

Differenzialgleichungen in der Technik

Aufgabennummer: B_426

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

- a) Für die Geschwindigkeit eines bestimmten Körpers in einer Flüssigkeit gilt die folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{dv}{dt} = a + b \cdot v$$

t ... Zeit in s

$v(t)$... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

a, b ... Konstanten

- 1) Geben Sie die zugehörige homogene Differenzialgleichung an.

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung lautet:

$$v(t) = C \cdot e^{-2 \cdot t}$$

C ... Konstante

- 2) Ermitteln Sie die Konstante b .

Die Lösung dieser Differenzialgleichung lautet für eine bestimmte Anfangsbedingung:

$$v(t) = 5 - 4 \cdot e^{-2 \cdot t}$$

- 3) Ermitteln Sie die Konstante a .

- 4) Ermitteln Sie die zugehörige Anfangsbedingung für $t = 0$.

- b) Bei einer bestimmten chemischen Reaktion ändern sich die vorhandenen Massen der beteiligten Stoffe mit der Zeit. Für die Masse eines beteiligten Stoffes gilt die folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{dm}{dt} = 8 - 2 \cdot m$$

t ... Zeit ab Beginn der Beobachtung in s

$m(t)$... Masse dieses Stoffes zur Zeit t in mg

Eine spezielle Lösung dieser Differenzialgleichung wurde unter Verwendung einer Anfangsbedingung ermittelt.

- 1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils eine Fortsetzung aus A bis D zu, sodass zutreffende Aussagen entstehen.

Für $t \rightarrow \infty$ nähert sich der Graph der Lösung des homogenen Teils dieser Differenzialgleichung ...	
Für $t \rightarrow \infty$ nähert sich der Graph dieser speziellen Lösung der Differenzialgleichung ...	

A	... asymptotisch der t -Achse.
B	... asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt 8.
C	... asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt 4.
D	... asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt -2 .

- c) Die Temperatur eines Werkstücks bei einer bestimmten Wärmebehandlung kann in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben werden. Dabei kann es sich um einen Abkühlungsvorgang oder einen Erwärmungsvorgang handeln. Für den Zusammenhang gilt die folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{dT}{dt} + b \cdot T = a$$

t ... Zeit ab Beginn der Beobachtung in h

$T(t)$... Temperatur des Werkstücks zur Zeit t in $^{\circ}\text{C}$

a, b ... Konstanten

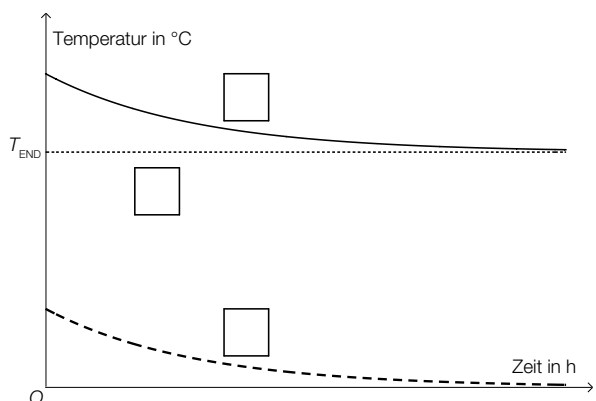
Die Lösung dieser Differenzialgleichung kann mithilfe des Ansatzes $T(t) = T_h(t) + T_p(t)$ und einer Anfangsbedingung bestimmt werden, wobei gilt:

$T(t)$... Lösung der Differenzialgleichung

$T_h(t)$... Lösung des homogenen Teils der Differenzialgleichung

$T_p(t)$... (eine beliebige) partikuläre Lösung der Differenzialgleichung

Die nebenstehende Abbildung zeigt für einen bestimmten Abkühlungsvorgang die Graphen von T , T_h und T_p .

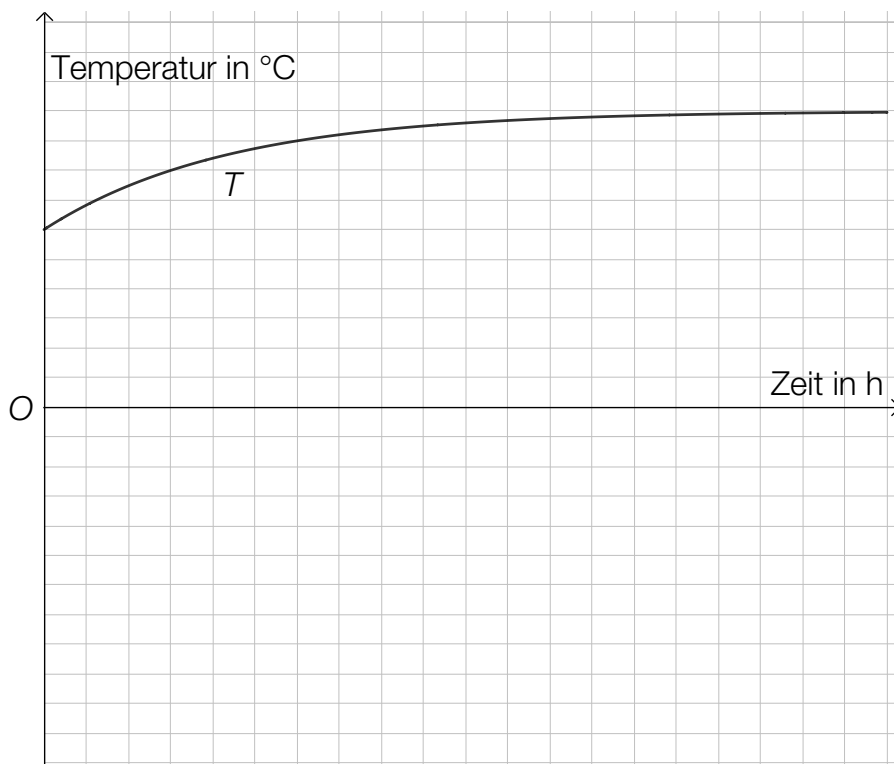


- 1) Geben Sie mithilfe von a und b eine Formel zur Ermittlung von T_{END} an.

