: Старшей Лиги (10–12 классы) и Младшей Лиги (7–9 классы).
Составителями задач олимпиады GAPC2024 являются:

- Раяпов Нурсултан
- Тулегенов Абдуррахим
- Манжула Родион
- Сагымбай Мунар
- Анаралы уулу Эмир

Организаторами олимпиады выступили организации **Physics Hub**, **GETTOIJSO** и **EPHO**, а партнерами — образовательные центры **Logos group** и **КВАДРАТ**.
Подробности проведения финала в оффлайн формате:

Казахстан г.Алматы (GMT +5) — 9:00 до 13:00 — Международная Школа Мирас

Казахстан г.Павлодар (GMT +5) — 12:00 до 16:00 — Областная универсальная научная библиотека им. С. Торайгырова

Казахстан г.Астана (GMT +5) — 12:00 до 16:00 — Туркестан 8/2, Бизнес центр Олимп Палас, этаж 3, кабинет 5

Кыргызстан г.Чолпон-Ата (GMT +6)— 11:00 до 15:00 — улица Акматбай Ата 8/2, Президентский лицей "Акылман"

Подробности проведения финала в онлайн формате:

11:00 - 15:00 (GMT +5)

2 Условия

2.1 Младшая Лига

Задача 1: Анна и Боб

Анна сидит на краю равномерно вращающейся карусели радиуса $R = 6\,\text{м}$. Боб стоит на расстоянии $d = 12\,\text{м}$ от центра карусели. В какой-то момент Боб видит, как Анна движется прямо на него со скоростью $v_A = 1\,\text{м/с}$.

Вопрос:

С какой скоростью в этот же момент движется Боб относительно Анны?

Задача 2: Лодочник и берег

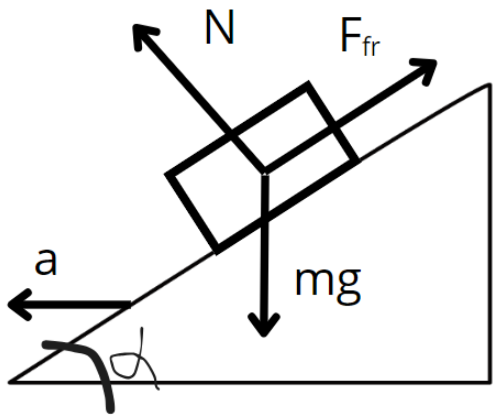
Лодочник отправляется из точки A на одном берегу прямого канала и движется к другому берегу, держа курс всегда на точку B, противоположную точке отправления. Скорость воды в канале в любом месте равна v. Лодочник, работая веслами равномерно, обеспечивает такую скорость лодки, чтобы в отсутствие течения воды она была равна v.

Вопрос:

Как далеко от точки B вниз по течению вода унесет лодку?

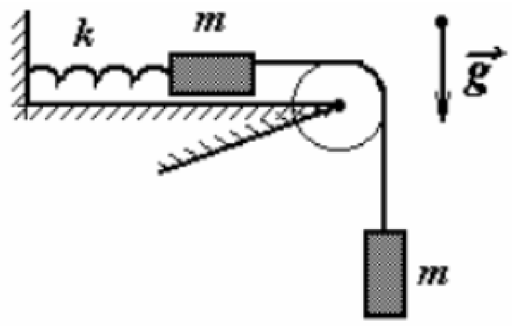
Задача 3: Клин в движении

Тело массой m расположено на наклонной плоскости, угол в основании наклонной плоскости α. Наклонная плоскость движется поступательно в горизонтальном направлении с постоянным ускорением a. Найдите, при каких значениях коэффициента трения μ тело будет покоиться относительно наклонной плоскости.



Задача 4: Система

В установке, показанной на рисунке, массы грузов одинаковы и равны m, жесткость пружины k. Трения нет, нить и блок невесомы. В начальный момент времени грузы покоятся, пружина не деформирована. Грузы отпускают. Найдите пределы изменения ускорения грузов и их максимальную скорость.



Задача 5: Бусинки и нить

Две бусинки массами m и $2m$ могут двигаться по вертикальной окружности радиуса $r = 0.5$ м. Бусинки соединены невесомой нитью, и если нить натянута, то она удерживает бусинки на концах четверти окружности, как показано на рисунке. Коэффициент трения равен 0.15. Найдите положения, в которых бусинки находятся в равновесии при натянутой нити.

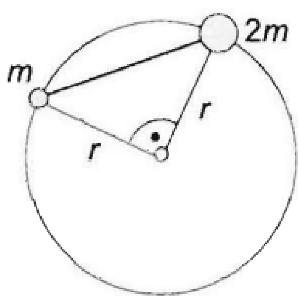


Рисунок к Задаче 5

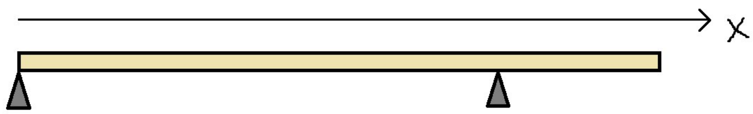
2.2 Старшая Лига

Задача 1: Изменчивая плотность

Однородный стержень длиной l с линейной плотностью, изменяющейся вдоль его длины по закону

$$\rho(x) = \rho_0\left(1 + \frac{x}{l}\right) \quad (\rho_0 \text{ — известен}),$$

установлен на двух опорах. Одна опора находится в начале стержня, а вторая — на расстоянии $a\,(a < l)$ от начала. Определить силы реакции в опорах.



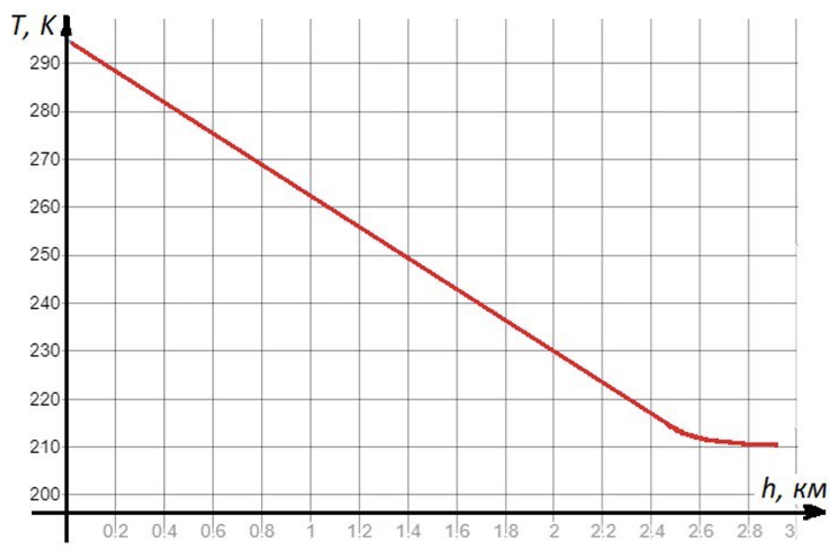
Задача 2: Планета

У планеты, имеющей шарообразную форму, имеется атмосфера, состоящая из идеального газа с молярной массой $M = 30\,\text{г/моль}$. Зависимость температуры атмосферы от высоты показана на рисунке. Ускорение свободного падения у поверхности планеты $g = 18\,\text{м/с}^2$, а атмосферное давление $\rho_0 = 200\,\text{кПа}$.

1. Определите плотность атмосферы ρ_0 на поверхности планеты;

2. Пренебрегая изменением g с высотой, определите давление p на высоте $h = 2\,\text{км}$.

Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31\,\text{Дж/моль} \cdot \text{К}$.



Задача 3: Задача с шаром

Шар массой m начинает катиться по поверхности, уравнение которой имеет вид $y = x^2$ с высоты h_0. Проскальзываний нет. Найти:

1. Силу давления в нижней точке.
2. Силу давления на высоте $\frac{h_0}{3}$.

Шар является материальной точкой.

Задача 4: Колебания двери

Автомобиль начинает равномерное ускорение из состояния покоя. Сначала его дверь слегка приоткрыта. Вычислите, какое расстояние проедет автомобиль, прежде чем дверь захлопнется. Предположим, что дверь имеет безынерционный шарнир, равномерное распределение массы и длину L от передней до задней части.

Задача 5: Линза в разрезе

Собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 10$ см разрезана на две половинки, которые затем раздвинуты на расстояние $d = 0{,}5$ мм (двойная линза). Найдите ширину интерференционной полосы на экране, расположенном на расстоянии 60 см позади линзы, если точечный источник монохроматического света с длиной волны $\lambda = 5000$ Å находится перед линзой на расстоянии $a = 15$ см от неё.

Задача 6: Бусинки и нить

Две бусинки массами m и $2m$ могут двигаться по вертикальной окружности радиуса $r = 0.5\,$м. Бусинки соединены невесомой нитью, и если нить натянута, то она удерживает бусинки на концах четверти окружности, как показано на рисунке. Коэффициент трения равен 0.15. Найдите положения, в которых бусинки находятся в равновесии при натянутой нити.

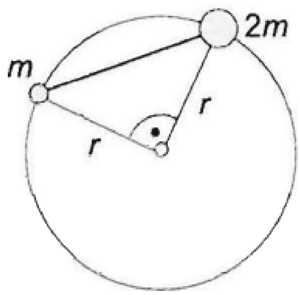


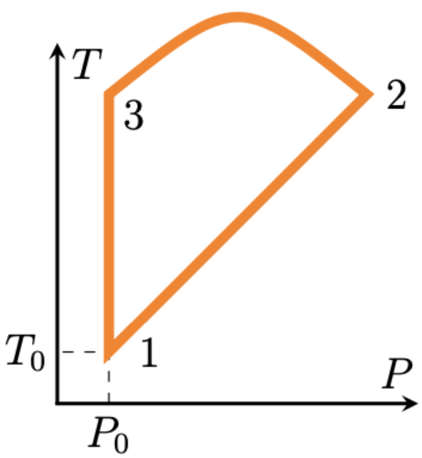
Рисунок к Задаче 6

Задача 7: Цикл

Над одним молем идеального одноатомного газа проводят циклический процесс, изображённый на рисунке. Цикл состоит из процесса прямо пропорциональной зависимости температуры от давления (1-2), участка параболы (2-3) и изобары (3-1). Минимальная температура газа в цикле 300 К. Уравнение параболы:

$$T = -\frac{T_0 P^2}{P_0^2} + 4P\frac{T_0}{P_0}$$

1. Какая максимальная температура газа в цикле?
2. Какую работу газ совершает за цикл?
3. Найдите КПД цикла.



3 Решения

3.1 Младшая Лига

Задача 1: Анна и Боб

Так как Анна и Боб находятся на одной карусели, то угловая скорость ω у них одинаковая, имеем:

