

Förderband*

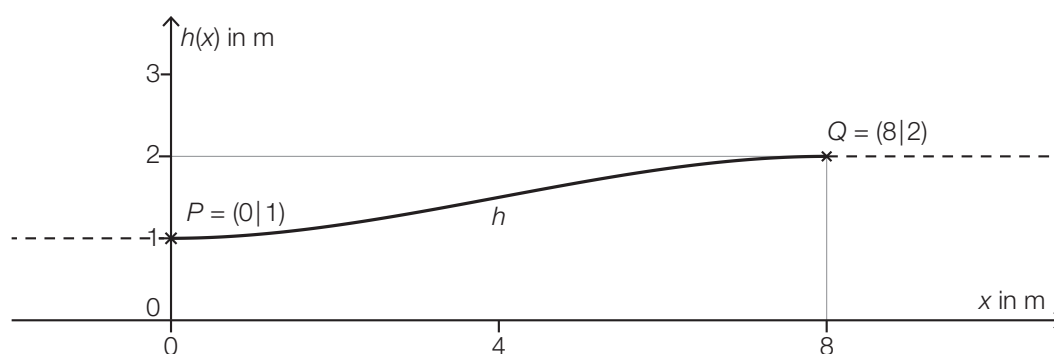
Aufgabennummer: B_525

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

Ein neues Förderband wird geplant (siehe unten stehende Abbildung). Es soll bis zum Punkt P horizontal verlaufen, dann einen Höhenunterschied von 1 m überwinden und ab dem Punkt Q wieder horizontal verlaufen. Im Intervall $0 \leq x \leq 8$ soll der Verlauf des Förderbands mithilfe einer Funktion h beschrieben werden.



Für die Modellierung der Funktion h werden verschiedene Varianten überlegt. Der Graph der Funktion h soll durch die Punkte P und Q verlaufen und dort jeweils eine waagrechte Tangente haben.

- a) Im Modell A wird der Verlauf des Förderbands im Intervall $0 \leq x \leq 8$ durch die Polynomfunktion 3. Grades h mit $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben.

- 1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von h .
- 2) Berechnen Sie diese Koeffizienten.

- b) Im Modell B wird der Verlauf des Förderbands im Intervall $0 \leq x \leq 8$ durch die Funktion h mit $h(x) = a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} \cdot x\right) + d$ beschrieben.

- 1) Geben Sie mithilfe der obigen Abbildung die Parameter a und d an.

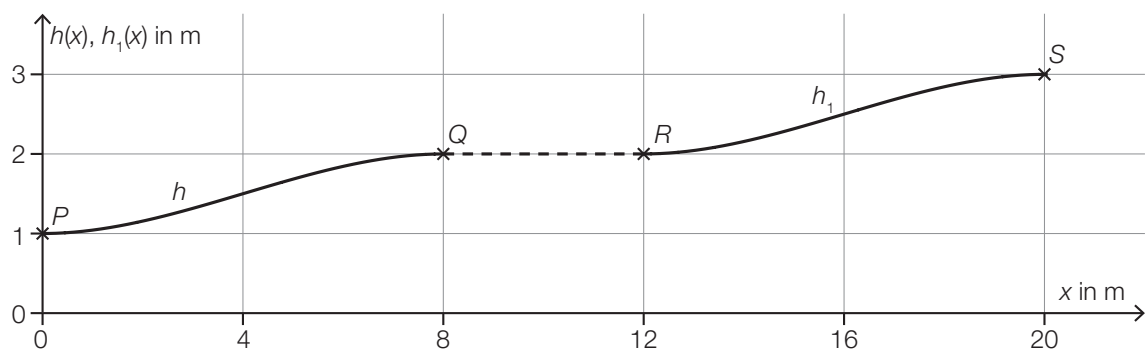
$a =$ _____

$d =$ _____

Das Förderband soll an keiner Stelle eine Steigung von mehr als 20 % haben.

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Vorgabe im Modell B eingehalten wird.

- c) Nach dem Punkt Q verläuft das Förderband 4 m horizontal bis zum Punkt R . Vom Punkt R bis zum Punkt S wird der Verlauf des Förderbands durch die Funktion h_1 beschrieben. (Siehe nachstehende Abbildung.)



Der Graph der Funktion h_1 entsteht durch Verschiebung des Graphen der Funktion h .

- 1) Kreuzen Sie die richtige Funktionsgleichung von h_1 an. [1 aus 5]

$h_1(x) = h(x - 12) - 1$	☐
$h_1(x) = h(x - 4) - 1$	☐
$h_1(x) = h(x + 4) + 1$	☐
$h_1(x) = h(x + 12) + 1$	☐
$h_1(x) = h(x - 12) + 1$	☐

- 2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Länge L des Förderbands vom Punkt P bis zum Punkt S auf.

$L =$ _____

Möglicher Lösungsweg

a1) $h'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

I: $h(0) = 1$

II: $h(8) = 2$

III: $h'(0) = 0$

IV: $h'(8) = 0$

oder:

I: $d = 1$

II: $512 \cdot a + 64 \cdot b + 8 \cdot c + d = 2$

III: $c = 0$

IV: $192 \cdot a + 16 \cdot b + c = 0$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$a = -\frac{1}{256} = -0,00390\dots$$

$$b = \frac{3}{64} = 0,0468\dots$$

$$c = 0$$

$$d = 1$$

b1) $a = -0,5$

$$d = 1,5$$

b2) $h(x) = -0,5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} \cdot x\right) + 1,5$

$$h'(x) = \frac{\pi}{16} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8} \cdot x\right) \leq \frac{\pi}{16} < 0,2$$

oder:

Die größte Steigung liegt an der Wendestelle bei $x = 4$.

$$h'(4) = \frac{\pi}{16} < 0,2$$

Die Vorgabe wird also eingehalten.

c1)

$h_1(x) = h(x - 12) + 1$	☒

c2) $L = 4 + 2 \cdot \int_0^8 \sqrt{1 + (h'(x))^2} dx$

oder:

$$L = 4 + \int_0^8 \sqrt{1 + (h'(x))^2} dx + \int_{12}^{20} \sqrt{1 + (h_1'(x))^2} dx$$

Lösungsschlüssel

- a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte.
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der beiden Gleichungen mithilfe der 1. Ableitungen.
- a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten.
- b1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Parameters a .
Ein Punkt für das Angeben des richtigen Parameters d .
- b2) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.
- c1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
- c2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.