

Sinusfunktion*

Aufgabennummer: B_437

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

- a) Eine Glimmlampe beginnt zu leuchten, sobald die angelegte Spannung eine Zündspannung U_Z übersteigt. Sie erlischt wieder, sobald die angelegte Spannung die Löschspannung U_L unterschreitet. Für eine bestimmte Glimmlampe gilt:

$$U_Z = 150 \text{ V}$$

$$U_L = 100 \text{ V}$$

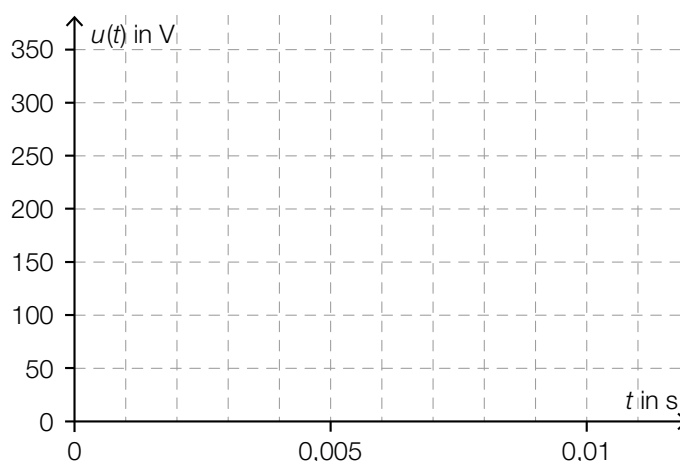
Die angelegte Spannung kann näherungsweise durch die Funktion u beschrieben werden:

$$u(t) = 325 \cdot \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$$

t ... Zeit in s

$u(t)$... Spannung zur Zeit t in Volt (V)

- 1) Veranschaulichen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Funktionsgraphen von u und kennzeichnen Sie dasjenige Zeitintervall $[t_1; t_2]$, in dem die Glimmlampe leuchtet.



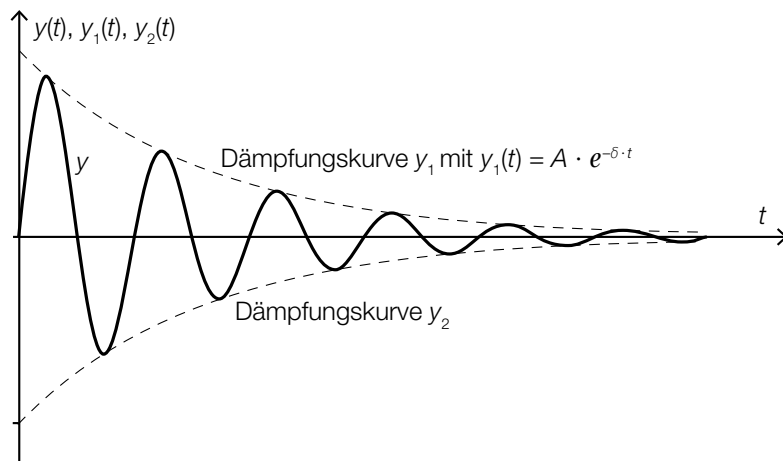
- 2) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Zeit die Glimmlampe im Zeitintervall $[0; 0,01]$ leuchtet.

- b) Die in der nachstehenden Abbildung dargestellte gedämpfte Schwingung wird durch die Funktion y beschrieben:

$$y(t) = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

t ... Zeit

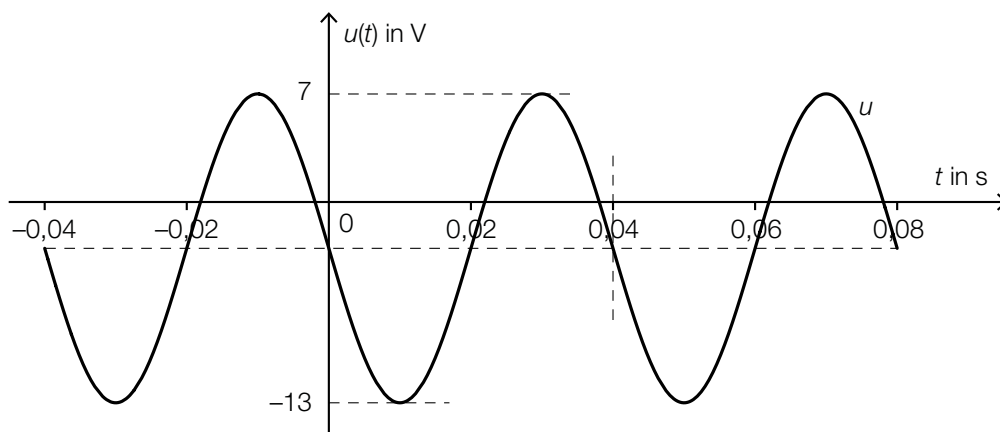
$y(t)$... Auslenkung zur Zeit t



- 1) Erstellen Sie eine Gleichung der zu y_1 symmetrischen Dämpfungskurve y_2 (siehe obige Abbildung).
- 2) Zeigen Sie, dass an den Stellen t_k , an denen der Funktionsgraph von y die Dämpfungskurve y_1 bzw. y_2 berührt, gilt:

$$t_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{\omega} \text{ mit } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

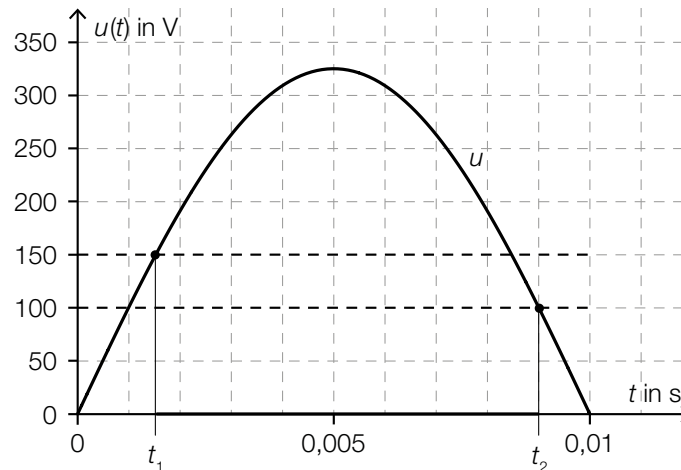
- c) Der zeitliche Verlauf einer Spannung kann durch eine Funktion u mit $u(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + d$ beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Sekunden und $A > 0$.



- 1) Lesen Sie aus dem obigen Diagramm die Parameter A und d ab.
- 2) Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter ω .
- 3) Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter φ .

Möglicher Lösungsweg

a1)



$$\text{a2) } u(t_1) = 150 \Rightarrow t_1 = 0,00152\dots$$

$$u(t_2) = 100 \Rightarrow t_2 = 0,00900\dots$$

$$\frac{t_2 - t_1}{0,01} = 0,7477\dots$$

Im Zeitintervall $[0; 0,01]$ leuchtet die Glühlampe rund 74,8 % der Zeit.

$$\text{b1) } y_2(t) = -A \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

b2) Die Stellen, an denen der Funktionsgraph von y die Dämpfungskurve y_1 bzw. y_2 schneidet, erhält man als Lösungen der Gleichung $A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \pm A \cdot e^{-\delta \cdot t}$.

$$A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \pm A \cdot e^{-\delta \cdot t} \Rightarrow \sin(\omega \cdot t) = \pm 1$$

$$\omega \cdot t_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ mit } k \in \mathbb{N} \Rightarrow t_k = \frac{\pi}{2 \cdot \omega} + k \cdot \frac{\pi}{\omega} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{\omega}$$

$$\text{c1) } A = 10$$

$$d = -3$$

c2) Die Periodendauer T ist 0,04, daher ergibt sich:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{0,04} = 50 \cdot \pi$$

c3) $t_0 = -0,02$ und $\varphi = -t_0 \cdot \omega$, daher ergibt sich:

$$\varphi = 0,02 \cdot 50 \cdot \pi = \pi$$

(Jeder Wert $\varphi = \pi + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist als richtig zu werten.)

Lösungsschlüssel

- a1) 1 × A: für das richtige grafische Veranschaulichen des Zeitintervalls
- a2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

- b1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichung von y_2
- b2) 1 × A2: für den richtigen Ansatz (Gleichung zur Berechnung der Schnittpunkte)
- 1 × D: für den richtigen Nachweis

- c1) 1 × C: für das richtige Ablesen von A und d
- c2) 1 × B1: für das richtige Bestimmen von ω
- c3) 1 × B2: für das richtige Bestimmen von φ