

Heizungstechnik

- a) In einem bestimmten Zimmer steigt nach dem Einschalten der Heizung die Temperatur T an. Der Verlauf der Temperatur T kann modellhaft durch die nachstehende Differenzialgleichung beschrieben werden.

$$\frac{dT}{dt} = a \cdot (b - T)$$

t ... Zeit nach dem Einschalten der Heizung in min

$T(t)$... Temperatur im Zimmer zur Zeit t in $^{\circ}\text{C}$

a, b ... Parameter

- 1) Geben Sie die zugehörige homogene Differenzialgleichung an.

[0/1 P.]

Für die allgemeine Lösung T_h der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung gilt:

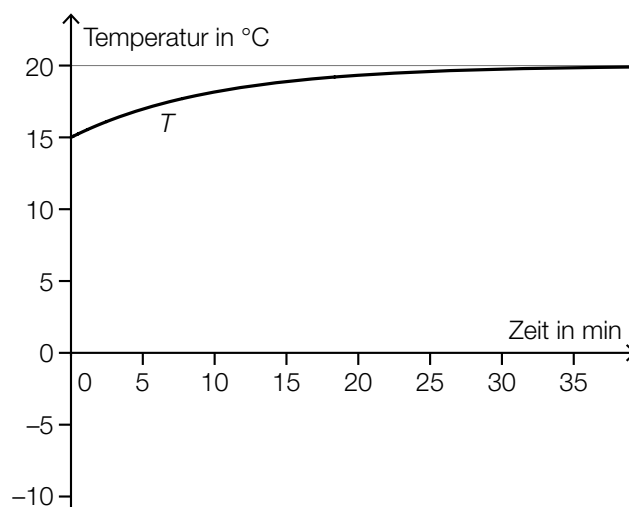
$$T_h(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{10}}$$

C ... Konstante

- 2) Ermitteln Sie den Parameter a .

[0/1 P.]

Eine Lösung der Differenzialgleichung $\frac{dT}{dt} = a \cdot (b - T)$ ist durch den Graphen der Funktion T in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.



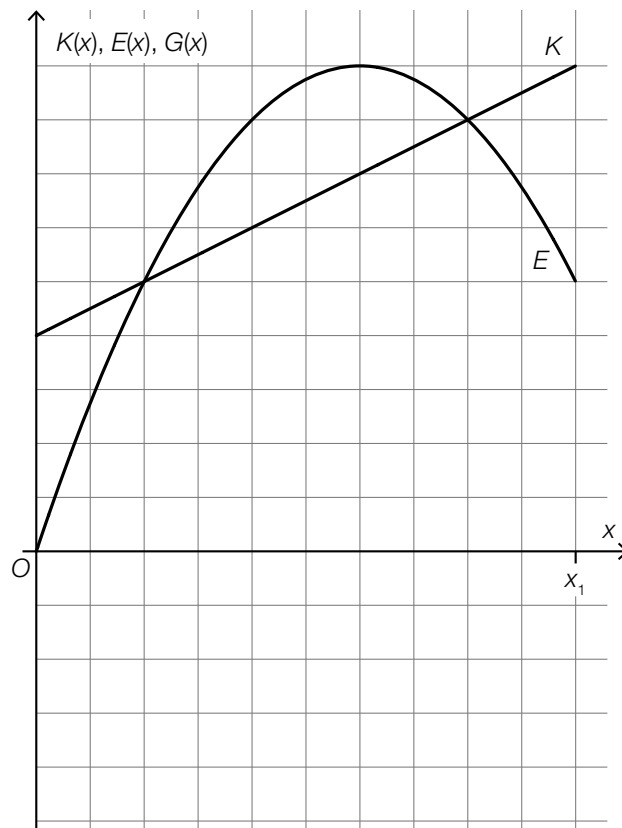
- 3) Ordnen Sie den beiden Ausdrücken jeweils den richtigen Wert aus A bis D zu.

[0/1 P.]

