

Limnologie*

Aufgabennummer: B_478

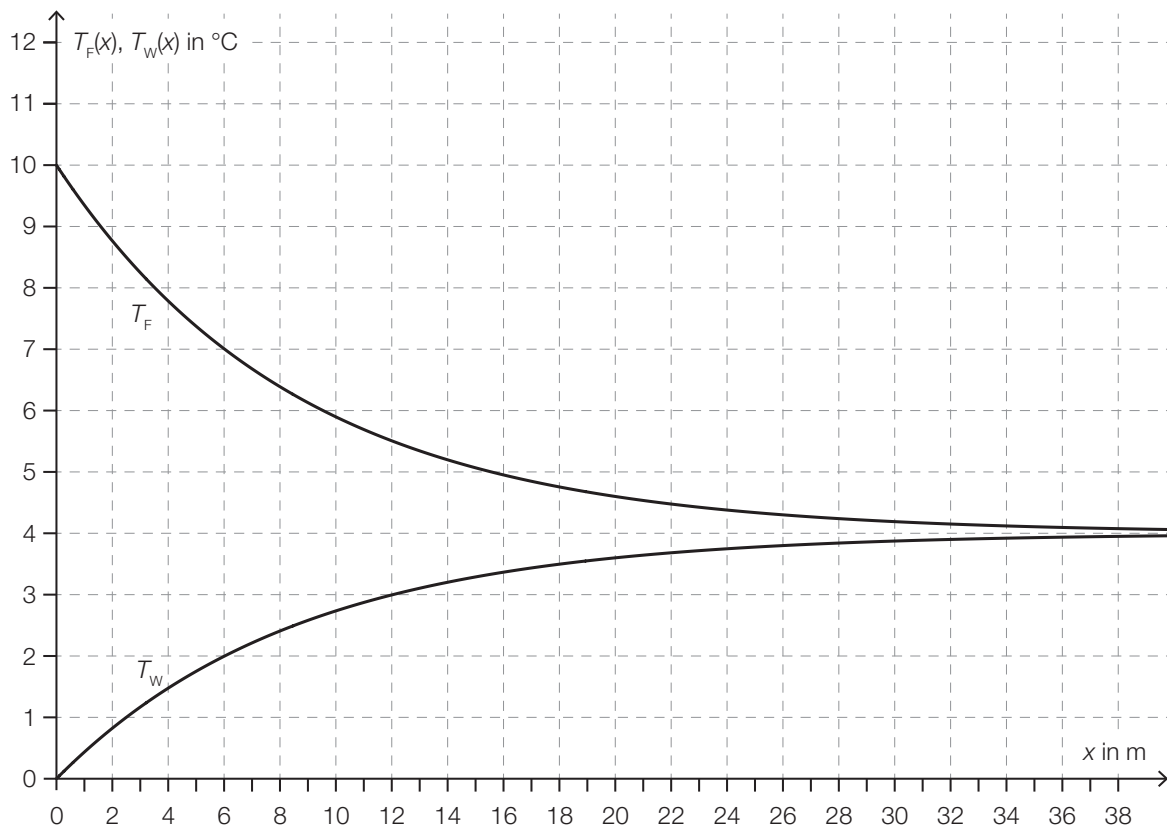
Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

Die Limnologie erforscht wichtige Kenngrößen von stehenden Gewässern wie etwa Temperatur oder Dichte.

- a) Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Wassertemperatur eines Sees in Abhängigkeit von der Tiefe x im Frühling (T_F) und im Winter (T_W). Die Wassertemperatur nähert sich in beiden Fällen asymptotisch dem Wert $4\text{ }^{\circ}\text{C}$.



Die Wassertemperatur des Sees im Frühling kann in Abhängigkeit von der Tiefe x näherungsweise durch eine Exponentialfunktion T_F mit $T_F(x) = a + b \cdot e^{c \cdot x}$ beschrieben werden.

- 1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Parameter a , b und c der Funktion T_F .

Für ein bestimmtes x_1 gilt: $T_F(x_1) - T_W(x_1) = 5$

- 2) Ermitteln Sie x_1 mithilfe der obigen Abbildung.

b) In der Limnologie wird für bestimmte Zwecke eine Funktion g verwendet:

$$g(x) = a \cdot \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{-1}$$

a, b ... positive Parameter

1) Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die auf die Funktion g nicht zutrifft. [1 aus 5]

$g(0) = a$	☐
Für $0 < x < b$ gilt: $g(x) > a$	☐
g ist für $0 < x < b$ monoton steigend.	☐
Die Funktion g hat eine Polstelle.	☐
$g(b) = 0$	☐

- c) Die Dichte von Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur kann unter bestimmten Bedingungen näherungsweise durch die Funktion ϱ beschrieben werden:

$$\varrho(T) = a - b \cdot (T - 4)^2 \text{ mit } 0 < T \leq 10$$

T ... Temperatur in °C

$\varrho(T)$... Dichte von Wasser bei der Temperatur T in kg/m³

a, b ... positive Parameter

- 1) Lesen Sie aus der obigen Funktionsgleichung die Koordinaten des Scheitelpunkts S von ϱ ab.

$$S = (\text{ } | \text{ })$$

- 2) Argumentieren Sie mathematisch, dass der Scheitelpunkt ein Hochpunkt der Funktion ϱ ist.

