

Meerwasser und mehr Wasser*

Aufgabennummer: B_509

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

- a) Die Funktion V beschreibt näherungsweise den zeitlichen Verlauf des Wasservolumens eines bestimmten Sees. Dabei wird das Wasservolumen in Kubikmetern und die Zeit t in Tagen angegeben.

V erfüllt die folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{dV}{dt} = 0,001 \cdot (350 - V) \quad \text{mit } V > 0$$

- 1) Argumentieren Sie anhand der Differenzialgleichung, für welche Werte von V das Wasservolumen dieses Sees gemäß diesem Modell zunimmt.
- 2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

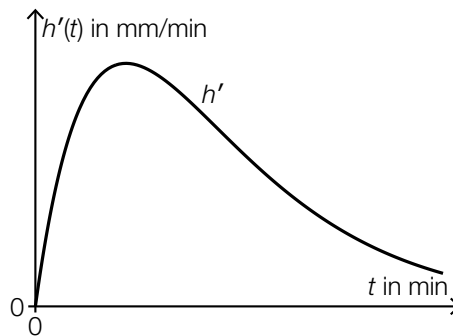
Zur Zeit $t = 0$ beträgt das Wasservolumen 150 m^3 .

- 3) Berechnen Sie die spezielle Lösung der Differenzialgleichung.

* ehemalige Klausuraufgabe

- b) Während eines Regenschauers wird der Wasserstand in einem bestimmten, anfangs leeren zylinderförmigen Gefäß gemessen.

Die Funktion h' beschreibt modellhaft die momentane Änderungsrate des Wasserstands in diesem Gefäß (siehe nachstehende Abbildung).



$$h'(t) = 1,5 \cdot t \cdot e^{-0,3 \cdot t} \text{ mit } 0 \leq t \leq 15$$

t ... Zeit in min

$h'(t)$... momentane Änderungsrate des Wasserstands zur Zeit t in mm/min

- 1) Ermitteln Sie dasjenige Zeitintervall, in dem gemäß diesem Modell die momentane Änderungsrate des Wasserstands mindestens 1 mm/min beträgt.
- c) Der innerhalb eines Tages schwankende Wasserstand in einem bestimmten Hafenbecken kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden. Der niedrigste Wasserstand wird zur Zeit $t = 0$ erreicht und beträgt 2 m, der höchste Wasserstand beträgt 4 m.

$$f(t) = a + b \cdot \cos(0,507 \cdot t)$$

t ... Zeit nach dem niedrigsten Wasserstand in h

$f(t)$... Wasserstand zur Zeit t in m

- 1) Geben Sie die Parameter a und b der Funktion f an.

Möglicher Lösungsweg

a1) Das Volumen nimmt zu, wenn die momentane Änderungsrate $\frac{dV}{dt}$ positiv ist. Dies ist dann der Fall, wenn V kleiner als 350 ist.

$$\text{a2) } \int \frac{1}{350 - V} dV = \int 0,001 dt \quad \text{oder} \quad \int \frac{V'}{350 - V} dt = \int 0,001 dt$$

$$-\ln|350 - V(t)| = 0,001 \cdot t + C_1$$

$$V(t) = 350 - C \cdot e^{-0,001 \cdot t}$$

$$\text{a3) } V(0) = 150 \Rightarrow C = 200$$

$$V(t) = 350 - 200 \cdot e^{-0,001 \cdot t}$$

$$\text{b1) } h'(t) = 1 \quad \text{oder} \quad 1,5 \cdot t \cdot e^{-0,3 \cdot t} = 1$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$t_1 = 0,86... \quad \text{und} \quad t_2 = 8,47...$$

Im Zeitintervall $[0,86...; 8,47...]$ beträgt die momentane Änderungsrate des Wasserstands mindestens 1 mm/min.

$$\text{c1) } a = 3$$

$$b = -1$$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Argumentieren.

a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der allgemeinen Lösung der Differenzialgleichung mit Hilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der speziellen Lösung der Differenzialgleichung.

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Zeitintervalls.

c1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Parameters a .

Ein Punkt für das Angeben des richtigen Parameters b .