

Spirometrie

Die sogenannte *Spirometrie* ist ein Verfahren zur Beurteilung der Lungenfunktion anhand des ein- bzw. ausgeatmeten Luftvolumens.

Dabei wird das Luftvolumen in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Funktion V beschrieben.

Die momentane Änderungsrate des Luftvolumens wird als Durchflussrate $Q(t)$ bezeichnet, also $Q(t) = V'(t)$.

a) Im Modell A wird die Durchflussrate durch die Funktion Q_A beschrieben:

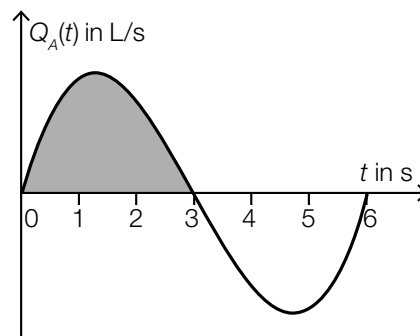
$$Q_A(t) = a \cdot t \cdot (t - 3) \cdot (t - 6)$$

t ... Zeit in s mit $t = 0$ für den Beginn des Einatmens

$Q_A(t)$... Durchflussrate zur Zeit t in L/s

a ... Parameter

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion Q_A bei einmaligem Ein- und Ausatmen dargestellt.



- 1) Interpretieren Sie den Inhalt der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.
Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

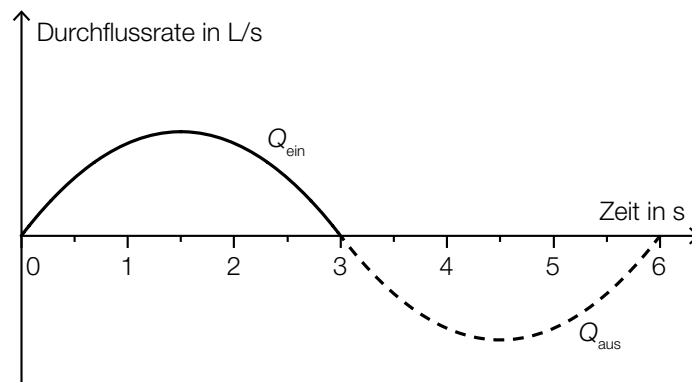
[0/1 P.]

Es gilt: $\int_0^3 Q_A(t) dt = 0,5$

- 2) Ermitteln Sie den Parameter a .

[0/1 P.]

- b) Im Modell B wird die Durchflussrate beim Einatmen durch die quadratische Funktion Q_{ein} beschrieben. Die Durchflussrate beim Ausatmen wird durch die quadratische Funktion Q_{aus} beschrieben.



$$Q_{\text{ein}}(t) = -\frac{1}{9} \cdot \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

t ... Zeit in s mit $t = 0$ für den Beginn des Einatmens

$Q_{\text{ein}}(t)$... Durchflussrate zur Zeit t in L/s

Der Graph der Funktion Q_{aus} entsteht dabei aus dem Graphen der Funktion Q_{ein} durch Verschiebung nach rechts und Spiegelung an der horizontalen Achse.

Dabei gilt: $Q_{\text{ein}}(3) = Q_{\text{aus}}(3)$

- 1) Tragen Sie die fehlenden Rechenzeichen und Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$$Q_{\text{aus}}(t) = \boxed{} \cdot \left(t \boxed{} \boxed{}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

[0/1 P.]

- c) Bei einer Spirometrie atmet man durch ein Rohr, in dem sich viele kleine Lamellen befinden. Dabei wird die Durchflussrate mit folgender Formel berechnet:

$$Q = \frac{r^4}{k \cdot \ell} \cdot \Delta p$$

Q ... Durchflussrate in L/s

r ... Innenradius des Rohres in dm

ℓ ... Länge des Rohres in dm

k ... Konstante

Δp ... Druckabfall zwischen Anfang und Ende des Rohres in Pascal (Pa)

- 1) Zeigen Sie, dass die Konstante k die Einheit Pascalsekunden (Pa · s) hat.

[0/1 P.]

Es wird behauptet: Bei einem Rohr mit einem um 12 % kleineren Radius ist bei gleicher Durchflussrate und gleichbleibenden anderen Größen der Druckabfall um mehr als 65 % größer.

- 2) Weisen Sie nach, dass diese Behauptung richtig ist.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) Der Flächeninhalt entspricht dem (in den ersten 3 Sekunden) eingeatmeten Luftvolumen in Litern.

$$a2) \int_0^3 a \cdot t \cdot (t-3) \cdot (t-6) dt = 0,5$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$a = \frac{2}{81} = 0,0246...$$

a1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren unter Angabe der zugehörigen Einheit.

a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Parameters a .

$$b1) Q_{\text{aus}}(t) = \frac{1}{9} \cdot \left(t - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

b1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen und Rechenzeichen.

$$c1) k = \frac{r^4}{Q \cdot \ell} \cdot \Delta p$$

Einheit der Konstanten k :

$$\frac{\frac{\text{dm}^4}{\frac{\text{L}}{\text{s}} \cdot \text{dm}}}{\text{s}} \cdot \text{Pa} = \frac{\text{dm}^4}{\frac{\text{dm}^3}{\text{s}} \cdot \text{dm}} \cdot \text{Pa} = \frac{\text{dm}^4 \cdot \text{s}}{\text{dm}^4} \cdot \text{Pa} = \text{Pa} \cdot \text{s}$$

$$c2) \frac{(0,88 \cdot r)^4}{k \cdot \ell} \cdot \Delta p_{\text{neu}} = \frac{r^4}{k \cdot \ell} \cdot \Delta p$$

$$0,88^4 \cdot \Delta p_{\text{neu}} = \Delta p$$

$$\Delta p_{\text{neu}} = \frac{\Delta p}{0,88^4} = \Delta p \cdot 1,667...$$

Der Druckabfall wird um rund 67 % größer, also ist die Behauptung richtig.

Der geforderte Nachweis kann auch mit konkreten Zahlen erfolgen.

c1) Ein Punkt für das richtige Zeigen.

c2) Ein Punkt für das richtige Nachweisen.