$$\omega = V_A/R$$

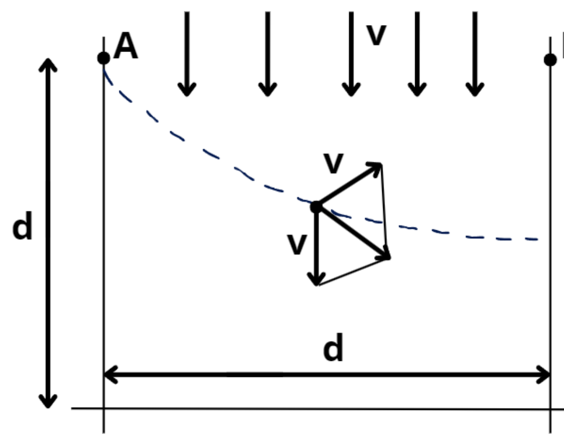
$$\omega = V_B/d$$

$$V_A/R = V_B/d$$

$$\boxed{V_B = V_A \cdot d/R = 1 \cdot 12/6 = 2m/s}$$

Задача 2: Лодочник и берег

Обозначим ширину канала d и нарисуем прямую, перпендикулярную его берегам и находящуюся на расстоянии d вниз по течению от отправной точки A лодки. Лодка первоначально находится на расстоянии d как от отметки Б на противоположном берегу, так и от этой прямой линии. Поскольку скорость воды и скорость лодки относительно воды равны v , то вода относит лодку вниз по течению на то же расстояние, что проходит лодка в направлении к точке . Это означает, что лодка всегда одинаково удалена от точки и от прямой линии. Поэтому лодка движется по параболе, у которой - фокус, а наша прямая линия - директриса. Через некоторое время лодка причаливает к противоположному берегу в точке, расположенной на расстоянии $\frac{d}{2}$ от точки . Поскольку скорость течения равна скорости лодки, лодочник не может подойти к берегу ближе этой точки



Задача 3: Клин в движении

По условию задачи тело покоится относительно наклонной плоскости, то есть движется горизонтально с ускорением относительно инерциальной системы отсчета. На тело действуют силы: тяжести mg, реакции опоры N, трения покоя f. По II закону Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a}$$

или на проекциях на нормаль к наклонной плоскости и на направление вдоль наклонной плоскости:

$$-mg\cos\alpha + N = ma\sin\alpha, \tag{1}$$

$$mg\sin\alpha \pm f = ma\cos\alpha. \tag{2}$$

Сила трения покоя не превышает величины μN, следовательно, из уравнения (2) имеем

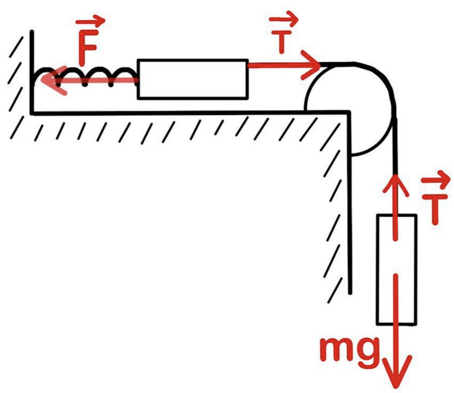
$$|mg\sin\alpha - ma\cos\alpha| \le \mu N. \tag{3}$$

Решая совместно (1) и (3), получаем

$$\boxed{\mu \le \frac{|g\sin\alpha - a\cos\alpha|}{a\sin\alpha + g\cos\alpha}}$$

Задача 4: Система

Пусть грузы сместятся на расстояние x. На основании второго закона Ньютона можно записать



$$\begin{cases} ma = mg - T, \\ ma = T - kx, \end{cases} \tag{1}$$

где T — натяжение нити, kx — сила упругости пружины. Исключая из системы (1) величину T, получим

$$a = \frac{g}{2} - \frac{k}{2m}x. \tag{2}$$

Запишем также уравнение закона сохранения энергии

$$mgx = 2\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}. \tag{3}$$

Из (3) найдём экстремальные смещения грузов (когда $v = 0$)

$$x = 0,\ x_1 = \frac{2mg}{k}. \tag{4}$$

Из уравнения (2) следует, что ускорение грузов линейно зависит от их смещения, следовательно, пределы изменения ускорения соответствуют предельным значениям x:

$$\boxed{a_0 = \frac{g}{2}, \quad a_1 = -\frac{g}{2}.} \tag{5}$$

Скорость грузов максимальна, когда их ускорение равно нулю, т.е. при $x = \dfrac{mg}{k}$.
Из (3) находим

$$\boxed{v_{\max} = g\sqrt{\frac{m}{2k}}.} \tag{6}$$

Укажем еще один способ решения. Уравнение (2) есть уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

Положению равновесия соответствует координата

$$x = \frac{mg}{k}.$$

Учитывая, что начальное положение есть $x = 0$, можно сказать, что амплитуда колебаний грузов

$$A = \frac{mg}{k}.$$

Тогда максимальная скорость

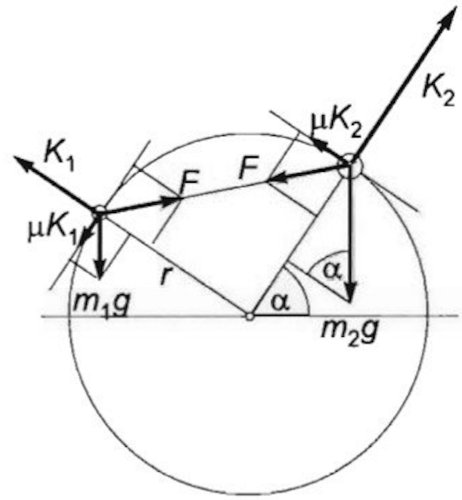
$$\boxed{v_{\max} = A\omega = \frac{mg}{k}\sqrt{\frac{k}{2m}} = g\sqrt{\frac{m}{2k}},}$$

максимальное ускорение

$$\boxed{a_{\max} = A\omega^2 = \frac{mg}{k} \cdot \frac{k}{2m} = \frac{g}{2}.}$$

Задача 5: Бусинки и нить

Решение этой задачи представляет собой «интервал» положений, который можно определить, рассмотрев два крайних случая, когда бусины начинают скользить. В первом решении мы воспользуемся вторым законом Ньютона.
Опишем положение системы с помощью угла α, который представляет собой угол между горизонталью и радиусом, проведенным к большей бусине, как показано на рисунке. Поскольку бусины находятся на концах четверти окружности, нить образует угол 45° с радиусами, проведенными к бусинам. Пусть F — это натяжение нити, K_1 и K_2 — нормальные силы, действующие на бусины. Обозначим $m = m_1$ и $2m = m_2$ для упрощения уравнений. Таким образом, неизвестными являются α, F, K_1 и K_2.



