

## Käseproduktion\*

Aufgabennummer: B\_468

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

Der Produktionsleiter einer kleinen Käserei hat für eine bestimmte Käsesorte die täglichen Produktionskosten genauer untersucht.

a) Für die der Kostenfunktion  $K$  zugehörigen Grenzkostenfunktion  $K'$  gilt:

$$K'(x) = 0,03 \cdot x^2 - 0,5 \cdot x + 5$$

$x$  ... Produktionsmenge in kg

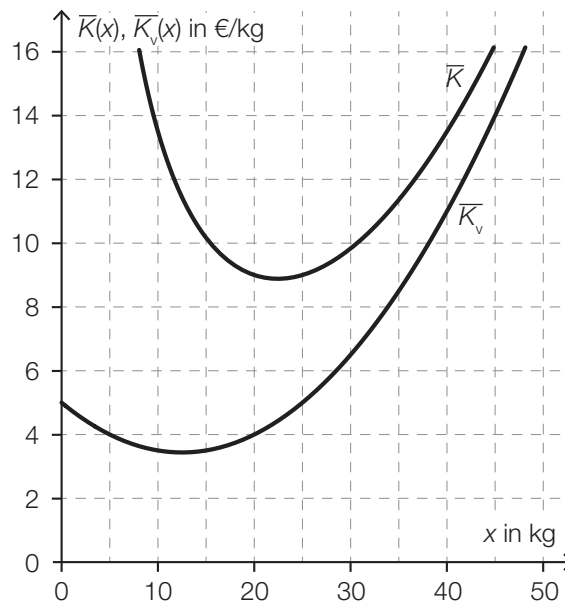
$K'(x)$  ... Grenzkosten bei der Produktionsmenge  $x$  in €/kg

Bei einer Produktionsmenge von 5 kg entstehen Gesamtkosten von € 120.

- 1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion  $K$ .
- 2) Berechnen Sie die Kostenkehre.
- 3) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\frac{K(10) - K(5)}{10 - 5} = 3$$

- b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Stückkostenfunktion  $\bar{K}$  und der variablen Stückkostenfunktion  $\bar{K}_v$  dargestellt.



- 1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung das Betriebsoptimum ab. Geben Sie die zugehörige Einheit an.
  - 2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die kurzfristige Preisuntergrenze ab. Geben Sie die zugehörige Einheit an.
- c) Der Gewinn kann durch eine Polynomfunktion  $G$  beschrieben werden.

$$G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$x$  ... Absatzmenge in kg

$G(x)$  ... Gewinn bei der Absatzmenge  $x$  in €

Bei einer Absatzmenge von 5 kg werden € 35 Verlust erzielt.

Bei einer Absatzmenge von 25 kg beträgt der Gewinn € 200.

Der maximale Gewinn wird bei einer Absatzmenge von 30 kg erzielt und beträgt € 215.

- 1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten von  $G$  ermittelt werden können.
- 2) Berechnen Sie diese Koeffizienten.

## Möglicher Lösungsweg

a1)  $K(x) = \int (0,03 \cdot x^2 - 0,5 \cdot x + 5) dx = 0,01 \cdot x^3 - 0,25 \cdot x^2 + 5 \cdot x + F$   
 $K(5) = 120 \quad \text{oder} \quad 0,01 \cdot 5^3 - 0,25 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + F = 120 \Rightarrow F = 100$

$$K(x) = 0,01 \cdot x^3 - 0,25 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 100$$

$x$  ... Produktionsmenge in kg

$K(x)$  ... Kosten bei der Produktionsmenge  $x$  in €

a2)  $K''(x) = 0,06 \cdot x - 0,5$

$$K''(x) = 0 \Rightarrow x = 8,33...$$

Die Kostenkehre liegt bei rund 8,3 kg.

a3) Wird die Produktion von 5 kg auf 10 kg gesteigert, so nehmen die Gesamtkosten um durchschnittlich € 3 pro kg zu.

b1) Betriebsoptimum: 22 kg

Toleranzbereich: [21 kg; 23 kg]

b2) kurzfristige Preisuntergrenze: 3,40 €/kg

Toleranzbereich: [3,10 €/kg; 3,70 €/kg]

c1)  $G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$$G'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$$

I:  $G(5) = -35$

II:  $G(25) = 200$

III:  $G(30) = 215$

IV:  $G'(30) = 0$

oder:

I:  $5^3 \cdot a + 5^2 \cdot b + 5 \cdot c + d = -35$

II:  $25^3 \cdot a + 25^2 \cdot b + 25 \cdot c + d = 200$

III:  $30^3 \cdot a + 30^2 \cdot b + 30 \cdot c + d = 215$

IV:  $3 \cdot 30^2 \cdot a + 2 \cdot 30 \cdot b + c = 0$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$a = -0,01; \quad b = 0,25; \quad c = 12; \quad d = -100$$

## Lösungsschlüssel

- a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Kostenfunktion (mit Integrationskonstante)
- a2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Kostenkehre
- a3) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
- b1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Betriebsoptimums im Toleranzbereich [21 kg; 23 kg] mit der Angabe der richtigen Einheit
- b2) 1 × C2: für das richtige Ablesen der kurzfristigen Preisuntergrenze im Toleranzbereich [3,10 €/kg; 3,70 €/kg] mit der Angabe der richtigen Einheit
- c1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Informationen zum Gewinn bei den Absatzmengen 5 kg, 25 kg und 30 kg  
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der Ableitungsfunktion  $G'$
- c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten