

Flugbahn und Bewegungsgleichung (1)*

Aufgabennummer: B_438

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

- a) Die Flugbahn eines Geschosses kann durch eine Funktion mit folgender Funktionsgleichung beschrieben werden:

$$y = x \cdot \tan(\alpha) - \frac{1}{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot g \cdot x^2$$

x, y ... Koordinaten in m

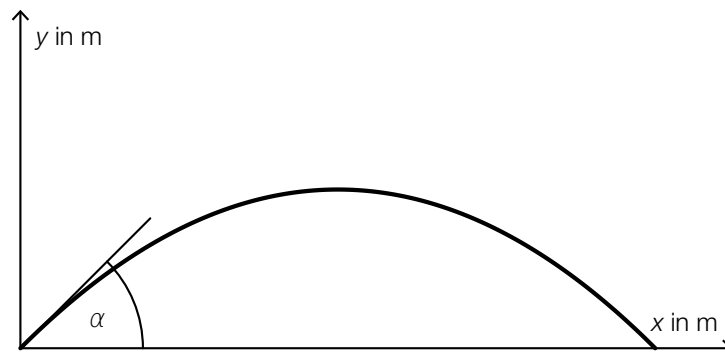
v ... Abschussgeschwindigkeit in m/s

g ... Erdbeschleunigung ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)

α ... Abschusswinkel ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

Die quadratische Gleichung $x \cdot \tan(\alpha) - \frac{1}{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot g \cdot x^2 = 10$ wird für bestimmte Werte von v und α nach x aufgelöst. Man erhält die Lösung $x_1 = x_2 = 15$.

Der Funktionsgraph der zugehörigen Flugbahn ist in der nachstehenden Abbildung nicht maßstabgetreu dargestellt.



- 1) Geben Sie die Koordinaten desjenigen Punktes P der Flugbahn an, der der oben angegebenen Lösung entspricht.
- 2) Berechnen Sie den Abschusswinkel α für die in der Grafik dargestellte Funktion.

- b) Unter Berücksichtigung des Luftwiderstands gilt für die Fallgeschwindigkeit eines Fallschirmspringers bis zum Öffnen des Schirms:

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{b}} \cdot \left(1 - \frac{2}{e^{2 \cdot \sqrt{b \cdot g} \cdot t} + 1} \right)$$

t ... Zeit nach dem Absprung in s

$v(t)$... Fallgeschwindigkeit zur Zeit t in m/s

b ... Parameter in m^{-1}

g ... Erdbeschleunigung in m/s^2

- 1) Stellen Sie den Graphen der Funktion v mit $b = 0,003 \text{ m}^{-1}$ und $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ im Bereich $0 \leq t \leq 25$ dar.

Die Fallgeschwindigkeit strebt für wachsendes t asymptotisch gegen einen Wert $v_{\max}$.

- 2) Lesen Sie aus der von Ihnen erstellten Grafik einen Näherungswert für $v_{\max}$ ab.

- c) Der zurückgelegte Weg eines Motorrads, das nach dem Auskuppeln ausrollt, wird annähernd durch die Funktion s beschrieben:

$$s(t) = 250 \cdot (1 - e^{-0,04 \cdot t})$$

t ... Zeit seit dem Auskuppeln in s

$s(t)$... zurückgelegter Weg des Motorrads zur Zeit t in m

- 1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, mit der die Geschwindigkeit des Motorrads in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben wird.
- 2) Berechnen Sie diejenige Geschwindigkeit, mit der das Motorrad zum Zeitpunkt des Auskuppelns fuhr.

Möglicher Lösungsweg

a1) $P = (15 | 10)$

a2) Die Punkte $(0 | 0)$, $(15 | 10)$ und $(30 | 0)$ liegen auf dem Graphen der quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

$(0 | 0)$: $c = 0$

$(15 | 10)$: $15^2 \cdot a + 15 \cdot b = 10$

$(30 | 0)$: $30^2 \cdot a + 30 \cdot b = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $a = -\frac{2}{45}$; $b = \frac{4}{3}$

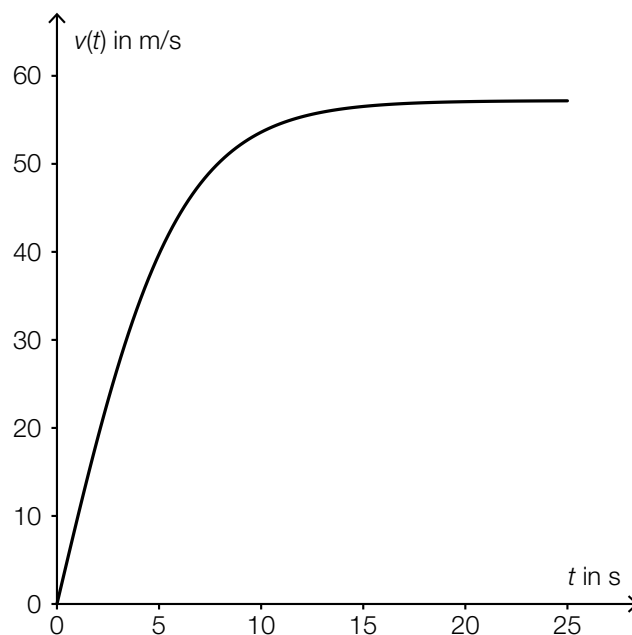
$\Rightarrow y = -\frac{2}{45} \cdot x^2 + \frac{4}{3} \cdot x$

Der Vergleich mit der gegebenen Funktionsgleichung zeigt:

$\tan(\alpha) = \frac{4}{3}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53,130\dots^\circ \approx 53,13^\circ$

b1)



b2) Daraus wird $v_{\max}$ mit rund 57 m/s abgelesen.

Toleranzbereich: $[55; 60]$

c1) $v(t) = \dot{s}(t) = 10 \cdot e^{-0,04 \cdot t}$

c2) $v(0) = 10$

Die Geschwindigkeit zu Beginn des Auskuppelns beträgt 10 m/s.

Lösungsschlüssel

- a1) 1 × C: für die richtige Angabe der Koordinaten
- a2) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des Winkels (Modellierung der quadratischen Funktion)
 - 1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels α
- b1) 1 × B: für die richtige grafische Darstellung der Fallgeschwindigkeit
- b2) 1 × C: für das richtige Ablesen eines Näherungswerts für die maximale Fallgeschwindigkeit im Toleranzbereich [55; 60]
- c1) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
- c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Geschwindigkeit