Начнем с рассмотрения ситуации, когда большая бусина находится в крайнем правом положении. (Если бы большая бусина сдвинулась еще дальше вправо, она бы начала скользить вниз по петле, увлекая за собой меньшую бусину.)
Применим второй закон Ньютона к двум бусинам в тангенциальных и нормальных направлениях:

$$m_2 g \sin\alpha + F\frac{\sqrt{2}}{2} - K_2 = 0, \tag{1}$$

$$\mu K_2 + F\frac{\sqrt{2}}{2} - m_2 g \cos\alpha = 0, \tag{2}$$

$$m_1 g \cos\alpha + F\frac{\sqrt{2}}{2} - K_1 = 0, \tag{3}$$

$$\mu K_1 + m_1 g \sin\alpha - F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \tag{4}$$

Исключим нормальные силы, умножив уравнения (1) и (3) на μ и прибавив их к уравнениям (2) и (4) соответственно. В результате останутся только α и F. Вынеся $F\frac{\sqrt{2}}{2}$ за скобки, получим:

$$\mu m_2 g \sin\alpha + F\frac{\sqrt{2}}{2}(\mu + 1) - m_2 g \cos\alpha = 0, \tag{5}$$

$$\mu m_1 g \cos\alpha + m_1 g \sin\alpha + F\frac{\sqrt{2}}{2}(\mu - 1) = 0. \tag{6}$$

Решим (6) относительно $F\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$F\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\mu m_1 g \cos\alpha + m_1 g \sin\alpha}{1-\mu},$$

подставим это в уравнение (5):

$$\mu m_2 g \sin\alpha + (\mu m_1 g \cos\alpha + m_1 g \sin\alpha)\frac{\mu+1}{1-\mu} - m_2 g \cos\alpha = 0.$$

Разделим на g и вынесем $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$:

$$\sin\alpha(\mu m_2 - \mu^2 m_2 + \mu + 1) + \cos\alpha(\mu^2 m_1 + \mu m_1 - m_2 + \mu m_2) = 0,$$

получаем

$$\sin\alpha[\mu m_2(1-\mu) + m_1(1+\mu)] = \cos\alpha[(1-\mu)m_2 - \mu m_1(1+\mu)].$$

откуда тангенс требуемого угла:

$$\tan\alpha = \frac{(1-\mu)m_2 - \mu m_1(1+\mu)}{\mu m_2(1-\mu) + m_1(1+\mu)}.$$

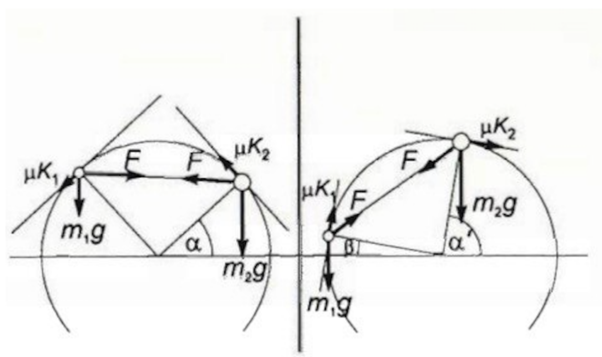
Подставляя известные значения, находим:

$$\tan\alpha = \frac{0.85(2m) - 0.15\cdot m\cdot 1.15}{0.15(2m)\cdot 0.85 + m\cdot 1.15} = \frac{1.7 - 0.172}{0.285 + 1.15} = \frac{1.5275}{1.405} = 1.0872.$$

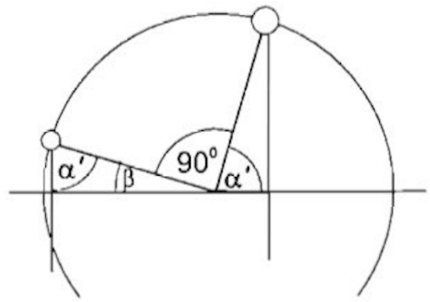
следовательно

$$\boxed{\alpha = \arctan 1.0872 = 47.39^\circ.}$$

Теперь рассмотрим другое крайнее положение системы. Уравнения будут такими же, как и в предыдущем случае, но с противоположными индексами. Следовательно, решение можно получить, поменяв индексы в предыдущем результате.
Это связано с тем, что оба крайних случая симметричны в своей топологии, т.е. второй случай можно получить из первого с помощью преобразования, при котором соответствующие векторы различаются по направлению и величине, но их роль в ситуации и направления их компонент остаются такими же относительно друг друга.



Заметим, что если индексы поменять местами, решение теперь даст угол β, который является углом между горизонталью и радиусом, проведённым к меньшему шарику.



Поскольку мы хотим найти угол между горизонталью и радиусом, проведённым к большему шарику (обозначим этот угол как α'), мы будем использовать $\alpha' = 90° - \beta$ (как показано на рисунке), чтобы определить требуемый угол. Технически это означает, что после обмена индексов в формуле для тангенса угла нам также нужно взять его обратное значение.