$$T_{\text{END}} = \underline{\hspace{10cm}}$$

- 2) Tragen Sie in der obigen Abbildung die richtige Bezeichnung der Graphen in die Kästchen ein (T , T_h bzw. T_p).

Die nachstehende Abbildung zeigt für einen bestimmten Erwärmungsvorgang den Graphen von T .



- 3) Skizzieren Sie in der obigen Abbildung die Graphen von T_p und T_h .

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a1) homogene Differenzialgleichung: $\frac{dv}{dt} = b \cdot v$

a2) Einsetzen in die homogene Differenzialgleichung:

$$-2 \cdot C \cdot e^{-2 \cdot t} = b \cdot C \cdot e^{-2 \cdot t} \Rightarrow b = -2 \text{ s}^{-1}$$

a3) Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung: $\frac{dv}{dt} = a + b \cdot v$

$$8 \cdot e^{-2 \cdot t} = a - 2 \cdot (5 - 4 \cdot e^{-2 \cdot t}) \Rightarrow a = 10 \text{ m/s}^2$$

a4) $v(0) = 1 \text{ m/s}$

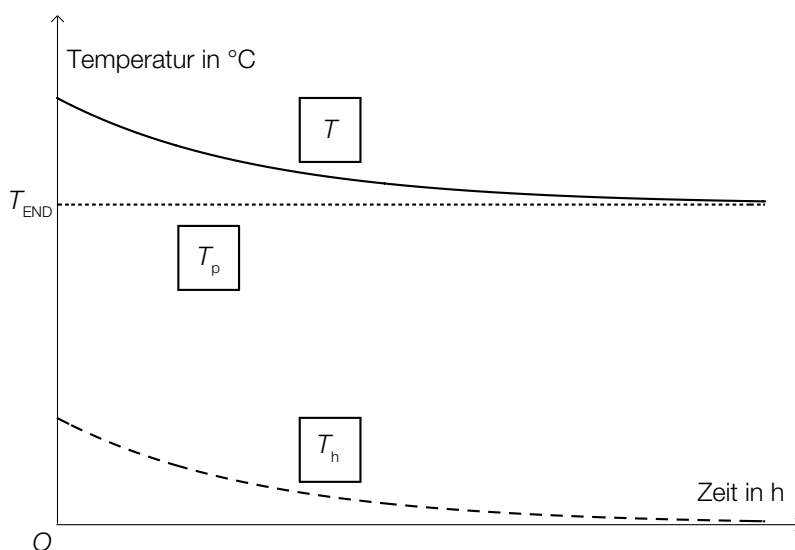
b1)

Für $t \rightarrow \infty$ nähert sich der Graph der Lösung des homogenen Teils dieser Differenzialgleichung ...	A
Für $t \rightarrow \infty$ nähert sich der Graph dieser speziellen Lösung der Differenzialgleichung ...	C

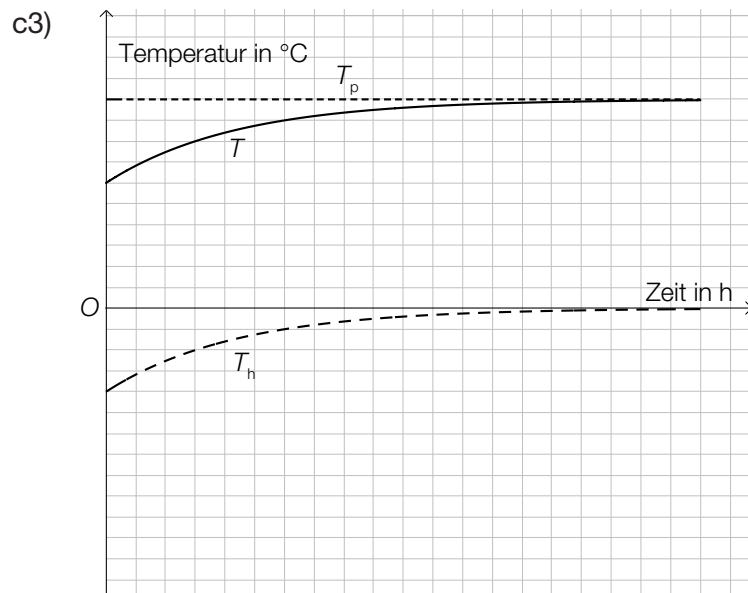
A	... asymptotisch der t -Achse.
B	... asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt 8.
C	... asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt 4.
D	... asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt -2.

c1) $T_{\text{END}} = \frac{a}{b}$

c2)



Möglicher Lösungsweg



Klassifikation

☐ Teil A

☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 4 Analysis
- b) 4 Analysis
- c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) C Interpretieren und Dokumentieren
- c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) —
- c) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) schwer
- b) schwer
- c) schwer

Punkteanzahl:

- a) 4
- b) 1
- c) 3

Thema: Technik

Quellen: —