Es gilt: $a = 999,972$ und $b = 0,007$

Die Gleichung einer Tangente an den Graphen der Funktion ϱ lautet: $f(T) = 0,028 \cdot T + d$

- 3) Berechnen Sie den Parameter d .

Jemand verwendet zur Berechnung der Dichte von Wasser bei 10 °C die obige Funktion ϱ mit den Parametern $a = 999,972$ und $b = 0,007$.

Die Dichte von Wasser bei 10 °C beträgt jedoch laut einer Tabelle 999,700 kg/m³.

- 4) Berechnen Sie den Betrag des absoluten Fehlers bei Verwendung der Funktion ϱ anstelle des Tabellenwerts.

Möglicher Lösungsweg

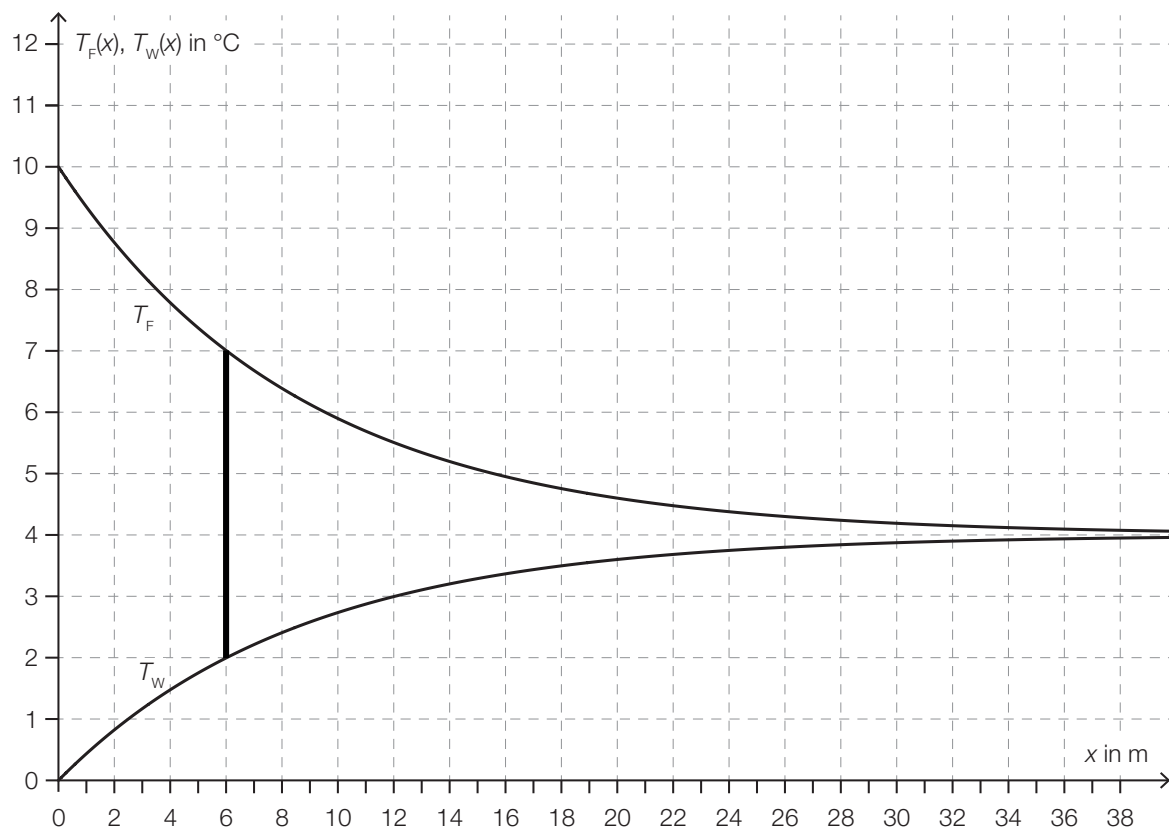
a1) $a = 4$, $b = 6$

Einsetzen des Punktes mit den Koordinaten (6|7): $7 = 4 + 6 \cdot e^{c \cdot 6}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$c = -0,1155...$

a2)



An der Stelle $x_1 = 6$ ergibt sich eine Temperaturdifferenz von 5 °C.

Toleranzbereich: $[5,9; 6,1]$

b1)

$g(b) = 0$	☒

c1) $S = (4|a)$ c2) Es liegt ein Hochpunkt vor, da die 2. Ableitung von q negativ ist ($q''(T) = -2 \cdot b < 0$).

oder:

Es liegt ein Hochpunkt vor, weil der Koeffizient des quadratischen Gliedes ($-b$) negativ ist.c3) $q'(T) = -0,014 \cdot T + 0,056$

$$q'(T_1) = 0,028 \Rightarrow T_1 = 2$$

$$d = q(2) - 0,028 \cdot 2 = 999,888$$

c4) $|q(10) - 999,7| = 0,02$ Betrag des absoluten Fehlers: $0,02 \text{ kg/m}^3$

Lösungsschlüssel

- a1) 1 × A1: für das richtige Ermitteln der Parameter a und b
 1 × B: für das richtige Ermitteln des Parameters c
- a2) 1 × A2: für das richtige Ermitteln von x_1 (Toleranzbereich: $[5,9; 6,1]$)
- b1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
- c1) 1 × C: für das richtige Ablesen der Koordinaten des Scheitelpunkts
- c2) 1 × D: für das richtige mathematische Argumentieren
- c3) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Parameters d
- c4) 1 × B2: für das richtige Berechnen des Betrags des absoluten Fehlers