Первоначальное решение было:

$$\tan\alpha = \frac{(1-\mu)m_2 - \mu m_1(1+\mu)}{\mu m_2(1-\mu) + m_1(1+\mu)}.$$

После обмена индексов получаем:

$$\tan\beta = \frac{(1-\mu)m_1 - \mu m_2(1+\mu)}{\mu m_1(1-\mu) + m_2(1+\mu)}.$$

Берём обратное значение:

$$\tan\alpha' = \frac{1}{\tan\beta} = \frac{\mu m_1(1-\mu) + m_2(1+\mu)}{(1-\mu)m_1 - \mu m_2(1+\mu)}.$$

Подставляя известные значения, получаем:

$$\tan\alpha' = \frac{0.15\cdot m\cdot 0.85 + (2m)\cdot 1.15}{0.85\cdot m - 0.15\cdot(2m)\cdot 1.15} = 4.8069,$$

откуда находим, что угол, описывающий другое крайнее положение, равен:

$$\boxed{\alpha' = \arctan 4.8069 = 78.25°.}$$

3.2 Старшая Лига

Задача 1: Изменчивая плотность

Найдем сначала массу стержня:

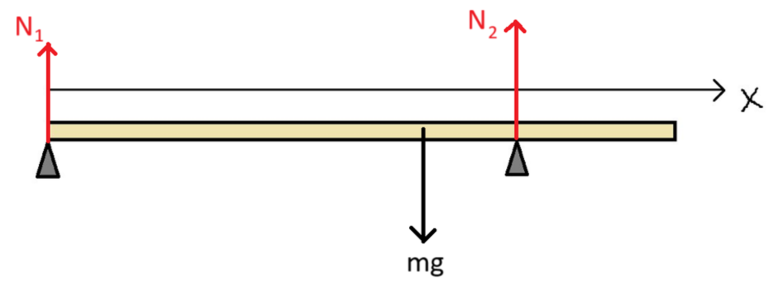
$$dm = \rho dl = \rho_0(1 + \frac{x}{l})dx$$

$$m = \int_0^l \rho_0(1 + \frac{x}{l})\, dx = \frac{3}{2}\rho_0 l$$

(Этот же ответ можно получить используя среднюю арифметическую)
Теперь найдем центр масс:

$$r_c = \frac{\int_0^l \rho_0(1 + \frac{x}{l})x\, dx}{m}$$

$$r_c = \frac{5}{9}l$$



Теперь запишем уравнение моментов:

$$mgr_c - N_2 a = 0$$

Здесь все силы считаются положительными

$$mg(a - r_c) - N_1 a = 0$$

Из этих уравнений находим:

$$\boxed{N_1 = \frac{mg(a - r_c)}{a} = \frac{3\rho_0 lg(a - r_c)}{2a} = \frac{\rho_0 lg(9a - 5l)}{6a}}$$

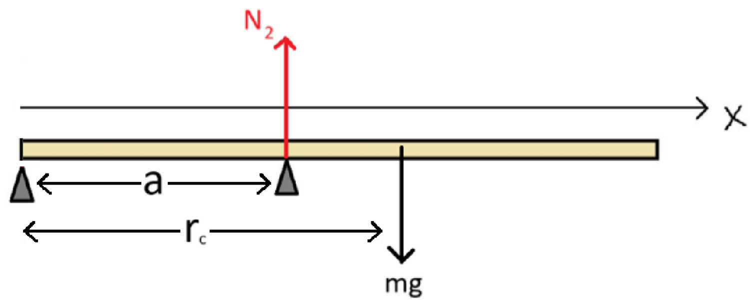
$$\boxed{N_2 = \frac{mgr_c}{a} = \frac{5\rho_0 g l^2}{6a}}$$

Видно что сила реакции опоры может быть положительной только при условии

$$9a - 5l \geq 0$$

$$a \geq \frac{5}{9}l$$

В другом случае, стержень не был бы в равновесии, и начал бы опрокидываться.
Тоесть в случае $a < \frac{5}{9}l$



$$N_1 = 0$$

чтобы найти N_2 распишем уравнение моментов:
$M = J\varepsilon$

$$J\varepsilon = mg(r_c - a) = \frac{3\rho_0 lg}{2}\left(\frac{5l - 9a}{9}\right)$$

Найдем момент инерции относительно точки опора:

$$J_0 = \int r^2 dm = \int_0^l \rho_0(x^2 + \frac{x^3}{l})\, dx = \frac{7}{12}\rho_0 l^3$$

$$J = J_0 + m((r_c - a)^2 - r_c^2)$$

$$J = \rho_0 l\left(\frac{7l^2}{12} + \frac{3a^2}{2} - \frac{5al}{3}\right)$$

Отсюда:

$$\varepsilon = \frac{5l - 9a}{6}\left(\frac{7l^2}{12} + \frac{3a^2}{2} - \frac{5al}{3}\right)^{-1}$$

Найдем ускорение центра масс:

$$a_c = \varepsilon(r_c - a) = \frac{(5l - 9a)^2}{54}\left(\frac{7l^2}{12} + \frac{3a^2}{2} - \frac{5al}{3}\right)^{-1}$$

Теперь запишем второй Закон Ньютона:

$$ma_c = mg - N_2$$

$$N_2 = m(g - a_c)$$

$$\boxed{N_2 = \rho_0 l\left(\frac{3g}{2} - \frac{(5l-9a)^2}{36}\left(\frac{7l^2}{12} + \frac{3a^2}{2} - \frac{5al}{3}\right)^{-1}\right)}$$

Задача 2: Планета

Из графика находим температуру поверхности планеты: $T_0 = 295K$
Формула идеального газа:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT$$

Перепишем его, и найдем протность газа:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$$

Отсюда можем найти плотность на поверхности:

$$\boxed{\rho_0 = \frac{p_0\mu}{RT} = 2.45kg/m^3}$$

2) Можно заметить что температура зависит от высоты линейно до высоты 2.4 км, тоесть:

$$T = T_0 - kh$$

так как, на высоте $h = 2km$, $T = 230K$:

$$k = 32.5K/km$$

изменение давления при подъеме на очень маленькую высоту dh:

$$dp = -\rho g dh$$

Отсюда:

$$dh = -\frac{dT}{k}$$

$$dp = \frac{\rho g}{k}dT$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{\mu g}{kR}\frac{dT}{T}$$

