

BMX-Bahn*

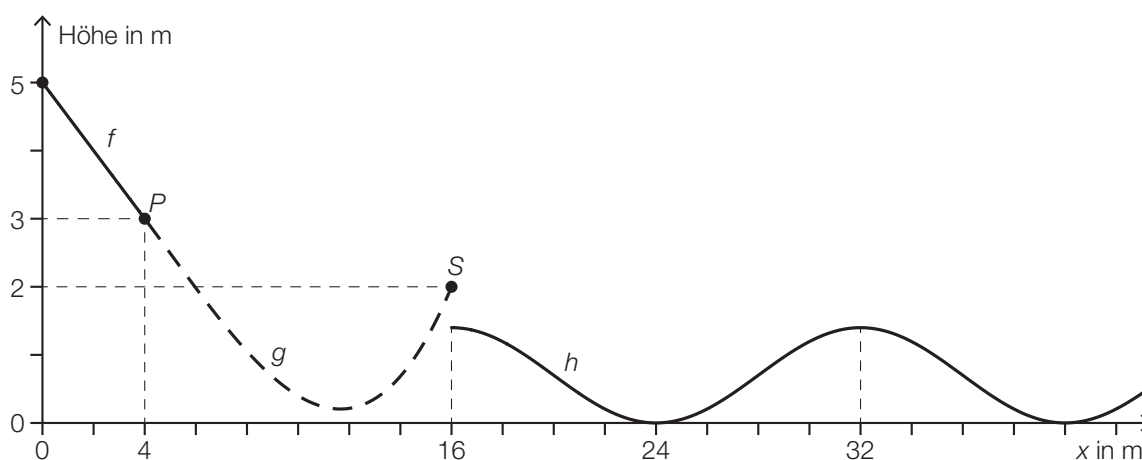
Aufgabennummer: B_497

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

Für den Bau einer BMX-Bahn wird ein Plan erstellt. In der nachstehenden Abbildung ist die Profillinie einer geplanten Teilstrecke dargestellt.



- a) Die Profillinie wird bis zum Punkt P näherungsweise durch die lineare Funktion f beschrieben.
- Die Profillinie zwischen den Punkten P und S wird näherungsweise durch die Polynomfunktion 3. Grades g mit $g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben.
- Im Punkt P hat die Polynomfunktion g die gleiche Steigung wie die lineare Funktion f .
- Im Punkt S beträgt ihr Steigungswinkel 42° .
- 1) Erstellen Sie mithilfe der Informationen zu P und S ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a , b , c und d .
 - 2) Übertragen Sie dieses Gleichungssystem in Matrizenschreibweise.

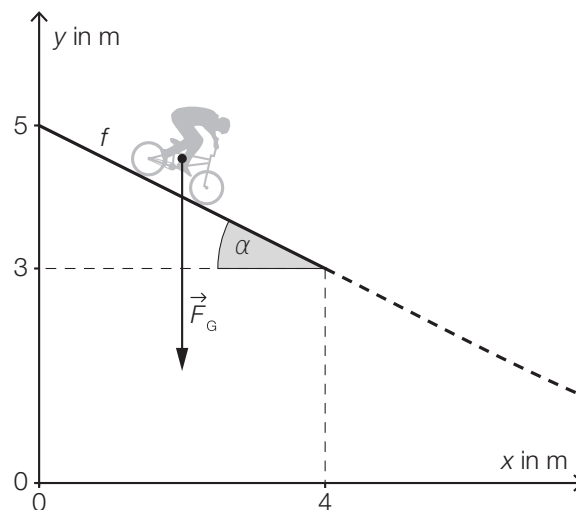
b) Ein Teil der Profillinie wird näherungsweise durch die Funktion h beschrieben:

$$h(x) = 0,7 \cdot \sin(b \cdot x + c) + d \quad \text{mit } x \geq 16$$

Der Graph der Funktion h berührt die x -Achse.

