

Elektromagnetische Strahlung*

Aufgabennummer: B_487

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

- a) Beim Eindringen von elektromagnetischer Strahlung in ein Medium nimmt die Intensität mit der Eindringtiefe ab. Die Funktion E beschreibt die Intensität der Strahlung in Abhängigkeit von der Eindringtiefe.

x ... Eindringtiefe in m

$E(x)$... Intensität bei der Eindringtiefe x in Watt pro Quadratmeter (W/m^2)

Die 1. Ableitung der Funktion E nach der Eindringtiefe x ist proportional zur Funktion E .

- 1) Vervollständigen Sie die nachstehende Differenzialgleichung. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit $-k$ ($k > 0$).

$$\frac{dE}{dx} = \underline{\hspace{10cm}}$$

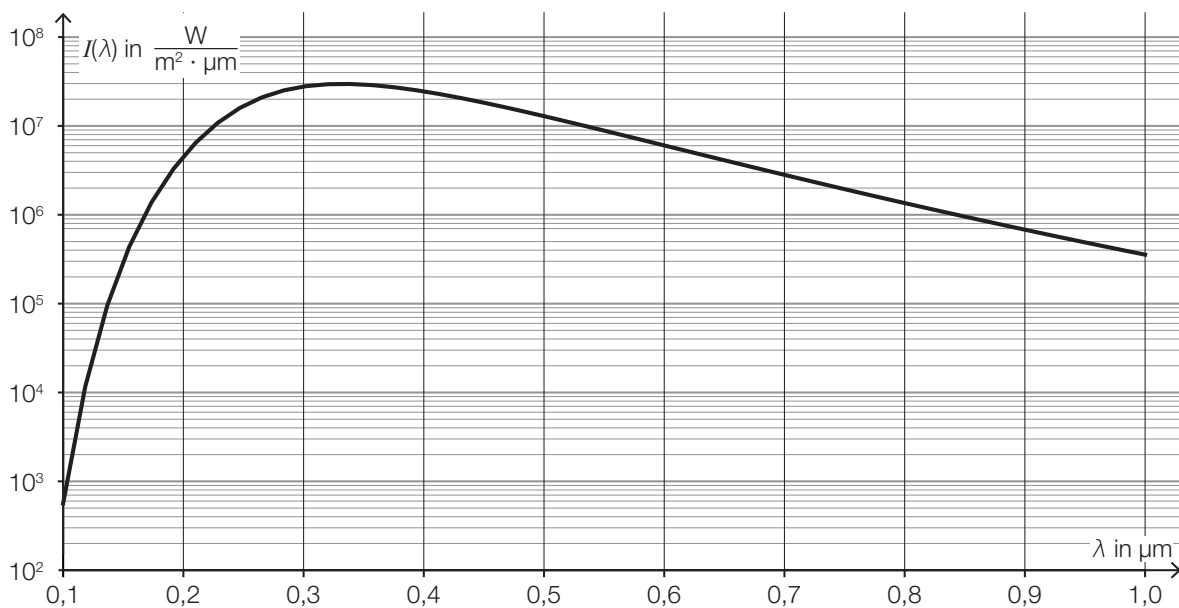
Beim Durchgang von Strahlung durch ein Medium treten Störeinflüsse auf. Diese Störeinflüsse werden durch Addition einer Konstanten S auf der rechten Seite der Differenzialgleichung berücksichtigt.

- 2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

* ehemalige Klausuraufgabe

- b) Die Streuung von Sonnenstrahlung an kleinen Molekülen der Atmosphäre ist dafür verantwortlich, dass der Himmel tagsüber blau erscheint.

Die Intensität der gestreuten Sonnenstrahlung kann in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ näherungsweise durch die Funktion I beschrieben werden. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion I in einem ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem dargestellt.



- 1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung das Maximum der Funktion I ab.

$$I_{\max} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \mu\text{m}}$$

Der relative Anteil der gestreuten Sonnenstrahlung an der gesamten Sonnenstrahlung hängt von der Wellenlänge λ ab. In einem bestimmten Wellenlängenbereich gilt:

$$A(\lambda) = 1 - e^{\frac{-0,0106}{\lambda^4}}$$

λ ... Wellenlänge in μm

$A(\lambda)$... relativer Anteil der gestreuten Sonnenstrahlung bei der Wellenlänge λ

- 2) Argumentieren Sie mathematisch, dass sich $A(\lambda)$ für größer werdendes λ dem Wert 0 nähert.

- c) Der sogenannte *Poynting-Vektor* $\vec{S}$ ist ein Vektor in $\mathbb{R}^3$, der bei Berechnungen mit elektromagnetischen Wellen verwendet wird.

Dabei gilt:

$$\vec{S} = k \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$$

$\vec{E}, \vec{B}$... Vektoren in $\mathbb{R}^3$ zur Beschreibung von elektromagnetischen Wellen

k ... Konstante, $k > 0$

- 1) Geben Sie an, wie groß der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{S}$ und $\vec{B}$ ist.
- 2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der zu $\vec{S} = k \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$ äquivalent ist. [1 aus 5]

$k = \frac{\vec{S}}{\vec{B} \times \vec{E}}$	☐
$k \cdot \vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$	☐
$-\vec{S} = k \cdot (\vec{B} \times \vec{E})$	☐
$\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\vec{S}} = k$	☐
$\vec{S} = -k \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{dE}{dx} = -k \cdot E$

a2) Differenzialgleichung mit Störfunktion S: $\frac{dE}{dx} = -k \cdot E + S$

Lösung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*:

$$\frac{dE}{-k \cdot E + S} = dx \quad \left(\text{oder: } \frac{E'}{-k \cdot E + S} = 1 \right)$$

$$\int \frac{dE}{-k \cdot E + S} = \int dx \quad \left(\text{oder: } \int \frac{E'(x)}{-k \cdot E(x) + S} dx = \int 1 dx \right)$$

$$\frac{\ln|-k \cdot E(x) + S|}{-k} = x + C_1$$

$$-k \cdot E(x) + S = C_2 \cdot e^{-k \cdot x}$$

$$E(x) = C \cdot e^{-k \cdot x} + \frac{S}{k}$$

b1) $I_{\max} = 3 \cdot 10^7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \mu\text{m}}$

b2) Für größer werdendes λ nähert sich der relative Anteil dem Wert 0, da der Ausdruck $e^{\frac{-0,0106}{\lambda^4}}$ immer weiter gegen 1 geht.

c1) Der Winkel zwischen $\vec{S}$ und $\vec{B}$ beträgt 90° .

c2)

$-\vec{S} = k \cdot (\vec{B} \times \vec{E})$	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Differenzialgleichung

a2) 1 × B: für das richtige Berechnen der allgemeinen Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*

b1) 1 × C: für das richtige Ablesen von $I_{\max}$

b2) 1 × D: für das richtige mathematische Argumentieren

c1) 1 × C1: für das richtige Angeben des Winkels

c2) 1 × C2: für das richtige Ankreuzen