

Grenzkosten und Grenzerlös*

Aufgabennummer: B_421

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

- a) Die Produktionskosten eines Unternehmens lassen sich näherungsweise durch die folgende Kostenfunktion K beschreiben:

$$K(x) = 0,001 \cdot x^3 - 0,115 \cdot x^2 + 5,2 \cdot x + 50$$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)

$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

- Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von K , wenn die Produktion von 20 ME auf 25 ME erhöht wird.
- Berechnen Sie die Grenzkosten bei einer Produktion von 20 ME.
- Interpretieren Sie diesen Grenzkostenwert im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

- b) Um für eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ das Betriebsoptimum zu ermitteln, wurde folgende Rechnung angesetzt:

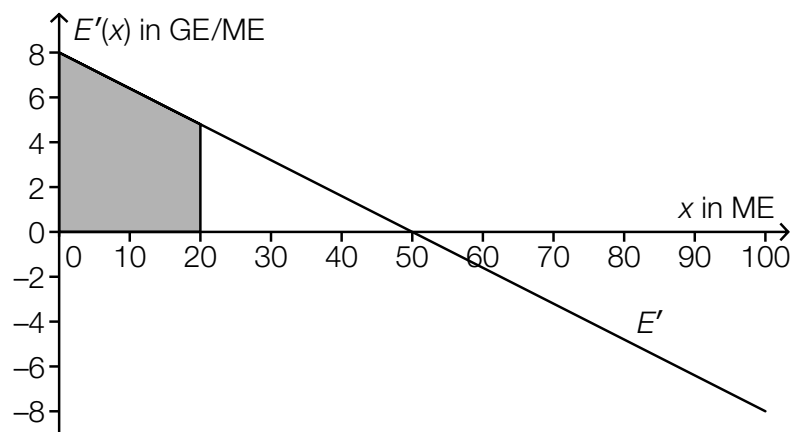
$$\frac{K(x)}{x} = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + \frac{d}{x}$$

$$\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 2 \cdot a \cdot x + b + \frac{d}{x}$$

Dabei ist die Berechnung der Ableitungsfunktion fehlerhaft.

- Stellen Sie die Berechnung der Ableitungsfunktion richtig.

- c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer linearen Grenzerlösfunktion E' dargestellt.



- Stellen Sie eine Gleichung von E' auf.
- Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.
- Interpretieren Sie unter Angabe der entsprechenden Einheit den Inhalt der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.
- Interpretieren Sie die Bedeutung der Nullstelle von E' in Bezug auf die zugehörige Erlösfunktion E im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

$$\text{a) } \frac{K(25) - K(20)}{25 - 20} = \frac{123,75 - 116}{5} = \frac{7,75}{5} = 1,55$$

Die mittlere Änderungsrate von K im Intervall $[20 \text{ ME}; 25 \text{ ME}]$ beträgt 1,55 GE/ME.

$$K'(x) = 0,003 \cdot x^2 - 0,23 \cdot x + 5,2$$

$$K'(20) = 1,8$$

Die Grenzkosten bei einer Produktion von 20 ME betragen 1,8 GE/ME.

Bei einer Produktionsmenge von 20 ME führt eine Steigerung der Produktion um 1 ME zu einer Kostensteigerung von näherungsweise 1,8 GE.

$$\text{b) } \left(\frac{K(x)}{x} \right)' = 2 \cdot a \cdot x + b - \frac{d}{x^2}$$

$$\text{c) } E'(x) = -\frac{8}{50} \cdot x + 8$$

$$E'(20) = 4,8$$

$$A = \frac{(8 + 4,8) \cdot 20}{2} = 128$$

Bei 20 abgesetzten ME beträgt der Erlös 128 GE.

Bei 50 abgesetzten ME ist der Erlös maximal.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der mittleren Änderungsrate
 1 × B2: für die richtige Berechnung der Grenzkosten
 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
- b) 1 × B: für das Richtigstellen der Berechnung der Ableitungsfunktion
- c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Grenzerlösfunktion
 1 × B: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts
 1 × C1: für die richtige Interpretation des Inhalts der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang mit Angabe der Einheit
 1 × C2: für die richtige Interpretation der Nullstelle von E' in Bezug auf die Erlösfunktion E im gegebenen Sachzusammenhang