Интегрируя получим выражение:

$$ln\frac{p}{p_0} = \frac{\mu g}{kR}ln\frac{T}{T_0}$$

$$\boxed{p = p_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\mu g}{kR}} = 121574Pa}$$

Задача 3: Задача с шаром

Для начала введем новую константу a=1м. В дальнейшем мы будем использовать её для сохранения размерности в формулах.
Запишем закон сохранения энергии:

$$mgh_0 = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

$$v^2 = 2g(h_0 - h)$$

Теперь запишем Второй Закон Ньютона:

$$ma_c = N - mg$$

где $a_c = \frac{v^2}{R}$

$$N = m(g + \frac{v^2}{R})$$

Запишем формулу радиуса кривизны:

$$R = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

Для нижней точки получим $(x = 0)$:

$$R_0 = \frac{1}{2}a$$

$$v^2 = 2gh_0$$

Тогда,

$$N_0 = mg + \frac{4mgh_0}{a} = mg(1 + \frac{4h_0}{a})$$

Теперь найдем силу давления в высоте $\frac{h_0}{3}$

$$tan(\pi - \theta) = \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{mv^2}{R} = N - mg_r = N - mgcos(\theta) = N - mgcos(tan^{-1}(-2x))$$

$$x = -\sqrt{\frac{h_0}{3a}}$$

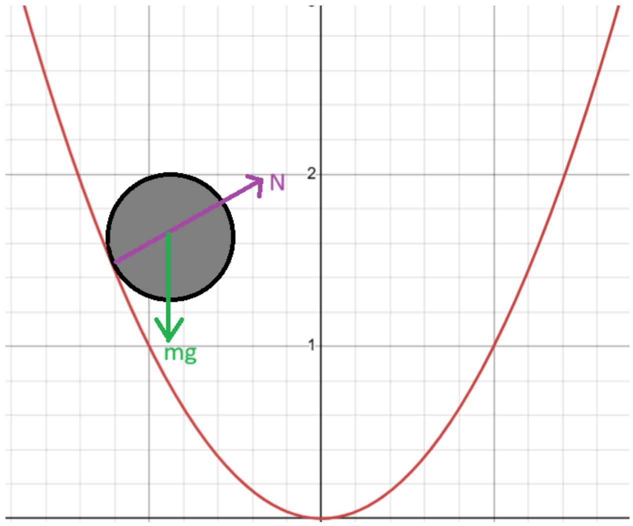


Рис. 1: Размеры шара увеличены ради удобства

$$\boxed{R = \frac{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{\left(1+\frac{4h_0}{3a}\right)^{\frac{3}{2}}}{2}a}$$

Из этих уравнений получаем:

$$N = mg\left(\frac{8h_0}{3aC^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{C^{\frac{1}{2}}}\right),$$

где $C = 1 + \dfrac{4h_0}{3a}$

Задача 4: Колебания двери

Рассмотрим автомобиль, равномерно ускоряющийся из состояния покоя с приоткрытой дверью. В системе отсчета, связанной с автомобилем, на дверь действует неинерциальная сила, вызванная ускорением автомобиля. Эта сила приводит к закрытию двери.

Предположим, что дверь имеет шарнир без трения и равномерное распределение массы, а её длина L измеряется от шарнира до внешнего края.

Сила, действующая на дверь в системе отсчета автомобиля, равна:

$$F = -ma$$

где m — масса двери, а a — ускорение автомобиля.

Момент силы τ относительно шарнира, вызванный этой силой, равен:

$$\tau = F \cdot \frac{L}{2}\cos\theta = -ma \cdot \frac{L}{2}\cos\theta$$

Согласно ротационной форме второго закона Ньютона:

$$I\alpha = \tau$$

где $I = \frac{1}{3}mL^2$ — момент инерции двери относительно шарнира, а α — угловое ускорение.
Таким образом, уравнение движения имеет вид:

$$\frac{1}{3}mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -ma \cdot \frac{L}{2}\cos\theta$$

Упрощая:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3a}{2L}\cos\theta = 0$$

Для малых углов $\cos\theta \approx 1$, поэтому:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{3a}{2L}}$ — угловая частота колебания.
Это уравнение гармонических колебаний. Время, за которое дверь закрывается, соответствует четверти периода T этих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3a}}$$

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2L}{3a}}$$

Расстояние x, пройденное автомобилем за это время, равно:

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2L}{3a}}\right)^2$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{2L}{3a} = \frac{\pi^2 L}{12}}$$

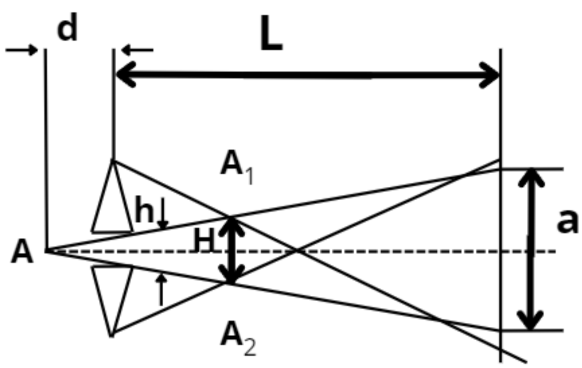
Задача 5: Линза в разрезе

Билинза дает два изображения A_1 и A_2 источника A на расстоянии H друг от друга и L_1 от экрана.

