

Zirbenkugel-Wassergefäße*

Aufgabennummer: B_504

Technologieeinsatz:

möglich ☐

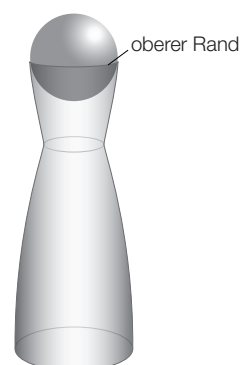
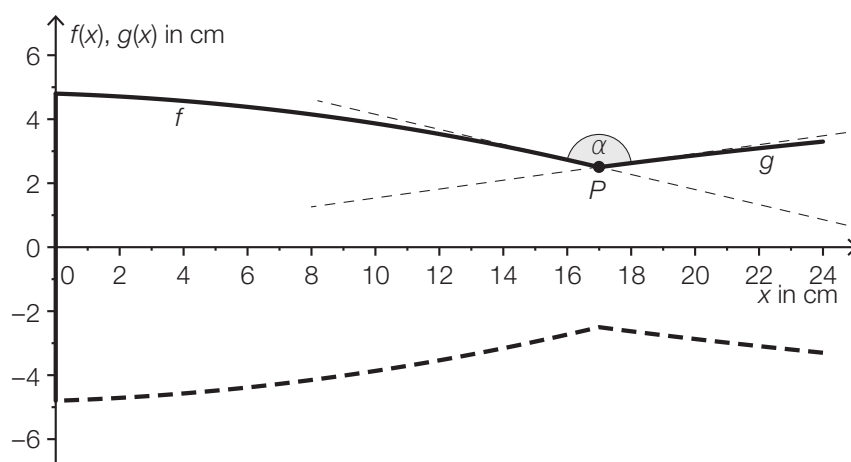
erforderlich ☒

In einer Glasmanufaktur werden Wassergefäße hergestellt, die mit einer Kugel aus Zirbenholz verschlossen werden.

- a) Das (liegende) Wassergefäß kann modellhaft durch die Rotation der Graphen der Funktionen f und g um die x -Achse beschrieben werden. Die Glasdicke wird dabei vernachlässigt.

$$f(x) = -\frac{1}{170} \cdot x^2 - \frac{3}{85} \cdot x + \frac{24}{5} \text{ mit } 0 \leq x \leq 17$$

$$g(x) = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{x-8} \text{ mit } 17 \leq x \leq 24$$



Im Schnittpunkt P schließen die Tangente an den Graphen von f und die Tangente an den Graphen von g den stumpfen Winkel α ein.

- 1) Berechnen Sie diesen stumpfen Winkel α .

Das Wassergefäß ist 18 cm hoch mit Wasser gefüllt.

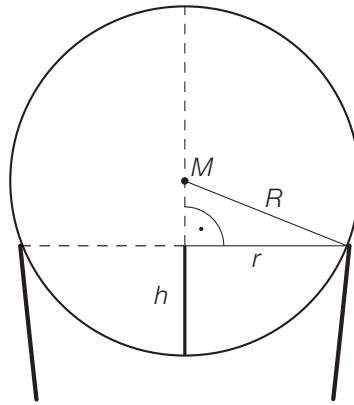
- 2) Ermitteln Sie die im Wassergefäß enthaltene Wassermenge in Litern.

Das Wassergefäß soll mit einer Markierung für eine Füllmenge von 1 L versehen werden.

- 3) Berechnen Sie die Entfernung dieser Markierung vom oberen Rand des Wassergefäßes.

* ehemalige Klausuraufgabe

- b) Die Zirbenholz-Kugel hat den Mittelpunkt M und den Radius R . Der kreisförmige obere Rand des Wassergefäßes, auf dem die Zirbenholz-Kugel aufliegt, hat den Radius r .



- 1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der in der obigen Abbildung eingezeichneten Länge h aus R und r .

$$h = \underline{\hspace{10cm}}$$

- c) Die Zirbenholz-Kugel hat einen Durchmesser von 70 mm.
Zirbenholz hat eine Dichte von rund 380 kg/m^3 .
Die Masse m ist das Produkt aus Dichte ρ und Volumen V , also $m = \rho \cdot V$.

- 1) Berechnen Sie die Masse der Zirbenholz-Kugel in Gramm.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\alpha = 180^\circ - |\arctan(f'(17))| - \arctan(g'(17)) = 158,852...^\circ$

a2) $\pi \cdot \int_0^{17} (f(x))^2 dx + \pi \cdot \int_{17}^{18} (g(x))^2 dx = 871,3...$

$871,3... \text{ cm}^3 = 0,8713... \text{ L}$

Die Wassermenge beträgt rund 0,871 L.

a3) $1\,000 = \pi \cdot \int_0^{17} (f(x))^2 dx + \pi \cdot \int_{17}^{24-a} (g(x))^2 dx$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a_1 = 1,238...$

$(a_2 = 30,761...)$

Die Entfernung dieser Markierung vom oberen Rand des Wassergefäßes beträgt rund 1,24 cm.

b1) $h = R - \sqrt{R^2 - r^2}$

c1) $380 \text{ kg/m}^3 = 0,38 \text{ g/cm}^3$

$m = 0,38 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3,5^3 \cdot \pi = 68,24...$

Die Zirbenholz-Kugel hat eine Masse von rund 68,2 g.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Winkels α

a2) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Wassermenge in Litern

a3) 1 × A: für den richtigen Ansatz

1 × B3: für das richtige Berechnen der Entfernung der Markierung vom oberen Rand des Wassergefäßes

b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung von h

c1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Masse in Gramm