

Gewinnspiele

Bei den in dieser Aufgabe behandelten Gewinnspielen wird ein fairer Spielwürfel geworfen, bei dem die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Würfelergbnis auftreten. Dabei wird der Spielwürfel 2-mal hintereinander geworfen.

a) Beim 2-maligen Werfen eines Spielwürfels gibt es 36 mögliche Würfelergbnisse.

- 1) Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle durch Eintragen der entsprechenden Zahlen.

[0/1 P.]

Anzahl der möglichen Würfelergbnisse, bei denen ...		
die Augenzahl beim 2. Wurf kleiner als beim 1. Wurf ist	beide Augenzahlen gleich sind	die Augenzahl beim 2. Wurf größer als beim 1. Wurf ist
15		

- 2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl beim 2. Wurf kleiner als beim 1. Wurf ist.

$P(\text{„die Augenzahl ist beim 2. Wurf kleiner als beim 1. Wurf“}) =$ _____ [0/1 P.]

Folgende Bedingungen gelten für ein Spiel:

Ist die Augenzahl beim 2. Wurf kleiner als beim 1. Wurf, so gewinnt man 5 Euro.

Ist die Augenzahl beim 2. Wurf größer als beim 1. Wurf, so gewinnt man 3 Euro.

Sind die beiden Augenzahlen gleich, so verliert man 10 Euro.

- 3) Berechnen Sie den Erwartungswert für den Gewinn bei diesem Spiel.

[0/1 P.]

- b) Im Folgenden sind die Wahrscheinlichkeiten einer Zufallsvariablen X für ein anderes Gewinnspiel dargestellt.

Die Zufallsvariable X gibt dabei die größte geworfene Augenzahl beider Würfe an.

Es wird folgende Schreibweise verwendet:

$$\left(\underbrace{\begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array}}_{1. \text{ Wurf}}, \underbrace{\begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array}}_{2. \text{ Wurf}} \right)$$

$$P(X = 1) = P\left(\left\{\left(\begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array}\right)\right\}\right) = \frac{1}{36}$$

$$P(X = 2) = P\left(\left\{\left(\begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array}\right), \left(\begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array}\right), \left(\begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array}\right)\right\}\right) = \frac{3}{36}$$

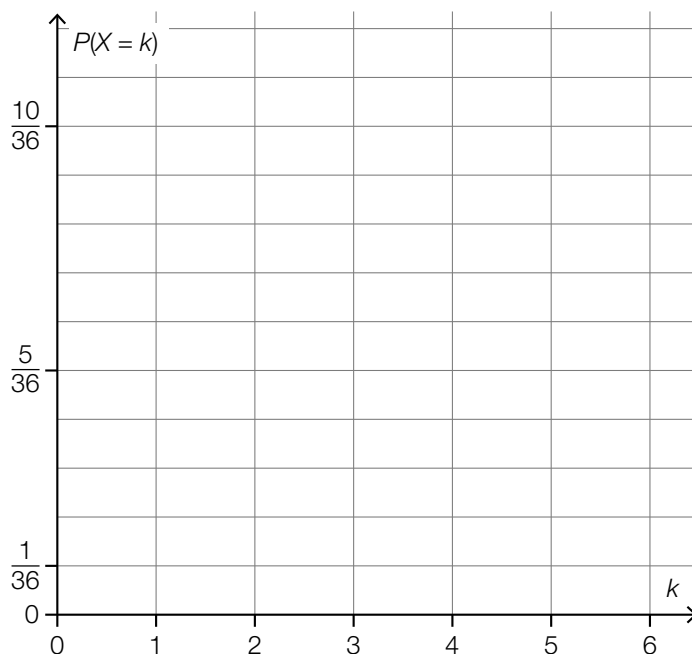
$$P(X = 3) = P\left(\left\{\left(\begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array}\right), \left(\begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array}\right), \left(\begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array}\right), \left(\begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array}\right), \left(\begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array}\right)\right\}\right) = \frac{5}{36}$$

usw.

$$P(X = 6) = \dots = \frac{11}{36}$$

Die obigen Wahrscheinlichkeiten bilden eine arithmetische Folge.

- 1) Zeigen Sie dies für $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ und $P(X = 3)$. [0/1 P.]
- 2) Erstellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz für diese Folge. [0/1 P.]
- 3) Stellen Sie im nachstehenden Koordinatensystem die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion als Säulendiagramm dar. [0/1 P.]



Möglicher Lösungsweg

a1)

Anzahl der möglichen Würfelergebnisse, bei denen ...		
die Augenzahl beim 2. Wurf kleiner als beim 1. Wurf ist	beide Augenzahlen gleich sind	die Augenzahl beim 2. Wurf größer als beim 1. Wurf ist
15	6	15

a2) $P(\text{„die Augenzahl ist beim 2. Wurf kleiner als beim 1. Wurf“}) = \frac{15}{36} = 0,4166\dots$

a3) X ... Gewinn in Euro

$$E(X) = 5 \cdot \frac{15}{36} - 10 \cdot \frac{6}{36} + 3 \cdot \frac{15}{36} = 1,66\dots$$

Der Erwartungswert für den Gewinn bei diesem Spiel beträgt rund 1,7 Euro.

a1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Tabelle.

a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Erwartungswerts.

b1) Bei einer arithmetischen Folge ist die Differenz aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant.

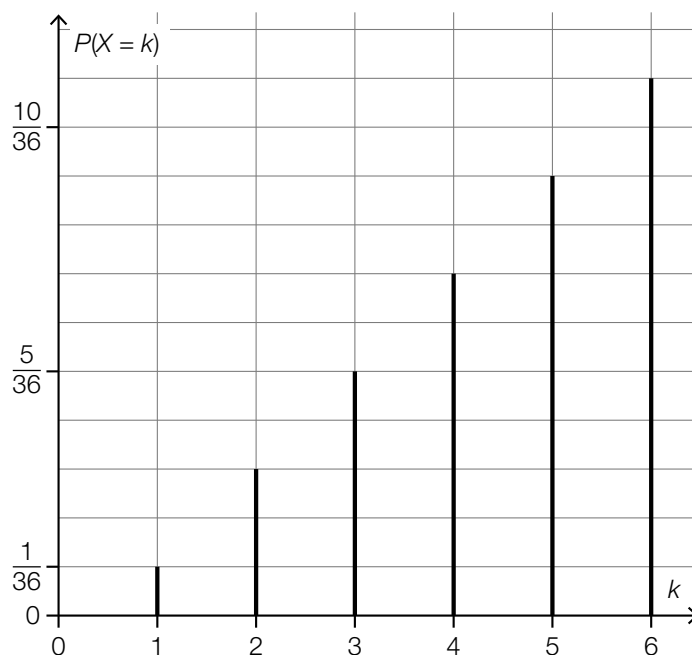
Es gilt:

$$P(X=2) - P(X=1) = P(X=3) - P(X=2) = \frac{2}{36}$$

Es handelt sich hier also um eine arithmetische Folge.

b2) $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{36}$ mit $a_1 = \frac{1}{36}$

b3)



b1) Ein Punkt für das richtige Zeigen.

b2) Ein Punkt für das richtige Erstellen des rekursiven Bildungsgesetzes.

b3) Ein Punkt für das richtige Darstellen der Wahrscheinlichkeitsfunktion.