$T(0)$	
b	

A	-5
B	0
C	15
D	20

- b) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K und der Graph der Erlösfunktion E für einen bestimmten Typ von Wärmepumpen dargestellt.



$$K(x) = k \cdot x + d$$

$$E(x) = m \cdot x - n \cdot x^2$$

x ... Anzahl der Wärmepumpen mit
 $0 \leq x \leq x_1$

$K(x)$... Kosten bei der Anzahl x

$E(x)$... Erlös bei der Anzahl x

k, d, m, n ... positive Koeffizienten

- 1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der zugehörigen Gewinnfunktion G im Intervall $[0; x_1]$ ein. [0/1 P.]

Die Gewinnfunktion G ist eine quadratische Funktion mit den Koeffizienten a , b und c .

$$G(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

- 2) Geben Sie die Koeffizienten a und b der Gewinnfunktion G an. Verwenden Sie dabei k , m und n .

$$a = \underline{\hspace{2cm}}$$

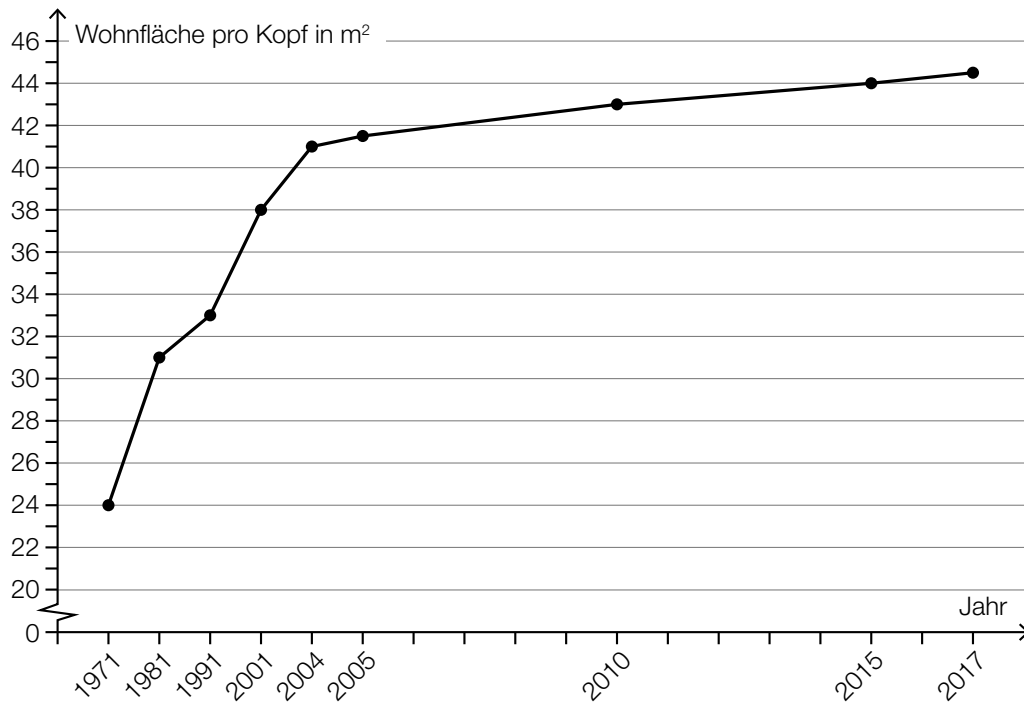
$$b = \underline{\hspace{2cm}}$$

[0/1 P.]

- 3) Zeigen Sie, dass der Scheitelpunkt der Gewinnfunktion G an der Stelle $x_s = \frac{m-k}{2 \cdot n}$ liegt.

[0/1 P.]

- c) In einem Zeitungsartikel ist die Entwicklung der Wohnfläche pro Kopf in Österreich im Zeitraum von 1971 bis 2017 grafisch dargestellt. Die einzelnen Datenpunkte sind dabei durch Geradenstücke verbunden. (Siehe nachstehende Abbildung.)