$$H = \frac{hd}{d-F}$$

$$L_1 = L - \frac{dF}{d-F}$$

Расстояние между соседними светлыми интерференционными полосами на экране:



$$x = \frac{\lambda L_1}{H}$$

Ширина полосы перекрытия на экране двух световых пучков составляет:

$$a = h\frac{L+d}{d}$$

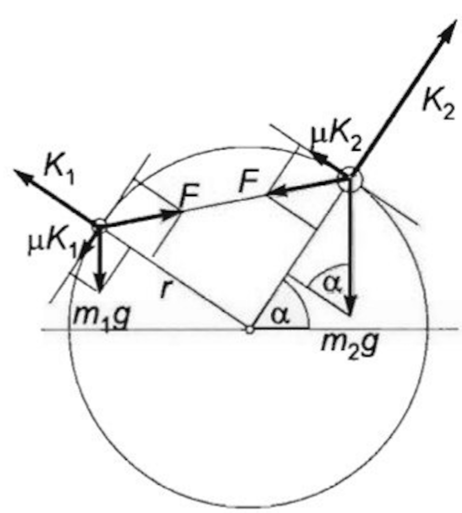
Следовательно,

$$\boxed{N \approx \frac{a}{x} = \frac{h^2(L+d)}{\lambda(Ld - LF - dF)} = 25}$$

Задача 6: Бусинки и нить

Решение этой задачи представляет собой «интервал» положений, который можно определить, рассмотрев два крайних случая, когда бусины начинают скользить. В первом решении мы воспользуемся вторым законом Ньютона.

Опишем положение системы с помощью угла α, который представляет собой угол между горизонталью и радиусом, проведенным к большей бусине, как показано на рисунке. Поскольку бусины находятся на концах четверти окружности, нить образует угол 45° с радиусами, проведенными к бусинам. Пусть F — это натяжение нити, K_1 и K_2 — нормальные силы, действующие на бусины. Обозначим $m = m_1$ и $2m = m_2$ для упрощения уравнений. Таким образом, неизвестными являются α, F, K_1 и K_2.



Начнем с рассмотрения ситуации, когда большая бусина находится в крайнем правом положении. (Если бы большая бусина сдвинулась еще дальше вправо, она бы начала скользить вниз по петле, увлекая за собой меньшую бусину.)
Применим второй закон Ньютона к двум бусинам в тангенциальных и нормальных направлениях:

$$m_2 g\sin\alpha + F\frac{\sqrt{2}}{2} - K_2 = 0, \tag{1}$$

$$\mu K_2 + F\frac{\sqrt{2}}{2} - m_2 g\cos\alpha = 0, \tag{2}$$

$$m_1 g\cos\alpha + F\frac{\sqrt{2}}{2} - K_1 = 0, \tag{3}$$

$$\mu K_1 + m_1 g\sin\alpha - F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \tag{4}$$

Исключим нормальные силы, умножив уравнения (1) и (3) на μ и прибавив их к уравнениям (2) и (4) соответственно. В результате останутся только α и F. Вынеся $F\frac{\sqrt{2}}{2}$ за скобки, получим:

$$\mu m_2 g\sin\alpha + F\frac{\sqrt{2}}{2}(\mu+1) - m_2 g\cos\alpha = 0, \tag{5}$$

$$\mu m_1 g\cos\alpha + m_1 g\sin\alpha + F\frac{\sqrt{2}}{2}(\mu-1) = 0. \tag{6}$$

Решим (6) относительно $F\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$F\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\mu m_1 g\cos\alpha + m_1 g\sin\alpha}{1-\mu},$$

подставим это в уравнение (5):

$$\mu m_2 g\sin\alpha + (\mu m_1 g\cos\alpha + m_1 g\sin\alpha)\frac{\mu+1}{1-\mu} - m_2 g\cos\alpha = 0.$$

Разделим на g и вынесем $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$:

$$\sin\alpha(\mu m_2 - \mu^2 m_2 + \mu + 1) + \cos\alpha(\mu^2 m_1 + \mu m_1 - m_2 + \mu m_2) = 0,$$

получаем

$$\sin\alpha[\mu m_2(1-\mu) + m_1(1+\mu)] = \cos\alpha[(1-\mu)m_2 - \mu m_1(1+\mu)].$$

откуда тангенс требуемого угла:

$$\tan\alpha = \frac{(1-\mu)m_2 - \mu m_1(1+\mu)}{\mu m_2(1-\mu) + m_1(1+\mu)}.$$

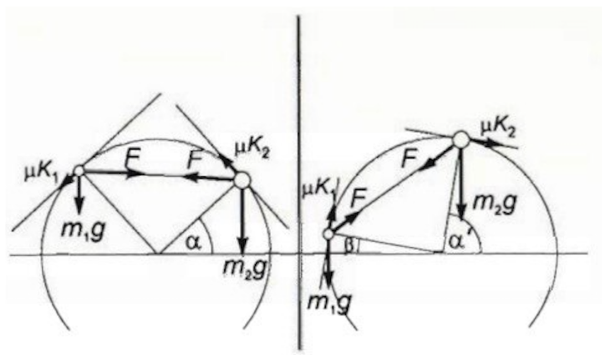
Подставляя известные значения, находим:

$$\tan\alpha = \frac{0.85(2m) - 0.15\cdot m\cdot 1.15}{0.15(2m)\cdot 0.85 + m\cdot 1.15} = \frac{1.7 - 0.172}{0.285 + 1.15} = \frac{1.5275}{1.405} = 1.0872.$$

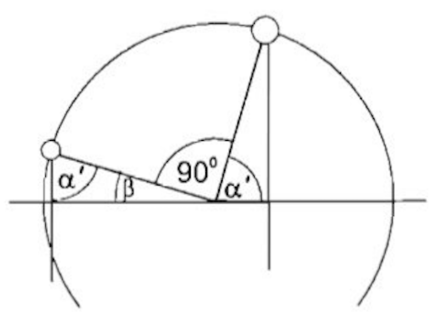
следовательно

$$\boxed{\alpha = \arctan 1.0872 = 47.39°.}$$

Теперь рассмотрим другое крайнее положение системы. Уравнения будут такими же, как и в предыдущем случае, но с противоположными индексами. Следовательно, решение можно получить, поменяв индексы в предыдущем результате.
Это связано с тем, что оба крайних случая симметричны в своей топологии, т.е. второй случай можно получить из первого с помощью преобразования, при котором соответствующие векторы различаются по направлению и величине, но их роль в ситуации и направления их компонент остаются такими же относительно друг друга.