- 1) Geben Sie den Parameter d der Funktion h an.
- 2) Ermitteln Sie den Höhenunterschied zwischen dem Punkt S und dem Maximum von h .
- 3) Ermitteln Sie den Parameter b der Funktion h .

c) Im 1. Abschnitt der Teilstrecke wirkt auf einen BMX-Fahrer die Gewichtskraft $\vec{F}_G$.



- 1) Berechnen Sie den Winkel α .

Die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ kann in zwei Komponenten zerlegt werden:

Eine Komponente ist die Hangabtriebskraft $\vec{F}_H$. Diese ist parallel zur Geraden f .

Die andere Komponente ist die Normalkraft $\vec{F}_N$. Diese ist normal zur Geraden f .

- 2) Veranschaulichen Sie in der oberen Abbildung die Zerlegung der Gewichtskraft $\vec{F}_G$ in die Komponenten $\vec{F}_H$ und $\vec{F}_N$.
- 3) Berechnen Sie $|\vec{F}_H|$ für $|\vec{F}_G| = 900$ Newton.

Möglicher Lösungsweg

a1) $g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
 $g'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

I: $g(4) = 3$

II: $g(16) = 2$

III: $g'(4) = -0,5$

IV: $g'(16) = \tan(42^\circ) = 0,90\dots$

oder:

I: $64 \cdot a + 16 \cdot b + 4 \cdot c + d = 3$

II: $4096 \cdot a + 256 \cdot b + 16 \cdot c + d = 2$

III: $48 \cdot a + 8 \cdot b + c = -0,5$

IV: $768 \cdot a + 32 \cdot b + c = \tan(42^\circ) = 0,90\dots$

a2)
$$\begin{pmatrix} 64 & 16 & 4 & 1 \\ 4096 & 256 & 16 & 1 \\ 48 & 8 & 1 & 0 \\ 768 & 32 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -0,5 \\ 0,90\dots \end{pmatrix}$$

b1) $d = 0,7$

b2) $2 - 2 \cdot 0,7 = 0,6$

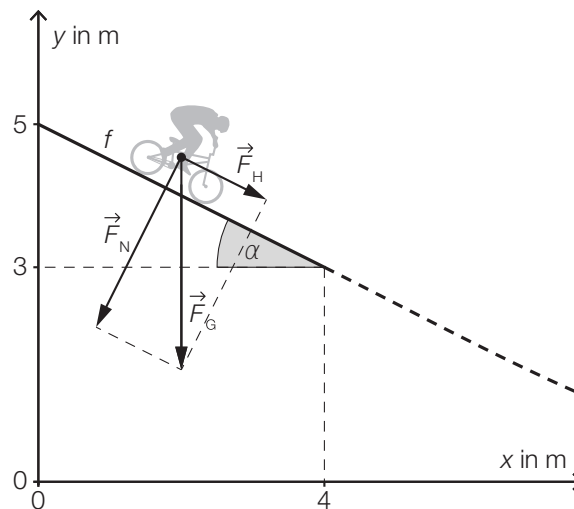
Der Höhenunterschied beträgt 0,6 m.

b3) $b = \frac{2 \cdot \pi}{16} = \frac{\pi}{8}$

c1) $\alpha = \arctan(0,5) = 26,56\dots^\circ \approx 26,6^\circ$

Auch die Angabe von $-26,6^\circ$ für den Winkel α ist als richtig zu werten.

c2)



c3) $|\vec{F}_H| = 900 \cdot \sin(26,56\dots^\circ) = 402,49\dots$

Lösungsschlüssel

- a1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der 1. Ableitung
- a2) 1 × A3: für das richtige Übertragen in Matrizenschreibweise
- b1) 1 × C: für das richtige Angeben des Parameters d
- b2) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Höhenunterschieds
- b3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Parameters b
- c1) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Winkels α
- c2) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Zerlegung von $\vec{F}_g$ als Kräfteparallelogramm oder Kraftdreieck
- c3) 1 × B2: für das richtige Berechnen von $|\vec{F}_H|$