Quelle: Salzburger Nachrichten, 5. Jänner 2019 (adaptiert).

Bernhard betrachtet die Abbildung und behauptet: „Im Zeitraum von 1971 bis 1981 ist die durchschnittliche jährliche Zunahme der Wohnfläche pro Kopf größer als im Zeitraum von 2001 bis 2004.“

- 1) Weisen Sie nach, dass diese Behauptung falsch ist.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{dT}{dt} = -a \cdot T$

oder:

$$\frac{dT}{dt} + a \cdot T = 0$$

a2) $-\frac{1}{10} \cdot C \cdot e^{-\frac{t}{10}} = -a \cdot C \cdot e^{-\frac{t}{10}}$
 $a = \frac{1}{10}$

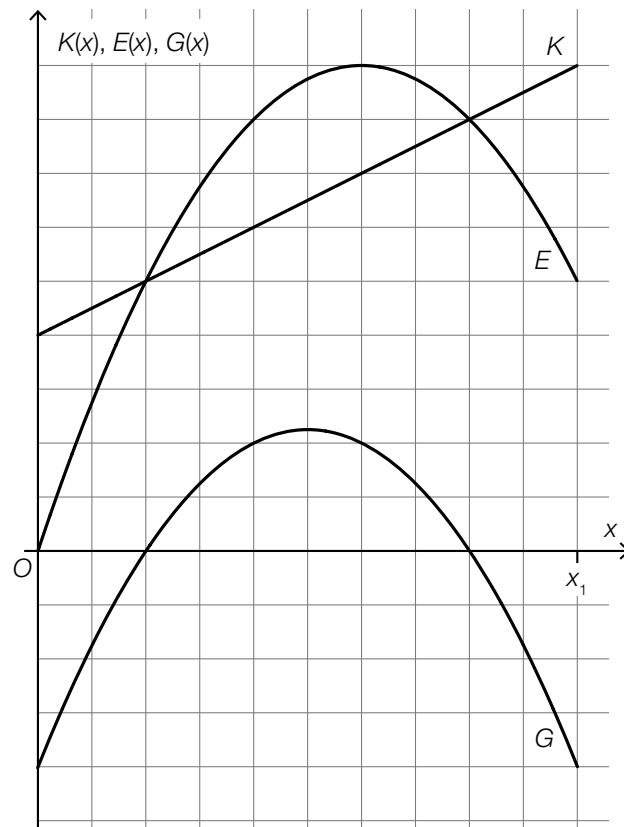
a3)

$T(0)$	C
b	D

A	-5
B	0
C	15
D	20

- a1) Ein Punkt für das Angeben der richtigen homogenen Differenzialgleichung.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Parameters a .
a3) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

b1)



Im Hinblick auf die Punktevergabe ist das richtige Einzeichnen des Graphen der quadratischen Funktion G an den Stellen $x = 0$ und $x = x_1$ sowie an den beiden Nullstellen relevant.

b2) $a = -n$
 $b = m - k$

b3) $G'(x) = -2 \cdot n \cdot x + m - k$
 $G'(x_s) = 0 \quad \text{oder} \quad -2 \cdot n \cdot x_s + m - k = 0$
 $x_s = \frac{m - k}{2 \cdot n}$

b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen im Intervall $[0; x_1]$.

b2) Ein Punkt für das richtige Angeben der Koeffizienten a und b .

b3) Ein Punkt für das richtige Zeigen.

c1) durchschnittliche jährliche Zunahme der Wohnfläche pro Kopf im Zeitraum von 1971 bis 1981: $\frac{31 - 24}{10} = \frac{7}{10}$

durchschnittliche jährliche Zunahme der Wohnfläche pro Kopf im Zeitraum von 2001 bis 2004: $\frac{41 - 38}{3} = 1$

Bernhards Behauptung ist also falsch.

c1) Ein Punkt für das richtige Nachweisen.