Заметим, что если индексы поменять местами, решение теперь даст угол β, который является углом между горизонталью и радиусом, проведённым к меньшему шарику.



Поскольку мы хотим найти угол между горизонталью и радиусом, проведённым к большему шарику (обозначим этот угол как α'), мы будем использовать $\alpha' = 90° - \beta$ (как показано на рисунке), чтобы определить требуемый угол. Технически это означает, что после обмена индексов в формуле для тангенса угла нам также нужно взять его обратное значение.

Первоначальное решение было:

$$\tan\alpha = \frac{(1-\mu)m_2 - \mu m_1(1+\mu)}{\mu m_2(1-\mu) + m_1(1+\mu)}.$$

После обмена индексов получаем:

$$\tan\beta = \frac{(1-\mu)m_1 - \mu m_2(1+\mu)}{\mu m_1(1-\mu) + m_2(1+\mu)}.$$

Берём обратное значение:

$$\tan\alpha' = \frac{1}{\tan\beta} = \frac{\mu m_1(1-\mu) + m_2(1+\mu)}{(1-\mu)m_1 - \mu m_2(1+\mu)}.$$

Подставляя известные значения, получаем:

$$\tan\alpha' = \frac{0.15\cdot m\cdot 0.85 + (2m)\cdot 1.15}{0.85\cdot m - 0.15\cdot(2m)\cdot 1.15} = 4.8069,$$

откуда находим, что угол, описывающий другое крайнее положение, равен:

$$\boxed{\alpha' = \arctan 4.8069 = 78.25^\circ.}$$

Задача 7: Цикл

По графику видно, что $T_{min} = T_0$

$$T = -\frac{T_0P^2}{P_0^2} + 4P\frac{T_0}{P_0}$$

Для нахождения максимальной температуры приравняем производную (T‘) к нулю.

$$0 = -2p\frac{T_0}{p_0^2} + 4p\frac{T_0}{p_0}$$

Оптимальное давление для максимальной температуры $p = 2p_0$
Подсталяя это давление в первое уравнение, получим:

$$\boxed{T_{max} = 4T_0 = 1200K}$$

Уравнение состояние для 1 моля идеального газа:

$$PV = RT \tag{1}$$

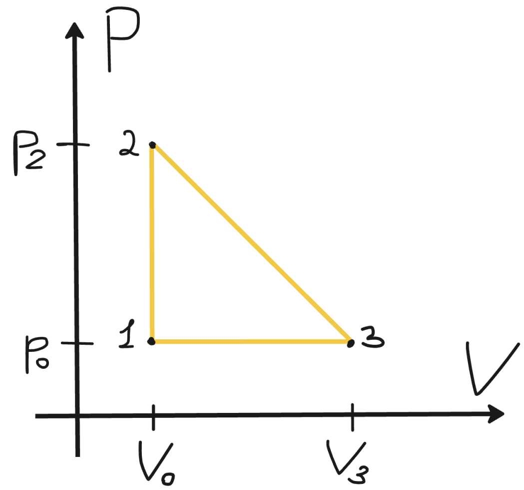
Найдем зависимость p(V) на участке 2-3:

$$\frac{PV}{R} = -\frac{T_0P^2}{P_0^2} + 4P\frac{T_0}{P_0}$$

Получим:

$$P(V) = 4p_0 - \frac{p_0}{V_0}\cdot V \tag{2}$$

Это прямая с отрицательным наклоном. Также из графика видно, что процесс 1-2 изохора, 3-1 изобора. Нарисуем график P(V):



Уравнение Менделеева Клайперона в точках 1, 2, 3 соотвественно:

$$P_0V_0 = RT_0$$

$$P_2V_0 = RT_2$$

$$P_0V_3 = RT_3$$

Воспользуемся зависимостью P(V) на участке 2-3
Для точки 2:

$$p_2 = 4p_0 - \frac{p_0}{V_0} \cdot V_0 = 3p_0$$

Отсюда $T_2 = 3T_0$
Для точки 3:

$$p_0 = 4p_0 - \frac{p_0}{V_0} \cdot V_3$$

Отсюда $V_3 = 3V_0$ и $T_3 = 3T_0$
Работа за цикл равна площади треугольника:

$$\boxed{A = \frac{(P_2 - P_0) \cdot (V_3 - V_0)}{2} = 2P_0V_0 = 2RT_0} \tag{3}$$

КПД можно найти с помощью формулы:

$$\eta = \frac{A}{Q_+} \tag{4}$$

где Q_+ это положительная теплота за весь процесс.
В процессе 2-3 теплота и положительная, и отрицательная (подвод тепла сменяется отводом). Чтобы найти точку в которой теплоемкость газа равняется нулю, надо

найти пересечение линейной убывающей зависимости с адиабатой, уравнение которой описывается следующим образом:

$$PV^{\gamma} = const \tag{5}$$

Для одноатомного газа $\gamma = 5/3$
Обозначим точку пересечения двух функции цифрой 4. Из (2) и (5) найдем:

$$P_4 = \frac{3}{2}P_0 \text{ и } V_4 = \frac{5}{2}V_0$$

Воспользуемся первым законом термодинамики для вычисления Q_+:

$$dQ = dA + dU \tag{6}$$

$$Q_+ = Q_{12} + Q_{24} = dU_{12} + dU_{24} + dA_{24} =$$

$$= C_V(T_2 - T_0) + C_V(T_4 - T_2) + \frac{P_2 - P_4}{2}(V_4 - V_2) = 5.25RT_0$$

Подставляя в КПД, получим:

$$\boxed{\eta = \frac{2RT_0}{5.25RT_0} \approx 0.38}$$