

Fruchtsaftproduktion*

Aufgabennummer: B_483

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

Ein Unternehmen produziert den Fruchtsaft *Mangomix*.

- a) Die Kosten bei der Produktion des Fruchtsafts *Mangomix* können durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K beschrieben werden:

$$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + 105 \cdot x + 1215$$

x ... Produktionsmenge in hl

$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in €

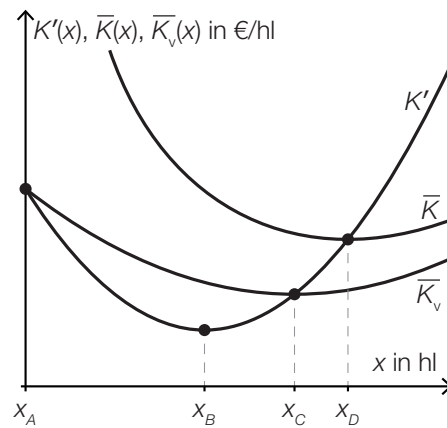
Von der Kostenfunktion ist bekannt:

I: Die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 25 hl betragen 30 €/hl.

II: $K''(25) = 0$

- 1) Erstellen Sie eine Gleichung, die die Bedingung I beschreibt.
- 2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 25 in der Gleichung II im gegebenen Sachzusammenhang.
- 3) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b .

- b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Grenzkostenfunktion K' , der Durchschnittskostenfunktion $\bar{K}$ und der variablen Durchschnittskostenfunktion $\bar{K}_V$ für den Fruchtsaft *Mangomix* dargestellt. Vier Produktionsmengen, x_A bis x_D , sind auf der horizontalen Achse markiert.



- 1) Ordnen Sie den beiden Begriffen jeweils die zutreffende Produktionsmenge aus A bis D zu. [2 zu 4]

Kostenkehre	
Betriebsminimum	

A	Produktionsmenge x_A
B	Produktionsmenge x_B
C	Produktionsmenge x_C
D	Produktionsmenge x_D

- c) Der Erlös beim Verkauf des Fruchtsafts *Mangomix* kann durch eine quadratische Funktion E beschrieben werden:

$$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x \quad \text{mit } x \geq 0$$

x ... Absatzmenge in hl

$E(x)$... Erlös bei der Absatzmenge x in €

- 1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht. [Lückentext]

Der Koeffizient a muss _____ ① _____ sein, weil der Graph von E _____ ② _____.

①	
positiv	☐
negativ	☐
gleich null	☐

②	
durch den Ursprung geht	☐
keinen Wendepunkt hat	☐
nach unten geöffnet ist	☐

- 2) Weisen Sie nach, dass der maximale Erlös bei der Absatzmenge $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$ erzielt wird.

- d) Der Grenzgewinn für den Fruchtsaft *Mangomix* kann durch die Funktion G' beschrieben werden:

$$G'(x) = -0,12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220$$

x ... Absatzmenge in hl

$G'(x)$... Grenzgewinn bei der Absatzmenge x in €/hl

- 1) Ermitteln Sie diejenige Absatzmenge, bei der der maximale Gewinn erzielt wird.

Die Fixkosten betragen 1.215 €.

- 2) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion G unter Berücksichtigung der Fixkosten.

Es soll derjenige Bereich für die Absatzmenge ermittelt werden, in dem der Gewinn mindestens 1.000 € beträgt.

- 3) Ermitteln Sie diesen Bereich.

Möglicher Lösungsweg

a1) $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + 105$

Gleichung: $K'(25) = 30$ oder $1875 \cdot a + 50 \cdot b + 105 = 30$

a2) Bei einer Produktionsmenge von 25 hl liegt die Kostenkehre.

oder:

Bei einer Produktionsmenge von 25 hl geht der Kostenverlauf von degressiv zu progressiv über.

a3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = 0,04$; $b = -3$

b1)

Kostenkehre	B
Betriebsminimum	C

A	Produktionsmenge x_A
B	Produktionsmenge x_B
C	Produktionsmenge x_C
D	Produktionsmenge x_D

c1)

①	
negativ	☒

②	
nach unten geöffnet ist	☒

c2) $E'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

$0 = 2 \cdot a \cdot x_0 + b$

$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$

oder:

Die Nullstellen der Erlösfunktion sind 0 und $-\frac{b}{a}$.

Die Stelle des Maximums liegt in der Mitte bei $-\frac{b}{2 \cdot a}$.

d1) $G'(x) = 0$ oder $-0,12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$x_1 = 29,280... \quad (x_2 = -62,613...)$$

Der maximale Gewinn wird bei einer Absatzmenge von rund 29,28 hl erzielt.

d2) $G(x) = \int (-0,12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220) dx = -0,04 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 220 \cdot x + C$

Da $G(0) = -F$, gilt: $G(x) = -0,04 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 220 \cdot x - 1\,215$

d3) $G(x) = 1\,000$ oder $-0,04 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 220 \cdot x - 1\,215 = 1\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$x_1 = 11,565... \quad x_2 = 44,950... \quad (x_3 = -106,516...)$$

Im Bereich [11,57 hl; 44,95 hl] beträgt der Gewinn mindestens 1.000 €.

Lösungsschlüssel

- a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung
- a2) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang
- a3) 1 × B: für das richtige Berechnen der Koeffizienten
- b1) 1 × C: für das richtige Zuordnen
- c1) 1 × C: für das richtige Ergänzen der beiden Textlücken
- c2) 1 × D: für das richtige Nachweisen
- d1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Absatzmenge, bei der maximaler Gewinn erzielt wird
- d2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Gewinnfunktion unter Berücksichtigung der Fixkosten
- d3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Bereichs